第12卷 第3期 华侨大学学报自然科学版 Vol.12 No.3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1991年7月 (NATURAL SCIENCE) Jul. 1991

关于概自守微分方程

王 全 义

（管理信息科学系）

摘要 本文主要考虑含有“快”时间t和“慢”时间εt的一类概自守微分方程系的概自守解的存在性问题．在某些条件下，利用不动点方法和平均值法证明了这类方程系具有概自守解．在所得的结果中，定理2比文［1］中的定理3.2更为一般化．

关键词 微分方程，不动点方法，存在性，概自守解，平均值法

1 主要结果

关于含有“快”时间t和“慢”时间εt的一类微分方程系的有界解、概周期解的存在性问题，已有不少学者[2-5]做了许多工作．本文也将考虑这类微分方程系的概自守解的存在性问题．

考虑下列方程系

$$dx/dt=\varepsilon f(t,\ \varepsilon t,\ x,\ \varepsilon) \tag{1}$$

和

$$dx/dt=g(t,\ \varepsilon t,\ x)+\varepsilon g_1(t,\ \varepsilon t,\ x,\ \varepsilon), \tag{2}$$

这里$x\in R^n$、$t\in R$、$\varepsilon\in[0,\ 1]$、$f(t,\ \tau,\ x,\ \varepsilon)$、$g(t,\ \tau,\ x)$、$g_1(t,\ \tau,\ x,\ \varepsilon)$（$\tau=\varepsilon t$作为一个独立变量）是$n$维连续向量函数．$f(t,\ \tau,\ x,\ \varepsilon)$、$g_1(t,\ \tau,\ x,\ \varepsilon)$〔和$g(t,\ \tau,\ x)$〕关于$(\tau,\ x)$的一阶和二阶偏导数在$R\times R\times D\times[0,\ 1]$（$R\times R\times D$）上一致连续，此处$D$是$R^n$中的任一紧集；关于$\tau$以$T(T>0)$为周期，且关于$t$对$(\tau,\ x,\ \varepsilon)\in R\times R^n\times[0,\ 1]$（$(\tau,\ x)\in R\times R^n$）是一致地概自守函数．对于方程(1)，假设下列条件满足：

（1）平均值$f_o(\tau,\ x)=\lim\limits_{T_1\to+\infty}\dfrac{1}{T_1}\displaystyle\int_t^{t+T_1}f(s,\ \tau,\ x,\ 0)ds$对于$(\tau,\ x)\in R\times D$是一致存在且不依赖于$t$，这里$D$为$R^n$中任一紧集．

（2）周期微分方程系

$$dx/dt=\varepsilon f_o(\varepsilon t,\ x),\qquad (\varepsilon\in(0,\ 1]) \tag{3}$$

具有一个周期为T/ε的周期解$x_o(\varepsilon t)$，且式（3）关于$x_o(\varepsilon t)$的线性变分方程系

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\frac{\partial f_o(\tau,\ x(\tau))}{\partial x}\xi\triangleq A(\tau)\xi \tag{4}$$

本文1989－06－04收到．

的所有特征指数都不等于零(这里$\tau=\varepsilon t$)．于是有

定理1　如果上述条件(1)、(2)满足，则存在着$\varepsilon_0>0$充分小，使得当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时，方程(1)存在着唯一的概自守解$x=x(t,\ \varepsilon)$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|x(t,\ \varepsilon)-x_0(\varepsilon t)\|=0$对$t\in R$是一致成立的。

对于方程(2)，现假设下列条件满足：

(3)存在着连续向量函数$u_0(t,\ \tau)$：$R\times R\to R^n$满足下述条件：(a)关于τ以T为周期，关于t对$\tau\in R$为一致地概自守函数，且$\partial u_0(t,\ \tau)/\partial\tau$关于$(t,\ \tau)$一致连续。(b)$du_0(t,\tau)/dt=g(t,\tau,u_0(t,\ \tau))$，这里$\tau\in R$看作参数．(4)记$C(t,\ \varepsilon)=\partial g(t,\ \varepsilon t,\ u_0(t,\ \varepsilon t))/\partial x$，对每一个固定的$\varepsilon>0$，方程

$$dx/dt=C(t,\ \varepsilon)x \tag{5}$$

具有一个基本解方阵$Y(t,\ \varepsilon)$及存在一个投影方阵$P_1(\varepsilon)$，使得

$$\|Y(t,\ \varepsilon)P_1(\varepsilon)Y^{-1}(s,\ \varepsilon)\|\leqslant\beta_1\exp(-a_1(t-s)),\qquad(t\geqslant s),$$

$$\|Y(t,\ \varepsilon)(I_n-P_1(\varepsilon))Y^{-1}(s,\ \varepsilon)\|\leqslant\beta_1\exp(-a_1(s-t)),\qquad(s\geqslant t)$$

成立，这里a_1、β_1是不依赖于ε的正常数，I_n为n阶单位方阵．于是有

定理2　如果上述条件(3)、(4)满足，则存在着$\varepsilon_0>0$充分小，使得当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时，方程(2)具有唯一的概自守解$x=x(t,\ \varepsilon)$满足$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|x(t,\ \varepsilon)-u_0(t,\ \varepsilon t)\|=0$对$t\in R$是一致成立。

说明1：由条件(2)和Floquet理论知下列方程系

$$\frac{d\xi}{dt}=A(\varepsilon t)\xi,\qquad(\varepsilon\in(0,\ 1]) \tag{6}$$

具有一个基本解方阵$X(\varepsilon t)$及一个n阶投影方阵P(与ε无关)满足

$$\|X(\varepsilon t)PX^{-1}(\varepsilon s)\|\leqslant Ke^{-a(t-s)},\qquad(t\geqslant s),$$

$$\|X(\varepsilon t)(I_n-P)X^{-1}(\varepsilon s)\|\leqslant Ke^{-a(s-t)},\qquad(s\geqslant t),$$

这里K、a是与ε无关的正常数，I_n为n阶单位方阵。

说明2：对于每一固定的$\varepsilon>0$，条件(4)中的$C(t,\ \varepsilon)$是$n\times n$阶的概自守函数方阵。

说明3：易见定理3.2[1]是定理2的特殊情况。

2　一些引理

在本节，我们先证明一些有用的引理。

引理1　(定理1.12[6])　(1)设$\{f_n(t)\}$是概自守函数列，如果$\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(t)=f(t)$对$t\in R$一致地成立，则$f(t)$也是概自守函数；(2)设$f(t)$、$g(t)$都是概自守函数，则对于任意实数$\lambda\in R$，$f(t)+\lambda g(t)$、$\lambda g(t)$也都是概自守函数。

引理2　设$f(t,\ \tau,\ x)$：$R\times R\times R^n\to R^n$连续、关于$\tau$以$T$为周期，这里$T$为正常数，关于$t$对$(\tau,\ x)\in R\times R^n$为一致地概自守函数；此外还假定：

(i)极限

$$\lim_{T_1\to+\infty}\frac{1}{T_1}\int_t^{t+T_1} f(s,\ \tau,\ x)ds=0 \tag{7}$$

对于$(t,\ \tau,\ x)\in R\times R\times D$是一致成立的，这里$D$为$R^n$中任一紧集。

（ii）$f(t,\ \tau,\ x)$关于$(\tau,\ x)$的一阶和二阶偏导数在$R\times R\times D$上一致连续。

那末，下列极限

$$\lim_{T_1\to+\infty}\frac{1}{T_1}\int_t^{t+T_1}\frac{\partial f(s,\ \tau,\ x)}{\partial\tau}ds=0, \tag{8}$$

$$\lim_{T_1\to+\infty}\frac{1}{T_1}\int_t^{t+T_1}\frac{\partial f(s,\ \tau,\ x)}{\partial x_j}ds=0,\qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{9}$$

$$\lim_{T_1\to+\infty}\frac{1}{T_1}\int_t^{t+T_1}\frac{\partial^2 f(s,\ \tau,\ x)}{\partial x_j\partial\tau}ds=0,\qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{10}$$

对$(t,\ \tau,\ x)\in R\times R\times D$是一致成立的。

证明　以证式（8）为例，其余同理可证。事实上，由条件（ii）可知，对任意给定的$\eta>0$和R^n中任一紧集D，存在$h>0$充分小使得对所有的$(t,\ \tau,\ x)\in R\times R\times D$都有

$$\left\|\frac{f(t,\ \tau+h,\ x)-f(t,\ \tau,\ x)}{h}-\frac{\partial f(t,\ \tau,\ x)}{\partial\tau}\right\|<\frac{\eta}{4}. \tag{11}$$

又由条件（i）可知存在着$T_0=T_0(\eta,\ D)>0$充分大，使得当$T_1\geqslant T_0$，t、$\tau\in R$，$x\in D$时都有

$$\left\|\frac{1}{T_1}\int_t^{t+T_1}f(s,\ \tau+h,\ x)ds\right\|\leqslant\frac{h\eta}{4}, \tag{12}$$

$$\left\|\frac{1}{T_1}\int_t^{t+T_1}f(s,\ \tau,\ x)ds\right\|\leqslant\frac{h\eta}{4}, \tag{13}$$

因此由式（11）—（13）知对充分小的$h>0$，当$T_1\geqslant T_0$时，对一切t、$\tau\in R$，$x\in D$都有

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{T_1}\int_t^{t+T_1}\frac{\partial f(s,\ \tau,\ x)}{\partial\tau}ds\right\|&\leqslant\frac{1}{T_1}\int_t^{t+T_1}\left\|\frac{\partial f(s,\ \tau,\ x)}{\partial\tau}-\frac{f(s,\tau+h,x)-f(s,\tau,x)}{h}\right\|ds\\&+\left\|\frac{1}{hT_1}\int_t^{t+T_1}f(s,\ \tau+h,\ x)ds\right\|+\left\|\frac{1}{hT_1}\int_t^{t+T_1}f(s,\ \tau,\ x)ds\right\|\\&\leqslant\frac{\eta}{4}+\frac{\eta}{4}+\frac{\eta}{4}<\eta.\end{aligned}$$

即式（8）成立。引理2证毕。

引理3　设f：$R\times R\times R^n\to R^n$满足引理2中的所有条件。令

$$\begin{aligned}J(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)&=\int_t^{+\infty}e^{\varepsilon(t-s)}f(s,\ \tau,\ x)ds\\&=\int_0^{+\infty}e^{-\varepsilon s}f(t+s,\ \tau,\ x)ds,\qquad (\varepsilon\in(0,\ 1]),\end{aligned} \tag{14}$$

则有

（i）$J(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)$关于$(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)$连续，关于$\tau$以$T$为周期，关于$t$是连续可微的，关于$(\tau,\ x)$是二次连续可微的；此外，对于每一个固定的$\varepsilon\in(0,\ 1]$，$J(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)$、$\partial J(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)/\partial t$、$\partial J(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)/\partial\tau$、$\partial J(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)/\partial x_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$都是关

于t对$(\tau, x)\in R\times R^n$一致地概自守函数；（ii）为

$$\frac{\partial J(x, t, \tau, \varepsilon)}{\partial t}=\varepsilon J(x, t, \tau, \varepsilon)-f(t, \tau, x). \tag{15}$$

（iii）下列极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon J(x, t, \tau, \varepsilon)=0, \tag{16}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\frac{\partial J(x, t, \tau, \varepsilon)}{\partial\tau}=0, \tag{17}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\frac{\partial J(x, t, \tau, \varepsilon)}{\partial x_j}=0, \quad (j=1, 2, \cdots, n). \tag{18}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\frac{\partial^2 J(x, t, \tau, \varepsilon)}{\partial x_j\partial\tau}=0, \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{19}$$

对于$(t, \tau, x)\in R\times R\times D$是一致成立的，这里$D$为$R^n$中任一紧集。

证明　由引理的条件和式（14）可知，$J(x, t, \tau, \varepsilon)$关于$(x, t, \tau, \varepsilon)$连续，关于$\tau$以$T$为周期，关于$t$是连续可微的，并且直接对式（14）求导即可得式（15）；又J对(τ, x)是二次连续可微，且由式（14）可得

$$\frac{\partial J(x, t, \tau, \varepsilon)}{\partial\tau}=\int_0^{+\infty}e^{-\varepsilon s}\frac{\partial f(t+s, \tau, x)}{\partial\tau}ds, \tag{20}$$

$$\frac{\partial J(x, t, \tau, \varepsilon)}{\partial x_j}=\int_0^{+\infty}e^{-\varepsilon s}\frac{\partial f(t+s, \tau, x)}{\partial x_j}ds, \quad (j=1, 2, \cdots, n), \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 J(x, t, \tau, \varepsilon)}{\partial x_j\partial\tau}=\int_0^{+\infty}e^{-\varepsilon s}\frac{\partial^2 f(t+s, \tau, x)}{\partial x_j\partial\tau}ds, \quad (j=1, 2, \cdots, n), \tag{22}$$

因此$\partial J/\partial t$、$\partial J/\partial\tau$、$\partial J/\partial x_j$、$\partial^2 J/\partial x_j\partial\tau$关于$\tau$都以$T$为周期。下面证明结论(i)的最后部分。事实上由$f$的性质和命题3[7]可知：对任意序列$\{t'_i\}$，恒有子序列$\{t_i\}$及一个连续函数$g$：$R\times R\times R^n\to R^n$使得极限

$$\lim_{i\to+\infty}f(t+t_i, \tau, x)=g(t, \tau, x), \tag{23}$$

$$\lim_{i\to+\infty}g(t-t_i, \tau, x)=f(t, \tau, x) \tag{24}$$

在$R_{j1}\times R\times B_j$上一致成立，这里$R_{j1}=[-j_1, j_1]$，$B_j=\{x|x\in R^n, \|x\|\leqslant j\}$，$j_1$、$j$为任给的自然数。因为$f(t, \tau, x)$在$R\times R\times B_j$上有界且一致连续，从而当$\varepsilon\in(0, 1]$给定时，$J(x, t, \tau, \varepsilon)$也是在$R\times R\times B_j$上有界且一致连续，$j=1, 2, \cdots$。设常数$k_0=k_0(j)$使得

$$\sup_{\substack{t, \tau\in R\\ x\in B_j}}\|f(t, \tau, x)\|\leqslant k_0, \qquad \sup_{\substack{t, \tau\in R\\ x\in B_j}}\|g(t, \tau, x)\|\leqslant k_0, \tag{25}$$

又记$J_1(x, t, \tau, \varepsilon)=\int_0^{+\infty}e^{-\varepsilon s}g(t+s, \tau, x)ds$。下面将证明

$$\lim_{i\to+\infty}J(x, t+t_i, \tau, \varepsilon)=J_1(x, t, \tau, \varepsilon) \tag{26}$$

和

$$\lim_{i\to+\infty}J_1(x, t-t_i, \tau, \varepsilon)=J(x, t, \tau, \varepsilon) \tag{27}$$

在$R_{j_1}\times R\times B_j$上是一致成立的，$j_1$、$j=1, 2, 3, \cdots$。事实上，对任意$\eta>0$，取自然数$T_0\geqslant \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{4K_0}{\eta\varepsilon}>0$，于是有$\int_{T_0}^{+\infty}e^{-\varepsilon s}k_0ds\leqslant\eta/4$。由式(23)、(24)可知存在着自然数$N=N(j_1+T_0, j)$充分大，使得当$i\geqslant N$时，对所有的$(t, \tau, x)\in R_{j_1+T_0}\times R\times B_j$都有

$$\|f(t+t_i, \tau, x)-g(t, \tau, x)\|\leqslant\eta\varepsilon/4, \tag{28}$$

$$\|g(t-t_i, \tau, x)-f(t, \tau, x)\|\leqslant\eta\varepsilon/4, \tag{29}$$

因此由式(25)、(28)、(29)可得：当$i\geqslant N$时，对所有的$(t, \tau, x)\in R_{j_1}\times R\times B_j$都有

$$\begin{aligned}\|J(x,t+t_i,\tau,\varepsilon)-J_1(x,t,\tau,\varepsilon)\|&\leqslant\int_0^{T_0}e^{-\varepsilon s}\|f(t+s+t_i,\tau,x)-g(t+s,\tau,x)\|ds\\&+\int_{T_0}^{+\infty}e^{-\varepsilon s}\left[\|f(t+s+t_i,\tau,x)\|+\|g(t+s,\tau,x)\|\right]ds\\&\leqslant(\eta/4)+(2\eta/4)<\eta,\end{aligned}$$

同样地有$\|J_1(x, t-t_i, \tau, \varepsilon)-J(x, t, \tau, \varepsilon)\|<\eta$。所以当$\varepsilon$固定时$J(x, t, \tau, \varepsilon)$是关于$t$对$(\tau, x)\in R\times R^n$一致地概自守函数。又由命题4[7]和引理的条件可以同样证明$\partial J(x, t,\tau, \varepsilon)/\partial t$、$\partial J(x, t, \tau, \varepsilon)/\partial\tau$、$\partial J(x, t, \tau, \varepsilon)/\partial x_j(j=1, 2, \cdots, n)$都是关于$t$对$(\tau, x)\in R\times R^n$一致地概自守函数，因此结论(i)、(ii)成立。

下面证明结论(iii)。首先令$F(s, t, \tau, x)=\int_t^s f(r, \tau, x)dr$或$f(s, t, x)=dF(s, t, \tau, x)/ds$。对任给的$R^n$中的紧子集$D$，恒有常数$L=L(D)$使得当$(t, \tau, x)\in R\times R\times D$时都有

$$\|f(t, \tau, x)\|\leqslant L. \tag{30}$$

又因为$\lim\limits_{T_1\to+\infty}\frac{1}{T_1}\int_t^{t+T_1}f(s, \tau, x)ds=0$在$R\times R\times D$上一致成立，所以对任给的$\eta>0$，可确定$a=a(\eta)>0$充分大，使得当$|t-s|\geqslant a(\eta)$时，对所有的$\tau$、$s\in R$，$x\in D$都有

$$\left\|\frac{1}{t-s}F(s, t, \tau, s)\right\|<\frac{\eta}{4}, \tag{31}$$

而当t、τ、$s\in R$，$x\in D$且$|t-s|<a(\eta)$时有

$$\|F(s, t, \tau, x)\|\leqslant L\cdot a(\eta). \tag{32}$$

又因为

$$\begin{aligned}J(x,t,\tau,\varepsilon)&=\int_t^{+\infty}f(s, \tau, x)e^{\varepsilon(t-s)}ds\\&=\varepsilon\int_t^{+\infty}F(s, t, \tau, x)e^{\varepsilon(t-s)}ds\\&=\varepsilon\int_t^{t+a(\eta)}+\varepsilon\int_{t+a(\eta)}^{+\infty}=I_1+I_2,\end{aligned}$$

把$a(\eta)$固定下来，且由$a(\eta)$的取法可得：当t、$\tau\in R$，$x\in D$时有

$$\|\varepsilon\ I_2\|\leqslant(1/4)\eta\int_0^{\infty}\varepsilon^2se^{-\varepsilon s}ds=\eta/4.$$

而由式(32)知，存在着$\varepsilon_1>0$充分小，使得当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$，$t$，$\tau\in R$，$x\in D$时有$\|\varepsilon I_1\|<\eta/2$。于是当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$，$t$、$\tau\in R$，$x\in D$时有$\|\varepsilon J(x, t, \tau, \varepsilon)\|<\eta$。由于$\eta>0$是任意的，所以式(16)成立。由引理1和命题4[7]，同理可证(iii)中其余各式。证毕。

引理4 设f: $R\times R\times R^n\to R^n$满足引理2的所有条件，那末存在着连续向量函数$\omega$: $R^n\times R\times R\times(0,1]\to R^n$满足下列条件：

（1）$\omega(x,t,\tau,\varepsilon)$关于$(x,t,\tau,\varepsilon)$连续，关于$t\in C^{(1)}$类，关于$\tau\in C^{(2)}$类，关于$x\in C^{(2)}$类。

（2）$\omega(x,t,\tau,\varepsilon)$、$\partial\omega(x,t,\tau,\varepsilon)/\partial t$、$\partial\omega(x,t,\tau,\varepsilon)/\partial\tau$、$\partial\omega(x,t,\tau,\varepsilon)/\partial x^j$（$j=1,2,\cdots,n$）都是$\tau$的$T$－周期函数，且对于每一个固定的$\varepsilon\in(0,1]$，它们都是关于$t$对$(x,\tau)\in R^n\times R$一致地概自守函数。

（3）$\dfrac{\partial^2\omega(x,t,\tau,\varepsilon)}{\partial x_j\partial\tau}$存在、连续且极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\omega(x,t,\tau,\varepsilon)=0, \tag{33}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\frac{\partial\omega(x,t,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=0, \tag{34}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\frac{\partial\omega(x,t,\tau,\varepsilon)}{\partial x_j}=0,\qquad(j=1,2,\cdots,n) \tag{35}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\frac{\partial^2\omega(x,t,\tau,\varepsilon)}{\partial x_j\partial\tau}=0,\qquad(j=1,2,\cdots,n) \tag{36}$$

对t、$\tau\in R$、$x\in D$（D为R^n中任一紧集）一致成立。

（4）令$h(x,t,\tau,\varepsilon)=\partial\omega(x,t,\tau,\varepsilon)/\partial t+f(t,\tau,x)$，那末极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}h(x,t,\tau,\varepsilon)=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}(\partial/\partial x_j)h(x,t,\tau,\varepsilon)=0\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

对于t、$\tau\in R$、$x\in D$是一致成立的。

证明 取

$$K(x,\varepsilon)=\begin{cases}K(\varepsilon)\exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-\|x\|^2}\right), & \|x\|<\varepsilon,\\ 0, & \|x\|\geq\varepsilon,\end{cases}$$

这里$\varepsilon\in(0,1]$，$\|x\|^2=\sum_{i=1}^n x_i^2$，$K(\varepsilon)=(\varepsilon K_0)^{-1}$，$K_0=\int_{\|x\|<1}\exp\left(-\dfrac{1}{1-\|x\|^2}\right)dx$，$dx=dx_1\cdot dx_2\cdots dx_n$为$R^n$中的体积元。于是有

$$\int_{R^n}K(x,\varepsilon)dx=1.$$

对于$f(t,\tau,x)$，定义函数

$$J(x,t,\tau,\varepsilon)=\int_t^{+\infty}f(s,\tau,x)\exp(\varepsilon(t-s))ds$$

$$=\int_0^{+\infty}f(t+s,\tau,x)\exp(-\varepsilon s)ds,$$

$$\omega(x,t,\tau,\varepsilon)=\int_{R^n}K(y,\varepsilon)J(y+x,t,\tau,\varepsilon)dy$$

$$=\int_{\|y\|<\varepsilon}K(y,\varepsilon)J(y+x,t,\tau,\varepsilon)dy$$

$$=\int_{\|z-x\|<\varepsilon}K(z-x,\ \varepsilon)J(z,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)dz,\tag{37}$$

这里x、y、$z\in R^n$。由于$f(t,\ \tau,\ x)$关于$((\tau,\ x)$的一阶和二阶偏导数在$R\times R\times D$(D为R^n中任一紧集)都一致连续，故由式(37)可知ω满足部分(1)，并且从式(37)可得

$$\frac{\partial\omega(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial t}=\int_{R^n}K(y,\ \varepsilon)\frac{\partial J(y+x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial t}dy,$$

$$\frac{\partial\omega(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial\tau}=\int_{\|y\|<\varepsilon}K(y,\ \varepsilon)\frac{\partial J(y+x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial\tau}dy,$$

$$\frac{\partial\omega(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial x_j}=\int_{\|z-x\|<\varepsilon}K(z-x,\ \varepsilon)\frac{\partial J(z,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial x_j}dy,\qquad j=1,2,\cdots,n,$$

$$\frac{\partial^2\omega(x,t,\tau,\varepsilon)}{\partial x_j\partial t}=\int_{\|y\|<\varepsilon}K(y,\ \varepsilon)\frac{\partial^2 J(y+x,t,\tau,\varepsilon)}{\partial x_j\partial\tau}dy,\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

再由引理3的结论及其证明方法可知部分(2)也成立。

下面证明部分(3)。以证式(33)为例，其余同理可证。事实上，对任给的$\eta>0$和R_n的任一紧集D_r(这里不妨设$D_r=\{x|x\in R^n,\ \|x\|\leqslant r,\ r>0\}$，由引理3可知存在着$\delta=\delta(\eta)>0$，使得当$0<\varepsilon\leqslant\delta$，$t$、$\tau\in R$，$x\in D_{r+1}$时有$\|\varepsilon J(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)\|<\eta$。因此，当$0<\varepsilon\leqslant\delta$时，对所有的$t$、$\tau\in R$，$x\in D_r$都有

$$\|\varepsilon\omega(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)\|<\eta\int_{\|y\|<\varepsilon}K(y,\ \varepsilon)dy=\eta,$$

因此部分(3)也成立。

最后证明部分(4)。因为

$$h(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)=\frac{\partial\omega(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial t}+f(t,\ \tau,\ x)$$

$$=\int_{\|y\|<\varepsilon}K(y,\ \varepsilon)\left[\frac{\partial J(x+y,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial t}+f(t,\tau,x)\right]dy$$

$$=\int_{\|y\|<\varepsilon}K(y,\ \varepsilon)\left[f(t,\tau,x)-f(t,\tau,x+y)\right]dy+\varepsilon\omega(x,t,\tau,\varepsilon),$$

且$f(t,\ \tau,\ x)$在$R\times R\times D$上一致连续，这里D为R^n中任一紧集，因此$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}h(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)=0$对$t$、$\tau\in R$、$x\in D$一致成立。同理可得

$$\frac{\partial}{\partial x_j}h(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)=\int_{\|y\|<\varepsilon}K(y,\varepsilon)\left[\frac{\partial}{\partial x_j}f(t,\ \tau,\ x)-\frac{\partial}{\partial x_j}f(t,\ \tau,\ x+y)\right]dy$$

$$+\varepsilon\frac{\partial\omega(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial x_j},$$

故$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\partial h(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial x_j}=0$对$t$、$\tau\in R$、$x\in D$一致成立。证毕。

引理5　考虑方程系

$$dx/dt=A(t)x+f(t),\tag{38}$$

这里$x\in R^n$、$t\in R$、$A(t)$为n阶概自守函数方阵，f: $R\to R^n$是概自守向量函数。如果线性方程系

$$dx/dt=A(t)x\tag{39}$$

满足指数型二分法，即方程(39)有一个基本解方阵$X(t)$及存在着一个n阶投影方阵P使得

$$\|X(t)PX^{-1}(s)\|\leqslant\beta e^{-\alpha(t-s)},\qquad (t\geqslant s),$$

$$\|X(t)(I_n-P)X^{-1}(s)\|\leqslant\beta e^{-\alpha(s-t)},\qquad (s\geqslant t)$$

这里β、α为正常数、I_n为n阶单位方阵．则方程(38)存在唯一的有界解，它是概自守解，且可表为

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t)PX^{-1}(s)f(s)\,ds-\int_{t}^{+\infty}X(t)(I_n-P)X^{-1}(s)f(s)ds \tag{40}$$

证明　因为方程(39)满足指数型二分法，因此方程(38)具有唯一的有界解。此外，易证式(40)所定义的$x(t)$存在且有界连续可微．直接对式(40)两边求导可知$x(t)$满足方程(38)，因此$x(t)$是方程(38)的唯一有界解．再由定理2.3[1]即知$x(t)$是方程(38)的概自守解．引理5证毕．

3　定理的证明

3.1　定理1的证明

首先把方程（1）改写为如下形式：

$$dx/dt=\varepsilon f_0(\varepsilon t,\ x)+\varepsilon f_1(t,\ \varepsilon t,\ x)+\varepsilon f_2(t,\ \varepsilon t,\ x,\ \varepsilon), \tag{41}$$

这里$f_0(\varepsilon t,\ x)=\lim\limits_{T_1\to+\infty}\dfrac{1}{T_1}\displaystyle\int_t^{t+T_1}f(s,\ \varepsilon t,\ x,\ 0)ds$为条件（1）给定。

$$f_1(t,\varepsilon t,x)=f(t,\varepsilon t,x,0)-f_0(\varepsilon t,x),\quad f_2(t,\varepsilon t,x,\varepsilon)=f(t,\varepsilon t,x,\varepsilon)-f(t,\varepsilon t,x,0).$$

故$f_i(i=0,\ 1,\ 2)$仍具有与f相同的性质．易见$f_2(t,\ \varepsilon t,\ x,\ 0)=0$且$f_1(t,\ \tau,\ x)(\tau=\varepsilon t$作为独立变量)满足引理4的所有条件．故由引理4可知对于$f_1(t,\ \tau,\ x)$，存在着函数$\omega(x,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)$具有引理4的三个性质．记$b=\sup\limits_{\tau\in R}\|x_0(\tau)\|$，于是存在着$\delta_1>0$充分小，使得当$0<\varepsilon\leqslant\delta_1$时，对所有的$t$、$\tau\in R$，$y\in R^n$且$\|y\|\leqslant b+1$都有

$$\left\|\varepsilon\frac{\partial\omega(y,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial y}\right\|\leqslant\frac{1}{2} \tag{42}$$

现在对方程（41）施行下列变换

$$x=y-\varepsilon\omega(y,\ t,\ \varepsilon t,\ \varepsilon) \tag{43}$$

这里$y\in R^n$且$\|y\|\leqslant b+1$，$\varepsilon\in(0,\ \delta_1]$，于是有

$$\frac{dx}{dt}=\left(I_n-\varepsilon\frac{\partial\omega(y,\ t,\ \varepsilon t,\ \varepsilon)}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}-\left[\varepsilon\frac{\partial\omega(y,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial\omega(y,t,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}\right]_{\tau=\varepsilon t}, \tag{44}$$

又从式（42）可知（$I_n-\varepsilon\dfrac{\partial\omega(y,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial y}$）可逆，且有

$$\left(I_n-\varepsilon\frac{\partial\omega(y,\ t,\ \varepsilon t,\ \varepsilon)}{\partial y}\right)^{-1}=I_n+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\varepsilon\frac{\partial\omega(y,\ t,\ \tau,\ \varepsilon)}{\partial y}\right)^i. \tag{45}$$

由式（41）－（45）直接计算可知，方程（41）可被化为

$$dy/dt=\varepsilon f_0(\varepsilon t,\ y)+\varepsilon f_3(t,\ \varepsilon t,\ y,\ \varepsilon)+\varepsilon f_4(t,\ \varepsilon t,\ y,\ \varepsilon), \tag{46}$$

这里$\|y\|\leqslant b+1$，$y\in R^n$，$0<\varepsilon\leqslant\delta_1$，

$$f_3(t,\varepsilon t,y,\varepsilon)=[f_0(\varepsilon t,y-\varepsilon\omega)-f_0(\varepsilon t,y)]+[f_1(t,\varepsilon t,y-\varepsilon\omega)-f_1(t,\varepsilon t,y)]$$
$$+\left[f_1(t,\varepsilon t,y)+\frac{\partial\omega(y,t,\tau,\varepsilon)}{\partial t}\right]_{\tau=\varepsilon t}+\varepsilon\frac{\partial\omega(y,t,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=\varepsilon t},$$

$$f_4(t,\ \varepsilon t,\ y,\ \varepsilon)=f_2(t,\ \varepsilon t,\ y-\varepsilon\omega,\ \varepsilon)$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\varepsilon\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^i\left[f_0+f_1+f_2+\left(\varepsilon\frac{\partial\omega(y,t,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+\frac{\partial\omega(y,t,\tau,\varepsilon)}{\partial t}\right)_{\tau=\varepsilon t}\right].$$

于是由定理 1 的条件和命题 4、5 [7] 及引理 4 可知方程（46）右边的所有函数关于y具有连续的一阶偏导数；且对于每一个固定的$\varepsilon\in(0,\ \delta_1]$，它们都是关于$t$对$y\in D_{b+1}$为一致地概自守函数，此处$D_{b+1}=\{y|y\in R^n,\ \|y\|\leqslant b+1\}$。此外还有：对任意的$t$、$\tau\in R$，$\|y\|\leqslant b+1$，当$\varepsilon\to0$时，$f_i(t,\ \tau,\ y,\ \varepsilon)\to0$，$\partial f_i(t,\ \tau,\ y,\ \varepsilon)/\partial y\to0$（$i=3,\ 4$）是一致成立的。

对于方程（46），再作变换

$$y=x_0(\varepsilon t)+z, \tag{47}$$

这里$\|z\|\leqslant1$且$z\in R^n$、$0<\varepsilon\leqslant\delta_1$。则方程（46）可化为

$$dz/dt=\varepsilon\mathbf{A}(\varepsilon t)z+\varepsilon f_5(t,\ \varepsilon t,\ \varepsilon)+\varepsilon f_6(\varepsilon t,\ z)+\varepsilon f_7(t,\ \varepsilon t,\ z,\ \varepsilon), \tag{48}$$

这里$\|z\|\leqslant1$，$z\in R^n$，$0<\varepsilon\leqslant\delta_1$，而$\mathbf{A}(\varepsilon t)$由条件(2)给定，

$$f_5(t,\ \varepsilon t,\ \varepsilon)=f_3(t,\ \varepsilon t,\ x_0(\varepsilon t),\ \varepsilon)+f_4(t,\ \varepsilon t,\ x_0(\varepsilon t),\ \varepsilon),$$
$$f_6(\varepsilon t,\ z)=f_0(\varepsilon t,\ x_0(\varepsilon t)+z)-f_0(\varepsilon t,\ x_0(\varepsilon t))-\mathbf{A}(\varepsilon t)z,$$
$$f_7(t,\ \varepsilon t,\ z,\ \varepsilon)=[f_3(t,\ \varepsilon t,\ x_0(\varepsilon t)+z,\ \varepsilon)-f_3(t,\ \varepsilon t,\ x_0(\varepsilon t),\ \varepsilon)]$$
$$+[f_4(t,\ \varepsilon t,\ x_0(\varepsilon t)+z,\ \varepsilon)-f_4(t,\ \varepsilon t,\ x_0(\varepsilon t),\ \varepsilon)].$$

由上述可知：当$\varepsilon\in(0,\ \delta_1]$固定时，方程（48）右边所有函数都是关于$t$对$z\in D_1$一致地概自守函数，且关于$z$连续可微；此外还有：$f_7(t,\ \varepsilon t,\ 0,\ \varepsilon)=0$，$f_6(\varepsilon t,\ 0)=0$，$\partial f_6(\varepsilon t,0)/\partial z=0$，且当$\varepsilon\to0$时$f_5(t,\ \varepsilon t,\ \varepsilon)\to0$，$\partial f_7(t,\ \varepsilon t,\ z,\ \varepsilon)/\partial z\to0$对$t\in R$、$\|z\|\leqslant1$是一致成立的。

为方便起见，把方程（48）简写为

$$dz/dt=\varepsilon\mathbf{A}(\varepsilon t)z+\varepsilon f_5(t,\ \varepsilon t,\ \varepsilon)+\varepsilon f_8(t,\ \varepsilon t,\ z,\ \varepsilon), \tag{49}$$

这里$z\in R^n$且$\|z\|\leqslant1$，$0<\varepsilon\leqslant\delta_1$，$f_8=f_6+f_7$。综上述可知：要证明定理的结论成立，只须证明存在着$\delta_0>0$（$\delta_0<\delta_1$），当$0<\varepsilon\leqslant\delta_0$时方程（49）有唯一的概自守解$z=z(t,\ \varepsilon)$满足$\lim\limits_{\varepsilon\to0}\|z(t,\ \varepsilon)\|=0$对$t\in R$一致成立即可。从$f_8$的定义知：当$\|z\|$、$\varepsilon>0$充分小时，它关于$z$的李普希茨常数也充分小。因此对于$l=\alpha/32k$（$k$、$\alpha$为说明 1 给定），存在着正数$r$、$\delta_2$（$r<1/2$、$\delta_2<\delta_1$）充分小，使得当$\|z_i\|\leqslant r$、$z_i\in R^n$（$i=1,\ 2$），$0<\varepsilon\leqslant\delta_2$时就有

$$\|f_8(t,\ \varepsilon t,\ z_1,\ \varepsilon)-f_8(t,\ \varepsilon t,\ z_2,\ \varepsilon)\|\leqslant l\cdot\|z_1-z_2\|. \tag{50}$$

再取正数δ_3（$\delta_3<\delta_2$）充分小，使当$0<\varepsilon\leqslant\delta_3$时就有

$$\sup_{\substack{0<\varepsilon\leqslant\delta_3\\ t\in R}}\{\|f_5(t,\ \varepsilon t,\ \varepsilon)\|\}\leqslant\frac{r\alpha}{16k}. \tag{51}$$

记

$$\delta(\varepsilon)=\sup_{t\in R}\{\|f_5(t,\ \varepsilon t,\ \varepsilon)\|\},\qquad 0<\varepsilon\leqslant\delta_3, \tag{52}$$

因为当$\varepsilon\to0$时，$f_5(t,\varepsilon t,\varepsilon)\to0$对$t\in R$一致地成立，从而当$\varepsilon\to0$时，$\delta(\varepsilon)\to0$。

现在考虑下列概自守微分方程

$$dz/dt=\varepsilon A(\varepsilon t)z+\varepsilon f_5(t,\ \varepsilon t,\ \varepsilon), \quad (53)$$

由条件（2）知方程（53）满足引理5的条件，因此由引理5知式（53）具有唯一的概自守解

$$\xi_0(t,\varepsilon)=\left[\int_{-\infty}^{t}X(\varepsilon t)PX^{-1}(\varepsilon s)-\int_{t}^{+\infty}X(\varepsilon t)(I_n-P)X^{-1}(\varepsilon s)\right]\varepsilon f_5(s,\varepsilon s,\varepsilon)ds. \quad (54)$$

又由条件（2）和式（52）易得

$$\|\xi_0(t,\varepsilon)\|\leqslant 2k\delta(\varepsilon)/\alpha, \qquad 0<\varepsilon\leqslant\delta_3. \quad (55)$$

所以有

$$\sup_{t\in R}\{\|\xi_0(t,\varepsilon)\|\}\triangleq\frac{2K\theta(\varepsilon)\delta(\varepsilon)}{\alpha}, \qquad 0<\varepsilon\leqslant\delta_3, \quad (56)$$

其中 $0<\theta(\varepsilon)\leqslant 1$（因为若$\theta(\varepsilon)\equiv 0$，此时必有$f_5\equiv 0$，从而定理显然成立）。又由式（51）与（54）可得

$$\sup_{t\in R}\{\|\xi_0(t,\varepsilon)\|\}\leqslant\frac{r}{8}, \qquad (0<\varepsilon\leqslant\delta_3).$$

因此有

$$2\theta(\varepsilon)\cdot K\cdot\delta(\varepsilon)/\alpha\leqslant r/8, \qquad (0<\varepsilon\leqslant\delta_3). \quad (57)$$

下面用压缩映象原理证明方程（49）在 $0<\varepsilon\leqslant\delta_3$有一个概自守解．首先定义集合$M=\{\xi(t)\,|\,\xi(t)$是$n$维概自守向量函数$\}$，对任意的$\xi(t)\in M$，定义它的范数为$\|\xi\|=\sup\limits_{t\in R}\{\|\xi(t)\|\}$．于是由引理6可知在此范数下，$M$是个Banach空间．对于 $0<\varepsilon\leqslant\delta_3$，定义集合

$$B(\varepsilon)=\{\xi(t)\,|\,\xi(t)\in M\text{且}\sup_{t\in R}\{\|\xi(t)-\xi_0(t,\varepsilon)\|\}\leqslant\frac{\theta(\varepsilon)\cdot K\cdot\delta(\varepsilon)}{\alpha}\}.$$

于是$B(\varepsilon)$是M中的有界闭子集且对任意的$\xi(t)\in B(\varepsilon)$，由式（56）、（57）可得

$$\|\xi\|\leqslant 3K\cdot\theta(\varepsilon)\cdot\delta(\varepsilon)/\alpha<r/4. \quad (58)$$

对于每一个固定的$\varepsilon\in(0,\ \delta_3]$，当$\xi(t)\in B(\varepsilon)$时，$f_8(t,\ \varepsilon t,\ \xi(t),\ \varepsilon)$是$t$的概自守函数（命题5[7]），因此由引理5知概自守微分方程系

$$dz/dt=\varepsilon A(\varepsilon t)z+\varepsilon f_5(t,\ \varepsilon t,\ \varepsilon)+\varepsilon f_8(t,\ \varepsilon t,\ \xi(t),\ \varepsilon) \quad (59)$$

有唯一的概自守解

$$z(t,\varepsilon)=\xi_0(t,\varepsilon)+\left[\int_{-\infty}^{t}X(\varepsilon t)PX^{-1}(\varepsilon s)-\int_{t}^{+\infty}X(\varepsilon t)(I_n-P)X^{-1}(\varepsilon s)\right]\varepsilon f_8(s,\varepsilon s,\xi(s),\varepsilon)ds. \quad (60)$$

又由式（50）、（56）—（58）、（60）和定理的条件可得

$$\sup_{t\in R}\{\|z(t,\varepsilon)-\xi_0(t,\varepsilon)\|\}\leqslant\frac{\theta(\varepsilon)\cdot K\cdot\xi(\varepsilon)}{\alpha},$$

因此$z(t,\ \varepsilon)\in B(\varepsilon)$．再定义映射$\Phi$：$B(\varepsilon)\to B(\varepsilon)$，它由下式

$$\Phi(\xi(t))=z(t,\ \varepsilon), \qquad (\xi(t)\in B(\varepsilon)) \quad (61)$$

定义．又从式（60）易得

$$\sup_{t\in R}\{\|\Phi(\xi_1(t))-\Phi(\xi_2(t))\|\}\leqslant\frac{1}{2}\|\xi_1-\xi_2\|$$

对任意的$\xi_i(t)\in B(\varepsilon)(i=1,\ 2)$都成立，从而由压缩映象原理知：存在唯一的一点 $\xi(t)\in B(\varepsilon)$，使得$\Phi(\xi(t))=\xi(t)$（注意$\xi(t)\in B(\varepsilon)$，所以$\xi(t)$是ε的函数，即$\xi(t)=\xi(t,\ \varepsilon)$）此即

$$\xi(t,\varepsilon)=\xi_0(t,\varepsilon)+\Big[\int_{-\infty}^{t}X(\varepsilon t)PX^{-1}(\varepsilon s)$$

$$-\int_{t}^{+\infty}X(\varepsilon t)(I_n-P)X^{-1}(\varepsilon s)\Big]\varepsilon f_8(s,\varepsilon s,\xi(s,\varepsilon),\varepsilon)ds. \quad (62)$$

因此由上式易见$\xi(t,\varepsilon)$是方程（49）在$0<\varepsilon\leqslant\delta_3$时的概自守解且满足

$$\sup_{t\in R}\{\|\xi(t,\varepsilon)\|\}\leqslant\frac{3K\cdot\theta(\varepsilon)\cdot\delta(\varepsilon)}{\alpha}.$$

从而当$\varepsilon\to 0$时，（此时$\delta(\varepsilon)\to 0$）有$\xi(t,\ \varepsilon)\to 0$对$t\in R$一致地成立。

最后证明$\xi(t,\ \varepsilon)$就是方程(49)在$0<\varepsilon\leqslant\delta_3$时的唯一满足$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|\xi(t,\ \varepsilon)\|=0$的概自守解。若不然，假设当$0<\varepsilon\leqslant\delta_3$时还有另一个概自守解$\xi^*(t,\ \varepsilon)$满足式(49)及$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|\xi^*(t,\ \varepsilon)\|=0$但$\xi(t,\ \varepsilon)\neq\xi^*(t,\ \varepsilon)$，则易证$\xi^*(t,\ \varepsilon)$也可表为式（62）的形式，而由式（62）可得$\|\xi^*(t,\varepsilon)-\xi(t,\ \varepsilon)\|\leqslant 1/2\|\xi^*(t,\ \varepsilon)-\xi(t,\ \varepsilon)\|$，从而矛盾。所以唯一性成立。

因此综上述可知：当$0<\varepsilon\leqslant\delta_3$时，方程（1）有唯一概自守解

$$x(t,\ \varepsilon)=x_0(\varepsilon t)+\xi(t,\ \varepsilon)-\varepsilon\omega(x_0(\varepsilon t)+\xi(t,\ \varepsilon),\ t,\ \varepsilon t,\ \varepsilon)$$

满足$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|x(t,\ \varepsilon)-x_0(\varepsilon t)\|=0$对$t\in R$一致成立。证毕。

3.2　定理2的证明

首先对方程（2）施行如下变换：$x=u(t,\ \varepsilon t)+y$，则有

$$\frac{dx}{dt}=\left[\frac{\partial u(t,\ \tau)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial u(t,\ \tau)}{\partial\tau}\right]_{\tau=\varepsilon t}+\frac{dy}{dt},$$

从而方程（2）可化为

$$dy/dt=C(t,\varepsilon)y+\varepsilon g_2(t,\varepsilon t,\varepsilon)+g_3(t,\varepsilon t,y)+\varepsilon g_4(t,\varepsilon t,y,\varepsilon), \quad (63)$$

这里$C(t,\ \varepsilon)$由条件（4）给定，

$$g_2(t,\varepsilon t,\varepsilon)=-\frac{\partial u(t,\tau)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=\varepsilon t}+g_1(t,\varepsilon t,u(t,\varepsilon t),\varepsilon),$$

$$g_3(t,\varepsilon t,y)=g(t,\varepsilon t,u(t,\varepsilon t)+y)-g(t,\varepsilon t,u(t,\varepsilon t))-C(t,\varepsilon)y,$$

$$g_4(t,\varepsilon t,y,\varepsilon)=g_1(t,\varepsilon t,u(t,\varepsilon t)+y,\varepsilon)-g_1(t,\varepsilon t,u(t,\varepsilon t),\varepsilon),$$

且当$\varepsilon>0$固定时，方程（63）右边所有函数都是关于t对$y\in D$(D为R^n中任一紧集)为一致地概自守函数，而关于y连续可微；此外$g_3(t,\ \varepsilon t,\ 0)=0$，$\partial g_3(t,\ \varepsilon t,\ 0)/\partial y=0$，且当$\varepsilon\to 0$时$\varepsilon g_2\to 0$、$\varepsilon g_4\to 0$对$(t,\ x)\in R\times D$是一致成立的。因此只要重复定理1证明中式（48）以后的证明就可知此定理的结论成立(详证略)。证毕。

参考文献

[1] Lin Faxing. The Existence of Almost-Automorphic Solution of Almost-Automorphic Systems, *Ann. of Diff. Eqs.*, 3, 3(1987), 329—349.

[2] Mitropolskiy, Yu.A., *Problems of the Asymptotic Theory of Nonstationary Vibrations*, New York, Daniel Davey & Co., (1965).

[3] Sethna, P.R., An Extension of the Method of Averaging, *Q. App. Math.*, *XXV*, (1967), 205—211.

[4] Roseau. M., Sur une Classe de Systèmes Dynamiques Soumis à des Excitations Pèriodiques de Longue. Période, *C.R.Acad.*, Sc.Paris, 258, (1969), 409—412.

[5] Balachandra, M.and Sethna, P.R., A Generalization of the Method of Averaging for Systems with Two Time Scales, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 58, 3 (1975), 261—283.

[6] Veech, W.A., Almost Automorphic Functions on Groups, *Amer. J of Math.*, 87, (1965), 719—751.

[7] 王全义，许宝芬，一致概自守函数及其性质，华侨大学学报(自然科学报)，12，2(1991)。

On Almost-Automorphic Differential Equations

Wang Quanyi

(Department of Management Information Science)

Abstract This paper centers on the existence of an almost-automorphic solution of some almost-automorphic differential systems with "fast" time t and "slow" time εt. Under certain condition, these systems are proved by fixed point method and mean value method to have almost-automorphic solution. In the results obtained, theorem 2 extends theorem3.2 in literature[1].

Key words differential equation, fixed point method, existence, almost-automorphic solution, mean value method