

# 解色散方程的一类新的无条件稳定的半显格式

曾文平

(管理信息科学系)

**摘要** 本文建立了解色散方程的一类新的三层的半显式差分格式 $A_4$ 。格式 $A_4$ 在很多方面类似于格式 $A_3$ <sup>[1]</sup>。它们都是无条件稳定的,且都可以显式地进行计算。这两类格式也都可以看作 Du-Fort Frankel 差分格式对色散方程的推广。

**关键词** 半显式差分格式, 无条件稳定, 色散方程

## 0 引言

在文[1]—[7]中讨论了色散方程 $u_t = au_{xx}$  ( $a$  为常数,可正可负)的差分解法。但是,显式格式的稳定性条件较苛刻,而隐式格式虽然绝对稳定且具有高精度<sup>[8, 9]</sup>,但每前进一步需要解一个具有五对角线的线性方程组,计算量较大。

针对显式格式与隐式格式存在的问题,作者曾经在文[6]中提出过一类三层绝对稳定的半显式格式 $A_3$ ,本文提出另一类新的三层绝对稳定的半显式格式 $A_4$ ,其截断误差也是 $O(\tau + h^2 + \tau^2/h^3)$ ,此格式也只用到中间层的四个网格点,但与格式 $A_3$ 不同,需要计算的那一层的网格点不是牵涉到两个相邻的网格点,而是牵涉到相隔一个节点的两个网格点,该格式 $A_4^R$  (或 $A_4^L$ )可以先从左向右 (或从右向左)显式地计算偶数节点上的网格函数值,然后显式地计算奇数节点上的网格函数值,从而既消除了稳定性条件限制,又避免了解线性方程组,大大减少了计算工作量。文末并附有数值例子。

为了研究差分方程的稳定性,先介绍如下的Miller准则<sup>[8]</sup>,

当 $|A| = |C|$ 时,复系数二次方程

$$AZ^2 + BZ + C = 0, \quad A \neq 0$$

具有模为1的不等复根,其充要条件为 $\bar{A}B = \bar{B}C$ ,且 $|B| < 2|A|$ 。

## 1 差分格式的构造

设网域由求解区域上的点集 $(x_m, t_n)$ 构成 ( $m, n$ 为整数),在节点 $(x_m, t_n)$ 处用 $u_m^n$

本文1990-02-12收到。

表示微分方程的解, 用  $\bar{U}_m^n$  表示差分方程的解.

对于下列数值微分公式

$$(u_t)_m^n = (1/2) \{ (u_t)_{m-1}^n + (u_t)_{m+1}^n \} + o(h^2), \quad (1)$$

$$(u_t)_{m-1}^n = (1/\tau) \{ u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^{n-1} \} + o(\tau), \quad (2)$$

$$(u_t)_{m+1}^n = (1/\tau) \{ u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^{n-1} \} + o(\tau), \quad (3)$$

$$(u_{xxx})_m^n = (1/2h^3) \{ u_{m+2}^n - 2u_{m+1}^n + 2u_{m-1}^n - u_{m-2}^n \} + o(h^2), \quad (4)$$

$$u_{m-1}^{n+1} = (u_{m+1}^{n+1} + u_{m-1}^{n-1})/2 + o(\tau^2), \quad (5)$$

$$u_{m-1}^{n-1} = (u_{m+1}^{n-1} + u_{m-1}^{n+1})/2 + o(\tau^2) \quad (6)$$

代入方程  $(u_t)_m^n = a(u_{xxx})_m^n$  并舍去余项  $o(\tau + h^2 + \tau^2/h^3)$ , 使得本文的第一个差分格式  $A_4^R$  为

$$\begin{aligned} & (\bar{U}_{m+1}^{n+1} - \bar{U}_{m+1}^n + \bar{U}_{m-1}^n - \bar{U}_{m-1}^{n-1})/2\tau \\ & = (a/2h^3) \{ \bar{U}_{m+2}^n - (\bar{U}_{m+1}^{n+1} + \bar{U}_{m+1}^{n-1}) + (\bar{U}_{m-1}^{n+1} + \bar{U}_{m-1}^{n-1}) - \bar{U}_{m-2}^n \}, \quad (a > 0), \end{aligned} \quad (7)$$

或 (令  $R = a\tau/h^3$ ),

$$\begin{aligned} \bar{U}_{m+1}^{n+1} &= \frac{1}{1+R} \{ R\bar{U}_{m-1}^{n+1} + (\bar{U}_{m+1}^n - \bar{U}_{m-1}^n) + R(\bar{U}_{m+2}^n - \bar{U}_{m-2}^n) \\ &\quad - R\bar{U}_{m+1}^{n-1} + (1+R)\bar{U}_{m-1}^{n-1} \}, \quad (a > 0). \end{aligned} \quad (8)$$

如果在导出差分方程  $A_4^R$  的过程中, 将公式 (2)、(3) 换成

$$(u_t)_{m-1}^n = (1/\tau) \{ u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^{n-1} \} + o(\tau), \quad (9)$$

$$(u_t)_{m+1}^n = (1/\tau) \{ u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^{n-1} \} + o(\tau), \quad (10)$$

便得到本文的第二个差分格式  $A_4^L$  为

$$\begin{aligned} & (\bar{U}_{m+1}^{n+1} - \bar{U}_{m-1}^n + \bar{U}_{m+1}^n - \bar{U}_{m+1}^{n-1})/2\tau \\ & = (a/2h^3) \{ \bar{U}_{m+2}^n - (\bar{U}_{m+1}^{n+1} + \bar{U}_{m+1}^{n-1}) + (\bar{U}_{m-1}^{n+1} + \bar{U}_{m-1}^{n-1}) - \bar{U}_{m-2}^n \}, \quad (a < 0), \end{aligned} \quad (11)$$

或

$$\begin{aligned} \bar{U}_{m+1}^{n+1} &= [1/(1-R)] \{ -R\bar{U}_{m-1}^{n+1} + (\bar{U}_{m-1}^n - \bar{U}_{m+1}^n) + R(\bar{U}_{m+2}^n - \bar{U}_{m-2}^n) \\ &\quad + R\bar{U}_{m-1}^{n-1} + (1-R)\bar{U}_{m+1}^{n-1} \}, \quad (a < 0), \end{aligned} \quad (12)$$

$A_4$  类差分格式也可看作是在显式差分格式

$$\begin{aligned} & (1/2\tau)(\bar{U}_{m+1}^{n+1} - \bar{U}_{m+1}^n + \bar{U}_{m-1}^n - \bar{U}_{m-1}^{n-1}) \\ & = (a/2h^3)(\bar{U}_{m+2}^n - 2\bar{U}_{m+1}^n + 2\bar{U}_{m-1}^n - \bar{U}_{m-2}^n), \quad (a > 0), \end{aligned} \quad (13)$$

及

$$\begin{aligned} & (1/2\tau)(\bar{U}_{m+1}^{n+1} - \bar{U}_{m-1}^n + \bar{U}_{m+1}^n - \bar{U}_{m+1}^{n-1}) \\ & = (1/2h^3)(\bar{U}_{m+2}^n - 2\bar{U}_{m+1}^n + 2\bar{U}_{m-1}^n - \bar{U}_{m-2}^n), \quad (a < 0), \end{aligned} \quad (14)$$

(不难验证格式 (13) 与 (14) 的截断误差为  $O(\tau + h^2)$ , 稳定性条件为  $|R| \leq 0.7016^{[8]}$ ). 右端项中,  $\bar{U}_{m-1}^n$  及  $\bar{U}_{m+1}^n$  分别用第  $(n+1)$  层及第  $(n-1)$  层网格函数的平均值代替而得到, 相当于在格式 (13) 及 (14) 中分别加上稳定项

$$-(a/h^3) \{ \delta_t^2 \bar{U}_{m+1}^n - \delta_t^2 \bar{U}_{m-1}^n \}, \quad (15)$$

(其中  $\delta_t^2$  为关于  $t$  的二阶中心差分), 从而大大改进了格式的稳定性.  $A_4$  类格式也可以看作是抛物型方程  $U_t = U_{xxx}$  的 Du-Fort Frankel 格式在色散方程  $U_t = aU_{xxx}$  中的推广.

## 2 稳定性分析

用分离变量法分析差分格式 $A_4^R$ 的稳定性. 令

$$\bar{U}_m^n = \lambda^n e^{im^a}, \quad |a| < \pi, \quad (16)$$

代入 $A_4^R$ 格式, 得到特征方程

$$\begin{aligned} & \{ \cos a + i(1+2R)\sin a \} \lambda^2 - 2i\sin a(1+2R\cos a)\lambda \\ & - \{ \cos a - i(1+2R)\sin a \} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

此时

$$A = \cos a + i(1+2R)\sin a, \quad (18)$$

$$B = -2i(1+2R\cos a)\sin a, \quad (19)$$

$$C = -\{ \cos a - i(1+2R)\sin a \} = -\bar{A}, \quad (20)$$

显然,  $|A| = |C|$ ,  $|\bar{A}B - \bar{B}C| \equiv |\bar{A}(B + \bar{B})| \equiv 0$ , 故由Miller准则知, 其稳定的充要条件为  $|B| < 2|A|$ , 即

$$|(1+2R\cos a)\sin a| < |\cos a + i(1+2R)\sin a|, \quad (21)$$

亦即

$$\cos^2 a + 4R(1 - \cos a)\sin^2 a + 4R^2\sin^4 a > 0, \quad (22)$$

显然, 它对任意 $R > 0$ 均成立. 所以,  $A_4^R$ 格式对任意 $a > 0$ 均绝对稳定.

同理可证,  $A_4^L$ 格式对任意 $a < 0$ 亦绝对稳定.

## 3 数值例子

考虑下列初边值问题, 试举二例, 即

$$u_t = au_{xxx}, \quad (0 < x < 1, t > 0), \quad (a > 0), \quad (23)$$

$$u(0, t) = \sin at, \quad u_x(0, t) = -\cos at, \quad (t > 0), \quad (24)$$

$$u(1, t) = \sin(at - 1), \quad (t > 0), \quad (25)$$

$$u(x, 0) = -\sin x, \quad (0 \leq x \leq 1, t > 0), \quad (26)$$

及

$$u_t = au_{xxx}, \quad (0 < x < 1, t > 0) \quad (a < 0), \quad (27)$$

$$u(0, t) = \sin at, \quad (t > 0), \quad (28)$$

$$u(1, t) = \sin(at - 1), \quad u_x(1, t) = -\cos(at - 1), \quad (t > 0), \quad (29)$$

$$u(x, 0) = -\sin x, \quad (0 \leq x \leq 1, t > 0), \quad (30)$$

它们的准确解都是

$$u(x, t) = \sin(at - x). \quad (31)$$

由于格式 $A_4$ 是三层的半显式格式, 所以在应用该格式之前, 除了初始层的网格函数值 $\bar{U}_m^0$ 已知外, 还必须先借助其它方法计算第一层网格函数值 $\bar{U}_m^1$ . 这里用下述方法计算 $\bar{U}_m^1$ , 即假定当 $t = 0$  (即 $n = 0$ )时, 色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的下列显式格式成立:

$$(\bar{U}_{n+1}^* - \bar{U}_{n-1}^*)/2\tau = (a/2h^3)(\bar{U}_{n+2}^* - 2\bar{U}_{n+1}^* + 2\bar{U}_{n-1}^* - \bar{U}_{n-2}^*), \quad (32)$$

不难验证, 其截断误差为 $O(\tau^2 + h^2)$ , 稳定性条件为 $|R| \leq 0.3849^{[2]}$ , 从而可以得到

$$\bar{U}_n^* = \bar{U}_{1n}^* - R(\bar{U}_{n+2}^* - 2\bar{U}_{n+1}^* + 2\bar{U}_{n-1}^* - \bar{U}_{n-2}^*), \quad (33)$$

再将式(33)代入格式 $A_4^R$ (当 $n=0$ 时), 得

$$\begin{aligned} \bar{U}_n^* = & \left\{ \left(1 + \frac{R}{1+R}\right) \bar{U}_{n-2}^* + \frac{1}{1+R} [\bar{U}_{0n}^* - \bar{U}_{n-2}^* + R(\bar{U}_{n-1}^* - \bar{U}_{n-3}^*) \right. \\ & + R^2(\bar{U}_{n-2}^* - 2\bar{U}_{n-1}^* + 2\bar{U}_{n-1}^* - \bar{U}_{n-2}^*) \\ & \left. - R(1+R)(\bar{U}_{0n}^* - 2\bar{U}_{n-1}^* + 2\bar{U}_{n-3}^* - \bar{U}_{n-4}^*)] \right\} / \left(1 + \frac{R}{1+R}\right), \end{aligned} \quad (34)$$

且边界条件计算如下

$$\bar{U}_{-1}^* = \bar{U}(0, n\tau) - h \frac{\partial \bar{U}(0, n\tau)}{\partial x}, \quad (35)$$

$$\bar{U}_{0n}^* = \bar{U}(0, n\tau), \quad \bar{U}_{1n}^* = \bar{U}(0, n\tau) + h \frac{\partial \bar{U}(0, n\tau)}{\partial x}, \quad (36)$$

$$\bar{U}_M^* = \bar{U}(1, n\tau), \quad (37)$$

及利用初始条件式(26)。

由于差分格式 $A_4$ 的形象化图形为  $\cdots \circ \cdots \circ \cdots$ , 当第 $(n-1)$ 层及第 $n$ 层的网格函数值及第 $(n+1)$ 层的边界值已被算出时, 格式 $A_4^R$ (或 $A_4^L$ )可先从左往右(或从右往左)显式地计算第 $(n+1)$ 层上偶数节点的网格函数值, 然后显式地计算第 $(n+1)$ 层上奇数节点的网格函数值。

定义误差 $E_n^* = u_n^* - \bar{U}_n^*$ , 其中 $u_n^* = u(x_m, t_n)$ 表示用式(31)算出的准确解, 而 $\bar{U}_n^*$ 表示用格式 $A_4^R$ (或 $A_4^L$ )算出的差分解, 其中记 $x_m = mh$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, 100$ 。下面是误差 $E_n^*$ 的部分数值表。

表1 当 $a = \pm 1$ ,  $h = 0.02$ ,  $|R| = 5$ 时, 格式 $A_4$ 的计算结果

R	$x$	N		
		10	40	200
5	$\frac{20}{100}$	$4.827976 E-5$	$1.640618 E-5$	$1.624227 E-5$
	$\frac{86}{100}$	$8.404255 E-6$	$3.403425 E-5$	$2.133846 E-5$
-5	$\frac{20}{100}$	$-8.852780 E-5$	$-6.143749 E-5$	$-8.450449 E-5$
	$\frac{10}{100}$	$1.427755 E-4$	$9.964406 E-5$	$3.394485 E-5$

承蒙蔡新同志帮助上机计算, 谨致谢意。

## 参 考 文 献

- [1] Sgreig, I., Morris, J. L. L., *Journal of Computational physics*, 20 (1976), 64—80.
- [2] 秦孟兆, 色散方程  $u_t = au_{xxx}$  的差分格式, 计算数学, 6 (1984), 1—13.
- [3] 黎益、李兆杰, 逼近色散方程  $u_t = au_{xxx}$  的高精度差分格式, 四川大学学报, 4 (1985), 12—21.
- [4] 黎益、李兆杰, 关于色散方程  $u_t = au_{xxx}$  的两个显式差分格式, 计算数学, 8 (1986), 275—280.
- [5] 曾文平, 解色散方程  $u_t = au_{xxx}$  的一族绝对稳定的高精度差分格式, 计算数学, 9 (1987), 403—410.
- [6] 曾文平, 关于色散方程  $u_t = au_{xxx}$  的一类绝对稳定的半显式格式, 计算数学, 10 (1988), 248—252.
- [7] 黎益, 关于色散方程  $u_t = au_{xxx}$  的三层显式差分格式, 四川大学学报(自然科学版), 25, 3 (1988), 298—306.
- [8] Miller, J. J. H., On the Location of zeros of certain classes of polynomials with application to numerical analysis, *J. Inst. Math. Appls.*, 8 (1971), 397—406.
- [9] Richtmyer, R. D., Morton, K. W., *Difference Methods for Initial-Value Problems*, 2nd, edit, Wiley, New York, (1967).

## A New Class of Unconditionally Stable and Semi-Explicit Schemes for Solving the Dispersive Equation

Zeng Wenping

( *Department of Management Information Science* )

**Abstract** A new class of three-level semi-explicit difference schemes  $A_4$  are developed in this paper for solving the dispersive equation. Scheme  $A_4$  is similar to scheme  $A_3^{(6)}$  in many ways. They are both unconditionally stable and explicitly calculated. And both of them can be taken as the generalization of Du-Fort Frankel difference scheme to the dispersive equation.

**Key words** semi-explicit difference scheme, unconditional stability, dispersive equation