

恒定应力加速寿命试验下产品生存率的 Bayes 估计

吴 绍 敏

(管理信息统计学系)

摘要 本文介绍在恒定应力加速寿命试验下, 产品生存率的 Bayes 估计. 应用该方法, 至少可以摆脱下述的二个假设^[1]: (1) 在任一应力水平上产品的寿命分布都是相同或近似相同类型的; (2) 产品失效分布的参数和使用的应力之间有已知函数关系. 而第二个假设不尽合理, 叫人难以接受, 即使假定是合理的, 却需要大样本来估计这种关系中的参数. 本文的方法摆脱这个假设, 可适用于小样本的情形, 最后给出一个例子.

关键词 恒定应力, 加速寿命试验, 产品生存率, Bayes 估计

0 引言

恒定应力加速寿命试验是产品可靠性评定常用且重要的测试模型, 但其受上述至少二个条件所约束, 本文应用 Bayes 分析技术可摆脱这种约束, 仅利用各个应力水平上测试的数据并结合以前累积的主观信息, 就可对产品的生存率作出评定.

设 S_m 为正常应力水平, $S_i (i = \overline{1, m-1})$ 为比 S_m 更高的应力水平且有 $S_1 > S_2 > \dots > S_{m-1} > S_m$. 产品寿命 X 服从分布 $F(t)$, t_0 为任务时间 (或参考时间), $p = p(X > t_0) = 1 - F(t)$ 为产品在时刻 t_0 的生存率或可靠度. 为估计在正常应力水平上产品的生存率, 对应力水平 $S_i (i = \overline{1, m})$ 采用 $(n_i, \text{无, 时})$ 截尾测试模型, 截尾时间为 t_0 , 测试结果如表 1.

表1 应力试验下的测试结果

应力水平	生存数	失效数
S_1	r_1	$n_1 - r_1$
S_2	r_2	$n_2 - r_2$
\vdots	\vdots	\vdots
S_m	r_m	$n_m - r_m$

假定: (1) 在各个应力水平上投试的产品是相同类型; (2) 在各个应力水平上测试的结果相互独立; (3) 各个应力水平上的失效机理不变. 由于测试应力水平不同, 故在各个应力水平上产生的生存率也应不同. 记 p_i 为应力水平 $S_i (i = \overline{1, m})$ 上产品的生存率, 则有

$$P_1 < P_2 < \dots < P_{m-1} < P_m, \quad (1)$$

在应力水平 $S_i (i = \overline{1, m})$ 上的似然函数为

本文1989-01-03收到.

$$L(p_i, r_i) \propto p_i^{r_i} (1 - p_i)^{n_i - r_i}, \quad (2)$$

记 $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, 则其联合似然函数为

$$L(p, r) \propto \prod_{i=1}^m p_i^{r_i} (1 - p_i)^{n_i - r_i}. \quad (3)$$

若视 p_i 为 r, v , 其分布为 $\Pi(p_i)$, 且假定 $\Pi(p_i)$ 的函数类型相同, 只是所含的未知参数不同.

由式 (1) 知 (p_1, p_2, \dots, p_m) 是顺序统计量, 其联合密度

$$\Pi(p_1 p_2 \dots p_m) = \begin{cases} C \prod_{i=1}^m \Pi(p_i), & \text{当 } 0 < p_1 < p_2 < \dots < p_m < 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

其中 C 是常数. 故可得 p 的验后密度为

$$g(p|r) = \frac{\prod_{i=1}^m p_i^{r_i} (1 - p_i)^{n_i - r_i} \Pi(p_i)}{\int_{D_m} \prod_{i=1}^m p_i^{r_i} (1 - p_i)^{n_i - r_i} \Pi(p_i) dp}, \quad (4)$$

其中 $D_m = \{p: 0 < p_1 < p_2 < \dots < p_m < 1\}$.

本文的目的是要利用各个应力水平测试的数据, 结合验前的主观信息 (以前的经验积累) 应用 Bayes 分析技术, 对正常应力水平 S_m 上产品生存率作出评定. Bayes 方法的困难在于验前分布的选择, 虽然可凭以往的经验来选择参数 p 的验前分布, 但多少带有主观片面性, 因此, 验前分布选择的恰当与否, 直接影响分析的效果, 为了尽量减少主观片面性所带来的影响, 可选择带有未知参数的验前分布, 尔后, 利用测试所获的数据对未知参数进行估计, 并尽可能多地考虑验前分布的类型以供选择比较.

1 P_m 的估计

下面分别讨论选取不同验前分布, 对 p_m 作出评定.

1.1 Beta 验前分布

1) 定理 1 设 p_i 具有 Beta 验前分布

$$\Pi(p_i | a_i, b_i) = \frac{1}{B(a_i, b_i)} p_i^{a_i-1} (1 - p_i)^{b_i-1},$$

a_i, b_i 为正整数, $0 < p_i < 1$, ($i = 1, m$), 则

$$g(p_m | r) = w_m^{-1} \sum_{h_1=0}^{r_1} \sum_{h_2=0}^{r_2} \dots \sum_{h_{m-1}=0}^{r_{m-1}} w(h_1, h_2, \dots, h_{m-1}) B(p_m | u_m + h_{m-1}, g_{m-1} + v_m - h_{m-1}). \quad (5)$$

在二次损失下

$$\hat{p}_m = w_m^{-1} \sum_{h_1=0}^{r_1} \sum_{h_2=0}^{r_2} \dots \sum_{h_{m-1}=0}^{r_{m-1}} w(h_1, h_2, \dots, h_{m-1}) \left(\frac{u_m + h_{m-1}}{g_{m-1} + u_m + v_m} \right). \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 u_i &= r_i + a_i, & v_i &= n_i - r_i + b_i, & g_1 &= u_1 + v_1 - 1, \\
 g_i &= u_i + v_i + g_{i-1} - 1, \quad (i = 2, m), & C_{h_i} &= \binom{g_i}{h_i} B(u_{i+1} + h_i, g_i + v_{i+1} - h_i), \\
 w(h_1, h_2, \dots, h_{m-1}) &= \prod_{i=1}^{m-1} C_{h_i}, \\
 w_m &= \sum_{h_1=u_1}^{g_1} \sum_{h_2=u_2+h_1}^{g_2} \dots \sum_{h_{m-1}=u_{m-1}+h_{m-2}}^{g_{m-1}} w(h_1, h_2, \dots, h_{m-1})
 \end{aligned} \tag{7}$$

证明 先证 $m=3$ 时成立, 由式 (4) 得

$$\begin{aligned}
 g(p_3|r) &= w_3^{-1} \{ p_3^{u_3-1} (1-p_3)^{v_3-1} \int_0^{p_3} p_2^{u_2-1} (1-p_2)^{v_2-1} dp_2 \\
 &\quad \int_0^{p_2} p_1^{u_1-1} (1-p_1)^{v_1-1} dp_1 \},
 \end{aligned} \tag{8}$$

利用恒等式

$$\int_0^x x^{u-1} (1-x)^{v-1} dx = B(u, v) \sum_{j=u}^{u+v-1} \binom{u+v-1}{j} y^j (1-y)^{u+v-1-j}, \tag{9}$$

式 (8) 分子中的

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{p_2} p_1^{u_1-1} (1-p_1)^{v_1-1} dp_1 = B(u_1, v_1) \sum_{h_1=u_1}^{u_1+v_1-1} \binom{u_1+v_1-1}{h_1} p_2^{h_1} (1-p_2)^{u_1+v_1-h_1-1}, \\
 I_2 &= \int_0^{p_3} p_2^{u_2-1} (1-p_2)^{v_2-1} I_1 dp_2 = B(u_1, v_1) \sum_{h_1=u_1}^{g_1} \binom{g_1}{h_1} \int_0^{p_3} p_2^{h_1+u_2-1} (1-p_2)^{v_2+g_1-1-h_1} dp_2 \\
 &= B(u_1, v_1) \sum_{h_1=u_1}^{g_1} \binom{g_1}{h_1} B(u_2+h_1, v_2+g_1-h_1) \sum_{h_2=u_2+h_1}^{g_2} \binom{g_2}{h_2} p_3^{h_2} (1-p_3)^{g_2-h_2-1},
 \end{aligned}$$

所以式 (8) 的

$$\begin{aligned}
 \text{分子} &= B(u_1, v_1) \sum_{h_1=u_1}^{g_1} \binom{g_1}{h_1} B(u_2+h_1, v_2+g_1-h_1) \sum_{h_2=u_2+h_1}^{g_2} \binom{g_2}{h_2} p_3^{h_2+u_3-1} (1-p_3)^{v_3+g_2-1-h_2} \\
 &= B(u_1, v_1) \sum_{h_1=u_1}^{g_1} \binom{g_1}{h_1} B(u_2+h_1, u_2+g_1-h_1) \sum_{h_2=u_2+h_1}^{g_2} \binom{g_2}{h_2} B(u_3+h_3, \\
 &\quad v_3+g_2-h_2) B(p_3|u_3+h_2, g_2+v_3-h_2) \\
 &= B(u_1, v_1) \sum_{h_1=u_1}^{g_1} \sum_{h_2=u_2+h_1}^{g_2} w(h_1, h_2) B(p_3|u_3+h_2, g_2+v_3-h_2),
 \end{aligned}$$

对式 (8) 两边从 0 到 1 积分得

$$W_3' = B(u_1, v_1) \sum_{h_1=u_1}^{g_1} \sum_{h_2=u_2+h_1}^{g_2} W(h_1, h_2) = W_3 B(u_1, v_1),$$

所以

$$g(p_3|r) = W_3^{-1} \sum_{h_1=u_1}^{g_1} \sum_{h_2=u_2+h_1}^{g_2} W(h_1, h_2) B(p_3|u_3+h_2, g_2+v_3-h_2),$$

再由公式

$$\hat{p}_3 = E(p_3|r) = \int_0^1 p_3 g(p_3|r) dp_3 = W_3^{-1} \sum_{h_1=1}^{g_1} \sum_{h_2=1}^{g_2} W(h_1, h_2) \left(\frac{u_3 + h_2}{g_2 + u_3 + v_3} \right).$$

重复应用恒等式(9)及归纳法,即可完成定理的证明.

2) 验前 $U(0,1)$ 分布

在未获得验前信息时,往往认为 p 是在区间 $(0,1)$ 上均匀分布的,故取 $U(0,1)$ 验前分布,其对应的结论恰好是定理1中当 $a_i=1, b_i=1(i=1, \bar{m})$ 时的特殊情况,此时, \hat{p}_m 表达式中不含未知参数.计算较为简单.

3) Beta 验前分布中未知参数 a_i 与 b_i 的估计

选取 $U(0,1)$ 验前分布,可简化计算,但未免主观些,因 p 不一定是均匀分布的.如果选取Beta分布为验前分布,其中含有两个未知参数可以调整,然后利用测试的客观数据将其估计出来,会客观一些.

因在应力水平 $S_i(i=1, \bar{m})$ 上测试的似然函数为

$$L(p, r) \propto p^r (1-p)^{n-r}, \quad (\text{为简单计略去 } i),$$

那么 r 的边际分布为

$$g(r, a, b) \propto \int_0^1 L(p, r) \pi(p) dp \propto \int_0^1 p^{a+r-1} (1-p)^{(n+b-r)-1} dp = B(a+r, n+b-r)$$

即 $g(r, a, b) = CB(a+r, n+b-r)$, 由条件 $\sum_{r=0}^n g(r, a, b) = 1$, 可确定 $C = 1 / \sum_{r=0}^n B(a+r, n+b-r)$,

所以

$$g(r, a, b) = B(a+r, n+b-r) / \sum_{r=0}^n B(a+r, n+b-r)$$

利用极大似然法求 a, b 的估计值, 只需当前测试的数据, 但因 a, b 是正整数, 所以遇到非线性的整数规划问题, 难以解决, 只好应用矩法估计. 这就需要比较多的历史数据了.

如果对水平 $S_i(i=1, \bar{m})$ 曾经作过 N 次测试, 得数据 r_1, r_2, \dots, r_N 则由矩法估计得

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \approx Er = \sum_{r=0}^n r B(a+r, n+b-r) / \sum_{r=0}^n B(a+r, n+b-r) \right. \quad (10)$$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i^2 \approx Er^2 = \sum_{r=0}^n r^2 B(a+r, n+b-r) / \sum_{r=0}^n B(a+r, n+b-r) \right. \quad (11)$$

利用计算机, 对每个 $a=2, 3, \dots$, 求出 $b(=2, 3, \dots)$ 使其近似满足(10)与(11), 这样算得的 \hat{a}, \hat{b} 作为 a, b 的一对估计值. 当 n 不是很大时是可以实现的(已编程序作过计算).

1.2 负对数Gamma验前分布

p 也可能服从负对数Gamma分布, 故应加以考虑.

1) 定理2 设 $\Pi(p_i | \alpha_i, \beta_i) = \frac{\beta_i^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} (-\ln p_i)^{\alpha_i-1} p_i \beta_i^{-1}, \beta_i > 0, \alpha_i$ 为正整数, $0 < p_i < 1$

($i=1, \bar{m}$), 则 p_m 的验后分布密度为

$$g(p_m | \gamma) = W_m^{-1} \left\{ \sum_{k_1=0}^{v_1} \sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1} \dots \sum_{k_{m-1}=0}^{v_{m-1}} \sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha_{m-1}-1} W(k_1 j_1, \dots, k_{m-1} j_{m-1}) \right. \\ \left. \sum_{k_m=0}^{v_m} \binom{v_m}{k_m} (-1)^{k_m} g_m^{-\alpha_m} \mathcal{L} \Gamma(p_m | \alpha_m, g_m) \right\}, \quad (12)$$

在二次损失下

$$\hat{p}_m = W_m^{-1} \left\{ \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \cdots \sum_{k_{m-1}=0}^{r_{m-1}} \sum_{j_{m-1}=0}^{a_{m-1}-1} W(k_1 j_1, \dots, k_{m-1} j_{m-1}) \right. \\ \left. \sum_{k_m=0}^{r_m} \binom{v_m}{k_m} (-1)^{k_m} (g_{(m)} + 1)^{-a_{(m)}} \right\}, \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \beta_i + r_i, \quad v_i = n_i - r_i, \quad g_{(1)} = u_1 + k_1, \quad g_{(i)} = g_{(i-1)} + u_i + k_i \\ a_{(1)} &= a_1, \quad a_{(i)} = a_i + j_{i-1} (i = 2, \dots, m), \quad C_{k_i j_i} = \binom{v_i}{k_i} (-1)^{k_i} g_{(i)}^{j_i - a_{(i)}} \frac{\Gamma(a_{(i+1)})}{\Gamma(j_i + 1)}, \\ W(k_1 j_1, \dots, k_{m-1} j_{m-1}) &= \prod_{i=1}^{m-1} C_{k_i j_i}, \\ W_m &= \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \cdots \sum_{k_{m-1}=0}^{r_{m-1}} \sum_{j_{m-1}=0}^{a_{m-1}-1} W(k_1 j_1, \dots, k_{m-1} j_{m-1}) \sum_{k_m=0}^{r_m} \binom{v_m}{k_m} \\ &\quad (-1)^{k_m} g_{(m)}^{-a_{(m)}}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

证明 先证 $m=3$ 时成立, 由式 (4) 得

$$g(p_3 | r) = \frac{1}{W_3} \left\{ (-\ln p_3)^{a_3-1} p_3^{r_3-1} (1-p_3)^{v_3} \int_0^{p_3} (-\ln p_2)^{a_2-1} p_2^{r_2-1} (1-p_2)^{v_2} dp_2 \right. \\ \left. \int_0^{p_2} (-\ln p_1)^{a_1-1} p_1^{r_1-1} (1-p_1)^{v_1} dp_1 \right\}, \quad (15)$$

因式 (15) 分子中的

$$\begin{aligned} I_1 &\triangleq \int_0^{p_2} (-\ln p_1)^{a_1-1} p_1^{r_1-1} (1-p_1)^{v_1} dp_1 = \int_0^{p_2} (-\ln p_1)^{a_1-1} t_1^{r_1-1} \sum_{k_1=0}^{r_1} \binom{v_1}{k_1} (-1)^{k_1} p_1^{k_1} dp_1 \\ &= \sum_{k_1=0}^{r_1} \binom{v_1}{k_1} (-1)^{k_1} \int_0^{p_2} (-\ln p_1)^{a_1-1} p_1^{r_1+k_1-1} dp_1 \\ &= \sum_{k_1=0}^{r_1} \binom{v_1}{k_1} (-1)^{k_1} g_1^{-a_1} \Gamma(a_1) \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \frac{g_1^{j_1}}{\Gamma(j_1+1)} (-\ln p_2)^{j_2} p_2^{r_2} \\ &= \Gamma(a_1) \sum_{k_1=0}^{r_1} \binom{v_1}{k_1} (-1)^{k_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \frac{g_1^{j_1-a_1}}{\Gamma(j_1+1)} (-\ln p_2)^{j_2} p_2^{r_2}, \\ I_2 &\triangleq \int_0^{p_3} (-\ln p_2)^{a_2-1} p_2^{r_2-1} (1-p_2)^{v_2} \cdot I_1 dp_2 \\ &= \Gamma(a_1) \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \binom{v_1}{k_1} (-1)^{k_1} g_1^{j_1-a_1} \frac{1}{\Gamma(j_1+1)} \int_0^{p_3} (-\ln p_2)^{a_2+j_1-1} p_2^{r_2+k_1+j_1-1} (1-p_2)^{v_2} dp_2 \\ &= \Gamma(a_1) \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \binom{v_1}{k_1} (-1)^{k_1} g_1^{j_1-a_1} \frac{1}{\Gamma(j_1+1)} \sum_{k_2=0}^{r_2} \binom{v_2}{k_2} (-1)^{k_2} \\ &\quad \int_0^{p_3} (-\ln p_2)^{a_{(2)}-1} p_2^{r_{(2)}+k_2-1} dp_2 \\ &= \Gamma(a_1) \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \binom{v_1}{k_1} (-1)^{k_1} g_1^{j_1-a_1} \frac{\Gamma(a_2)}{\Gamma(j_1+1)} \sum_{k_2=0}^{r_2} \sum_{j_2=0}^{a_2-1} \binom{v_2}{k_2} (-1)^{k_2} \end{aligned}$$

$$g_{(2)}^{j_2 - a_2} \frac{1}{\Gamma(j_2 + 1)} (-\ln p_3)^{j_2} p_3^{g_{(2)}},$$

所以式(15)的

$$\text{分子} = (-\ln p_3)^{a_3-1} p_3^{u_3-1} (1-p_3)^{v_3} I_2$$

$$\begin{aligned} &= \Gamma(\alpha_1) \sum_{k_1=0}^{v_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} C_{k_1 j_1} \sum_{k_2=0}^{v_2} \sum_{j_2=0}^{a_{(2)}-1} C_{k_2 j_2} \sum_{k_3=0}^{v_3} \binom{v_3}{k_3} (-1)^{k_3} g_{(3)}^{-a_{(3)}} \frac{g_{(3)}^{a_{(3)}}}{\Gamma(\alpha_{(3)})} \\ &\quad (-\ln p_3)^{a_{(3)}-1} p_3^{g_{(3)}-1} \\ &= \Gamma(\alpha_1) \sum_{k_1=0}^{v_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \sum_{k_2=0}^{v_2} \sum_{j_2=0}^{a_{(2)}-1} W(k_1 j_1, k_2 j_2) \sum_{k_3=0}^{v_3} \binom{v_3}{k_3} (-1)^{k_3} g_{(3)}^{-a_{(3)}} \mathcal{L} \Gamma(p_3 | \alpha_{(3)}, g_{(3)}), \end{aligned}$$

对式(15)两边从0到1积分得: $W_3' = \Gamma(\alpha_1) W_3$, 故有

$$g(p_3 | r) = W_3^{-1} \sum_{k_1=0}^{v_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \sum_{k_2=0}^{v_2} \sum_{j_2=0}^{a_{(2)}-1} W(k_1 j_1, k_2 j_2) \sum_{k_3=0}^{v_3} \binom{v_3}{k_3} (-1)^{k_3} \mathcal{L} \Gamma(p_3 | \alpha_{(3)}, g_{(3)}),$$

再由公式 $\hat{p}_3 = \int_0^1 p_3 g(p_3 | \alpha_{(3)}, g_{(3)}) dp_3$, 得

$$\hat{p}_3 = W_3^{-1} \sum_{k_1=0}^{v_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \sum_{k_2=0}^{v_2} \sum_{j_2=0}^{a_{(2)}-1} W(k_1 j_1, k_2 j_2) \sum_{k_3=0}^{v_3} \binom{v_3}{k_3} (-1)^{k_3} (g_{(3)} + 1)^{-a_{(3)}},$$

再重复应用恒等式:

$$\int_0^1 (-\ln p)^{a-1} p^{g-1} dp = g^{-a} \Gamma(a) \sum_{j=0}^{a-1} \frac{g^j}{\Gamma(j+1)} (-\ln x)^j x^g,$$

$$(1-x)^v = \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} (-1)^k x^k,$$

及归纳法, 即可完成定理的证明.

注意: 当 $\alpha_i = 0, \beta_i = 0$ 时定理不成立.

2) 验前分布中未知参数 α_i 与 β_i 的估计

为简单计略去下标 i , 取验前分布

$$\Pi(p) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (-\ln p)^{\alpha-1} p^{\beta-1}, \quad \beta > 0, \alpha \text{ 为正整数, 则 } r \text{ 的边际分布为}$$

$$g(r, \alpha, \beta) \propto \int_0^1 L(p, r) \pi(p) dp \propto \int_1^1 p^{r+\beta-1} (1-p)^{\alpha-r} (-\ln p)^{\alpha-1} dp,$$

即

$$\begin{aligned} g(r, \alpha, \beta) &= C \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-r}{k} (-1)^k \int_0^1 p^{r+\beta+k-1} (-\ln p)^{\alpha-1} dp \\ &= C \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-r}{k} (-1)^k \Gamma(\alpha) (\gamma + \beta + k)^{-\alpha}, \end{aligned}$$

由条件 $\sum_{r=0}^n g(r, \alpha, \beta) = 1$ 可以确定

$$C = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{r=0}^n \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-r}{k} (-1)^k (r + \beta + k)^{-\alpha},$$

所以

$$g(r, \alpha, \beta) = \frac{\sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-r}{k} (-1)^k (r + \beta + k)^{-\alpha}}{\sum_{r=0}^n \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-r}{k} (-1)^k (r + \beta + k)^{-\alpha}}.$$

应用极大似然估计法时，遇到混合整数规划问题，难以实现，故应用矩阵估计

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \approx Er = \frac{\sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-r}{k} (-1)^k r (r + \beta + k)^{-\alpha}}{\sum_{r=0}^n \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-r}{k} (-1)^k (r + \beta + k)^{-\alpha}}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i^2 \approx Er^2 = \frac{\sum_{r=0}^n \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-r}{k} (-1)^k r^2 (r + \beta + k)^{-\alpha}}{\sum_{r=0}^n \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-r}{k} (-1)^k (r + \beta + k)^{-\alpha}}. \tag{17}$$

借助于计算机对每个固定的 $\alpha = 1, 2, \dots$ ，求出一个 β 使其近似满足 (16) 与 (17)，这样就求得一对估计 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 。

2 例子

某种贵重产品，为节约费用，只少量投入对某种应力 S 作定时截尾测试，每个应力水平上投试三个，共作三个水平的测试，结果如表 2。

表 2 实例应力测试结果

应力水平	生存数	失效数
S_1	$r_1 = 1$	$n_1 - r_1 = 3 - 1 = 2$
S_2	$r_2 = 2$	$n_2 - r_2 = 3 - 2 = 1$
S_3	$r_3 = 3$	$n_3 - r_3 = 0$

根据以上数据对正常应力水平上生存率 p_3 作出预估。
因无验前信息，故取无信息验前分布 $\pi(p_i) = U(0, 1)$ 由定理 1 的结论得公式

$$\hat{p}_3 = W_3^{-1} \sum_{h_1=0}^{r_1} \sum_{h_2=0}^{r_2} W(h_1, h_2) \left(\frac{u_3 + h_2}{g_2 + u_3 + v_3} \right),$$

$$\left. \begin{aligned} u_i &= r_i + 1, & v_i &= n_i - r_i + 1, & g_1 &= u_1 + v_1 - 1, & g_2 &= u_2 + v_2 + g_1 - 1, \\ C_{h_i} &= \binom{g_i}{h_i} B(u_{i+1} + h_i, & g_i + v_{i+1} - h_i), & i &= 1, 2, \\ W(h_1, h_2) &= C_{h_1} C_{h_2}, \\ W_3 &= \sum_{h_1=u_1}^{g_1} \sum_{h_2=u_2+h_1}^{g_2} W(h_1, h_2), \end{aligned} \right\}$$

因 $u_1 = 2, u_2 = 2, u_3 = 4; v_1 = 3, v_2 = 2, v_3 = 1; g_1 = 4, g_2 = 8,$

$$C_{h_1} = \binom{4}{h_1} B(3 + h_1, 6 - h_1) = \frac{(2 + h_1)(1 + h_1)(5 - h_1)}{1680}$$

$$C_{h_2} = \binom{8}{h_2} B(4 + h_2, 9 - h_2) = \frac{(3 + h_2)(2 + h_2)(1 + h_2)}{11880},$$

$$\begin{aligned} W_3 &= \sum_{h_1=2}^4 \sum_{h_2=3+h_1}^8 \frac{(2 + h_1)(1 + h_1)(5 - h_1)}{1680} \frac{(3 + h_2)(2 + h_2)(1 + h_2)}{11880} \\ &= 11.6071 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \sum_{h_1=2}^4 \sum_{h_2=3+h_1}^8 \frac{(2 + h_1)(1 + h_1)(5 - h_1)}{1680} \frac{(3 + h_2)(2 + h_2)(1 + h_2)}{11880} \left(\frac{4 + h_2}{8 + 4 + 1} \right) \\ &= 9.9849 \times 10^{-3}, \end{aligned}$$

$$\hat{p}_3 = \frac{I}{W_3} = 0.8602,$$

分析与比较:

(1) 例子仅有三个数据, 用经典方法是无法计算的。

(2) 经典方法需要大样本且约束条件较多, 但可外推预测。

(3) 本文的方法几乎没有什么约束, 且又不受样本大小及水平多少的限制, 应特别强调的是适合小样本, 但无法预测。

参 考 文 献

- [1] 茆诗松、王玲玲、可靠性统计, 华东师范大学出版社, (1984)。
- [2] Mialz, H. F, and Waller, R. A., *Bayesian Reliability Analysis*, Jhon&Sons, (1982)。
- [3] 茆诗松, 恒定应力加速寿命试验的贝叶士方法, 应用概率统计, 3, 3 (1987)。

Bayes Estimate of the Survival Rate of Products Subjected to Accelerated Life Testing under Constant Stress

We Shcomin

(*Department of Management Information Science*)

Adstracs For estimating the survival rate of products subjected to accelerated life testing under constant stress, this paper makes a Bayes estimate. The application of this method will at least free the estimation from the following two assumptions: 1) the life distributions of products at any stress level are of the same or similar type; 2) there exists a known functionship between the parameters of the failure distribution of products and the stress used, this is an assumption not exactly reasonable and requiring large sample. The method proposed here is well suited to the small sample, which is exemplified finally.

key words constant stress, accelerated life test, survival rats of products, Bayes estimations