

一致概自守函数及其性质

王全义 许宝芬

(管理信息科学系)(附属中学)

摘要 概自守函数是殆周期函数的扩张,其性质虽比殆周期函数的性质差,但比回复函数的性质好.本文把概自守函数拓广为一类更广泛的一致概自守函数,并利用极限定理和对角线法研究它的性质,得到好的结果.

关键词 殆周期函数,扩张,极限定理,一致概自守函数,对角线法

1 一致概自守函数的定义及其性质

定义1 设 $f: R \rightarrow R$ 有界、连续.如果对于任意给定的序列 $\{t_m\} \subset R$, 恒存在子序列 $\{t_n\} \subset \{t_m\}$ 以及连续函数 $g: R \rightarrow R$ 使得下列极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t + t_n) = g(t) \quad (1)$$

和

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(t - t_n) = f(t), \quad (2)$$

对 $t \in R$ 都成立, 则称 $f(t)$ 是 Bochner 概自守函数, 简称 $f(t)$ 为概自守函数.

命题1 如果 $f(t)$ 是概自守函数, 则 $f(t)$ 在 R 上一致连续^[1].

命题2 定义1中的函数 $g(t)$ 是一致连续的, 且式(1), (2)的极限对于任何给定的有界闭区间里的 t 是一致成立的.

证 先证结论的前半部分. 由命题1知 $f(t)$ 是一致连续的, 所以对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对任意的 $t', t'' \in R$, 只要 $|t' - t''| < \delta$, 就有

$$|f(t') - f(t'')| < (\varepsilon/3). \quad (3)$$

由定义1知, 对此 $\varepsilon > 0$ 和给定的 t', t'' , \exists 自然数 $N = N(\varepsilon, t', t'')$ 充分大, 使得当 $n \geq N$ 时就有

$$|f(t' + t_n) - g(t')| < (\varepsilon/3) \quad (4)$$

及

$$|f(t'' + t_n) - g(t'')| < (\varepsilon/3). \quad (5)$$

所以由式(3) — (5)知, 当 $t', t'' \in R$ 时, 只要 $|t' - t''| < \delta$, 就有 $|g(t') - g(t'')| \leq |g(t') - f(t' + t_n) + f(t' + t_n) - g(t'') + g(t'') - f(t'' + t_n) + f(t'' + t_n) - g(t'')|$

$-f(t' + t_n)| + |f(t' + t_n) - f(t'' + t_n)| + |f(t'' + t_n) - g(t'')| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon (n > N \text{ 时})$.
由该式可知左边与 n 无关, 这说明只要 $|t' - t''| < \delta$ 时, 就有 $|g(t') - g(t'')| < \varepsilon$. 又 $\varepsilon > 0$ 是任意给定的, 所以 $g(t)$ 在 R 上一致连续.

其次证结论的后半部分, 以证式 (1) 为例, 余者同理可证. 用反证法. 若不然, 存在着有界闭区间 $R_0 \subset R$ 使得式 (1) 的极限在 R_0 上不一致收敛, 则存在某一 $\varepsilon_0 > 0$ 和一序列 $\tau_n \in R_0$, 无论 n 多大都有

$$|f(\tau_n + t_n) - g(\tau_n)| > \varepsilon_0. \quad (6)$$

因 $\{\tau_n\}$ 是有界序列, 所以必有收敛子列 $\{\tau_{n_k}\} \subset \{\tau_n\}$ 使 $\tau_{n_k} \rightarrow \tau_0 (k \rightarrow \infty)$, $\tau_0 \in R_0$. 又从式 (6) 得

$$|f(\tau_{n_k} + t_{n_k}) - g(\tau_{n_k})| > \varepsilon_0. \quad (7)$$

由于 $f(t)$, $g(t)$ 在 R 上一致连续, 所以对此 $\varepsilon_0 > 0$, $\exists \delta_0 > 0$, 使得 $\forall t', t'' \in R$, 只要 $|t' - t''| < \delta_0$, 就有

$$|f(t') - f(t'')| < (\varepsilon_0/3) \quad (8)$$

和

$$|g(t') - g(t'')| < (\varepsilon_0/3). \quad (9)$$

又因为 $\tau_{n_k} \rightarrow \tau_0$, 所以对此 $\delta_0 > 0$, \exists 自然数 k_0 充分大, 当 $k > k_0$ 时, 就有 $|\tau_{n_k} - \tau_0| < \delta_0$. 因此, 从式 (7) — (9) 可知, 当 $k > k_0$ 时有 $|f(\tau_0 + t_{n_k}) - g(\tau_0)| = |[f(\tau_{n_k} + t_{n_k}) - g(\tau_{n_k})] - [f(\tau_{n_k} + t_{n_k}) - f(\tau_0 + t_{n_k})] - [g(\tau_0) - g(\tau_{n_k})]| \geq |f(\tau_{n_k} + t_{n_k}) - g(\tau_{n_k})| - |f(\tau_{n_k} + t_{n_k}) - f(\tau_0 + t_{n_k})| - |g(\tau_0) - g(\tau_{n_k})| \geq \varepsilon_0 - \varepsilon_0/3 - \varepsilon_0/3 = \varepsilon_0/3$.

由此可知 $f(\tau_0 + t_{n_k}) \not\rightarrow g(\tau_0) (k \rightarrow \infty \text{ 时 } n_k \rightarrow \infty)$, 与式 (1) 相矛盾. 这个矛盾说明式 (1) 的极限对于任意给定的有界闭区间里的 t 是一致成立的. 证毕.

由命题 1 和 2 可知, 定义 1 可以改述为下列等价形式.

定义 2 设 $f: R \rightarrow R$ 有界、一致连续. 如果对于任意给定的序列 $\{t_m'\} \subset R$, 恒存在着子序列 $\{t_n\} \subset \{t_m'\}$ 和一个一致连续函数 $g: R \rightarrow R$, 使得下列极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t + t_n) = g(t)$$

和

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(t - t_n) = f(t),$$

对任意给定的有界闭区间里的 t 是一致收敛的, 则称 $f(t)$ 是概自守函数.

定义 3 设 $f: R \times D \rightarrow R^m$ 连续, 这里 $D \subset R^n$ 为开集. 如果对于每一个固定的有界闭子集 $S \subset D$, $f: R \times S \rightarrow R^m$ 有界、一致连续并且对任意给定的序列 $\{t'_j\} \subset R$, 恒有子序列 $\{t_k\} \subset \{t'_j\}$ 以及一个连续函数 $g: R \times D \rightarrow R^m$ 使得下列极限

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(t + t_k, x) = g(t, x) \quad (10)$$

和

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g(t - t_k, x) = f(t, x), \quad (11)$$

对于 $(t, x) \in R_0 \times S_1$ 是一致成立的, 这里 R_0 , S_1 分别是 R 和 D 中的任一紧集, 则称 $f(t, x)$ 是关于 t 对 $x \in D$ 一致地概自守函数. 从定义 3 易知: 对于任意给定的有界闭集 $S \subset D$, $g(t, x)$ 在 $R \times S$ 上是有界且一致连续的.

命题3 $f(t, \tau, x): R \times R \times R^n \rightarrow R^n$ 连续、关于 τ 以 $T(T>0)$ 为周期、关于 t 对 $(\tau, x) \in R \times R^n$ 一致地概自守函数, 则 $f(t, \tau, x)$ 在 $R \times R \times S$ 上一致连续. 此外, 对于任意的序列 $\{t'_j\} \subset R$, 恒存在着子序列 $\{t_j\} \subset \{t'_j\}$ 以及一个连续函数 $g: R \times R \times R^n \rightarrow R^n$, 使得下列极限

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} f(t+t_j, \tau, x) = g(t, \tau, x) \quad (12)$$

和

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} g(t-t_j, \tau, x) = f(t, \tau, x) \quad (13)$$

在 $R_0 \times R \times S$ 上是一致成立的, 这里 R_0, S 分别是 R 和 R^n 中的任一紧集.

证明 先证结论的前部分. 事实上, 由题设和定义 3 知 $f(t, \tau, x)$ 在 $R \times R_T \times S$ 上一致连续, 这里 $R_T = [0, 2T]$, S 为 R^n 中任一紧集. 故对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 (\delta < T)$, 使得对 $\forall t_i \in R, \tau_i \in R_T, x_i \in S (i=1, 2)$, 只要 $|t_1 - t_2| < \delta, |\tau_1 - \tau_2| < \delta, |x_1 - x_2| < \delta$ 时, 就有

$$\|f(t_1, \tau_1, x_1) - f(t_2, \tau_2, x_2)\| < \epsilon. \quad (14)$$

因为对 $\forall \tau_1^* \in R$, 总有整数 k 使得 $0 \leq \tau^* - kT \leq T$. 那么当 $\tau_2^* \in R$ 且 $|\tau_1^* - \tau_2^*| < \delta$ 时, 有 $(\tau_1^* - kT) \in R_T, (\tau_2^* - kT) \in R_T$ 且 $|(\tau_1^* - kT) - (\tau_2^* - kT)| < \delta$. 又 $f(t, \tau, x)$ 关于 τ 是 T -周期的, 所以 $f(t_i, \tau_i^*, x_i) = f(t_i, \tau_i^* - kT, x_i) (i=1, 2)$. 从而由式 (14) 知当 $|\tau_1^* - \tau_2^*| < \delta$ 时有

$$|f(t_1, \tau_1^*, x_1) - f(t_2, \tau_2^*, x_2)| = |f(t_1, \tau_1^* - kT, x_1) - f(t_2, \tau_2^* - kT, x_2)| < \epsilon.$$

由于 $\tau_1^*, \tau_2^* \in R$ 是任意的, 故知 $f(t, \tau, x)$ 在 $R \times R \times S$ 上一致连续.

至于结论的后部分, 按照定义 3 和 f 的一致概自守性可知 (12), (13) 两式的极限在 $R_0 \times R_T \times S$ 上是一致成立的. 又因 f 关于 τ 是 T -周期的, 故知 g 关于 τ 也是 T -周期的, 又由 f, g 关于 τ 的周期性易见 (12), (13) 两式的极限在 $R_0 \times R \times S$ 上是一致成立的. 证毕.

2 一类概自守函数的充要条件

命题4 设 $f(t, \tau, x): R \times R \times R^n \rightarrow R^n$ 连续、关于 τ 以 T 为周期、关于 t 对 $(\tau, x) \in R \times R^n$ 一致地概自守函数; 此外还假定 $\partial f(t, \tau, x)/\partial t$ (或 $\partial f(t, \tau, x)/\partial \tau, \partial f(t, \tau, x)/\partial x_j$) 连续且是 τ 的 T -周期函数, 则 $\partial f(t, \tau, x)/\partial t$ (或 $\partial f(t, \tau, x)/\partial \tau, \partial f(t, \tau, x)/\partial x_j$) 是关于 t 对 $(\tau, x) \in R \times R^n$ 一致地概自守函数的充要条件是 $\partial f(t, \tau, x)/\partial t$ (或 $\partial f(t, \tau, x)/\partial \tau, \partial f(t, \tau, x)/\partial x_j$) 在 $R \times R \times S$ 上一致连续, 这里 S 是 R^n 中的任一紧集.

证 必要性由定义 3 可得. 下面证明充分性. 以证 $\partial f(t, \tau, x)/\partial t$ 为例, 其余部分同理可证.

为方便起见, 不妨设 f 为一维的实函数. 现在记 $B_l = \{x | x \in R^n, \|x\| \leq l\}, R_j = [-j, j]$, 这里 l, j 都为自然数. 下面我们先证明:

(i) $\partial f(t, \tau, x)/\partial t$ 在 $R \times R \times B_l$ 上有界, $l=1, 2, 3, \dots$.

(ii) 对于任意给定的序列 $\{t'_i\} \subset R$, 必存在着子序列 $\{t_i\} \subset \{t'_i\}$ 以及一个连续函数 $g: R \times R \times B_l \rightarrow R$ 使得下列极限

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\partial f(t+t_j, \tau, x)}{\partial t} = g(t, \tau, x), \quad (15)$$

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} g(t-t_i, \tau, x) = \frac{\partial f(t, \tau, x)}{\partial t} \quad (16)$$

对 $(t, \tau, x) \in R_j \times R \times B_l$ 是一致成立的, $j=1, 2, 3, \dots$.

事实上, 由于 $\partial f(t, \tau, x)/\partial t$ 在 $R \times R \times B_l$ 上一致连续, 因此对于 $\epsilon_k = 1/k$, k 为自然数, 恒存在着正数 h_k (且 $h_k \rightarrow 0$, 当 $k \rightarrow +\infty$) 使得

$$\left| \frac{f(t+h_k, \tau, x) - f(t, \tau, x)}{h_k} - \frac{\partial f(t, \tau, x)}{\partial t} \right| < \frac{\epsilon_k}{4} \quad (17)$$

对任意的 $(t, \tau, x) \in R \times R \times B_l$ 都成立. 又记

$$F_k(t, \tau, x) = \frac{f(t+h_k, \tau, x) - f(t, \tau, x)}{h_k},$$

则显然 $F_k(t, \tau, x)$ 是关于 t 对 $(\tau, x) \in R \times R^n$ 一致地概自守函数. 因此, $F_k(t, \tau, x)$ 在 $R \times R \times B_l$ 上有界, 从而由式 (17) 知 $\partial f(t, \tau, x)/\partial t$ 在 $R \times R \times B_l$ 上也有界, $l=1, 2, 3, \dots$.

其次证明 (ii) 也成立. 对于任意给定的序列 $\{t_i'\}$, 因为 $F_k(t, \tau, x)$ 都是关于 t 对 $(\tau, x) \in R \times R^n$ 一致地概自守函数, 所以根据对角线法和命题 3 知: 可以选取 $\{t_i'\}$ 的子序 $\{t_i\}$ 以及存在着连续函数 $g_k: R \times R \times R^n \rightarrow R$ 使得下列极限

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} F_k(t+t_i, \tau, x) = g_k(t, \tau, x), \quad (18)$$

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} g_k(t-t_i, \tau, x) = F_k(t, \tau, x) \quad (19)$$

在 $R_j \times R \times B_l$ 上一致成立, $j=1, 2, 3, \dots$. 下面先证明: 对于任意给定的 j , $\{\partial f(t+t_i, \tau, x)/\partial t\}$ 在 $R_j \times R \times B_l$ 上一致收敛. 事实上, 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 恒有 k_0 充分大, 使得 $(1/k_0) < \epsilon$. 因为 $\{F_{k_0}(t+t_i, \tau, x)\}$ 在 $R_j \times R \times B_l$ 上一致收敛, 所以存在着自然数 $N = N(j, \epsilon)$ 充分大, 使得当 $i_1, i_2 \geq N$ 时, 就有

$$|F_{k_0}(t+t_{i_1}, \tau, x) - F_{k_0}(t+t_{i_2}, \tau, x)| < (\epsilon/4) \quad (20)$$

对 $(t, \tau, x) \in R_j \times R \times B_l$ 成立. 因此由式 (17), (20) 可得: 当 $i_1, i_2 \geq N$ 时, 对任意的 $(t, \tau, x) \in R_j \times R \times B_l$ 都有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial f(t+t_{i_1}, \tau, x)}{\partial t} - \frac{\partial f(t+t_{i_2}, \tau, x)}{\partial t} \right| \leq |F_{k_0}(t+t_{i_1}, \tau, x) - F_{k_0}(t+t_{i_2}, \tau, x)| \\ & + \left| F_{k_0}(t+t_{i_2}, \tau, x) - \frac{\partial f(t+t_{i_2}, \tau, x)}{\partial t} \right| + \left| \frac{\partial f(t+t_{i_1}, \tau, x)}{\partial t} - F_{k_0}(t+t_{i_1}, \tau, x) \right| \\ & \leq \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 < \epsilon. \end{aligned}$$

所以由柯西一致收敛判别法可知 $\left\{ \frac{\partial f(t+t_i, \tau, x)}{\partial t} \right\}$ 在 $R_j \times R \times B_l$ 上一致收敛, $j=1, 2, 3, \dots$. 因此可设 $\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\partial f(t+t_i, \tau, x)}{\partial t} = g(t, \tau, x)$, 从而 $g(t, \tau, x)$ 在 $R \times R \times B_l$ 上连续; 另

一方面从式 (17) 得 $\left| F_k(t+t_i, \tau, x) - \frac{\partial f(t+t_i, \tau, x)}{\partial t} \right| < \frac{1}{4k}$ ($(t, \tau, x) \in R \times R \times B_l$), 令 $i \rightarrow +\infty$ 得 $|g_k(t, \tau, x) - g(t, \tau, x)| \leq 1/4k$ ($(t, \tau, x) \in R \times R \times B_l$). 因此, 利用式 (19)

和上述类似的证明, 可以证得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t - t_i, \tau, x) = \frac{\partial f(t, \tau, x)}{\partial t}$$

在 $R_j \times R \times B_i$ 上是一致成立的, $j = 1, 2, 3, \dots$.

最后利用结论(ii), 可以证明命题的结论. 事实上, 对于任意给定的序列 $\{t'_i\}$, 由结论(ii)可知, 恒有子序列 $\{t_{i_1k}\} \subset \{t'_i\}$ 以及一个连续函数 $g_1: R \times R \times B_1 \rightarrow R$ 使得下列极限

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\partial f(t + t_{i_1k}, \tau, x)}{\partial t} = g_1(t, \tau, x),$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g_1(t - t_{i_1k}, \tau, x) = \frac{\partial f(t, \tau, x)}{\partial t}$$

在 $R_j \times R \times B_1$ 上是一致成立的, $j = 1, 2, 3, \dots$; 对于序列 $\{t_{i_1k}\}$, 又有子序列 $\{t_{i_2k}\} \subset \{t_{i_1k}\}$ 以及一个连续函数 $g_2: R \times R \times B_2 \rightarrow R$ 使得下列极限

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\partial f(t + t_{i_2k}, \tau, x)}{\partial t} = g_2(t, \tau, x),$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g_2(t - t_{i_2k}, \tau, x) = \frac{\partial f(t, \tau, x)}{\partial t}$$

在 $R_j \times R \times B_2$ 上是一致成立的, $j = 1, 2, \dots$, 重复这个步骤, 一直做下去. 于是根据对角线法, 最终总可以取到子序列 $\{t_{ikk}\} \subset \{t'_i\}$ 以及连续函数 $g: R \times R \times R^n \rightarrow R$ 使得下列极限

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\partial f(t + t_{ikk}, \tau, x)}{\partial t} = g(t, \tau, x),$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g(t - t_{ikk}, \tau, x) = \frac{\partial f(t, \tau, x)}{\partial t}$$

在 $R_j \times R \times B_l$ 上是一致成立的, l 和 $j = 1, 2, \dots$. 从而命题证毕.

命题5 设 $f(t, \tau, x): R \times R \times R^n \rightarrow R^m$ 连续、关于 τ 以 T 为周期、关于 t 对 $(\tau, x) \in R \times R^n$ 一致地概自守函数, 则有: (1) 对于任意给定的 $a \in R$, $f(t, at, x)$ 是关于 t 对 $x \in R^n$ 一致地概自守函数; (2) 若 $x: R \rightarrow R^n$ 是概自守函数, 则 $f(t, at, x(t))$ 是 t 的概自守函数.

证明 (1) 因为 $f(t, \tau, x)$ 是关于 t 对 $(\tau, x) \in R \times R^n$ 为一致概自守函数, 所以由命题3, 对于任意给定的序列 $\{t'_i\}$ 恒存在子序列 $\{t_k\} \subset \{t'_i\}$ 及一连续函数 $g: R \times R \times R^n \rightarrow R^m$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(t + t_k, \tau, x) = g(t, \tau, x)$$

和

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g(t - t_k, \tau, x) = f(t, \tau, x)$$

对一切 $(t, \tau, x) \in R_0 \times R \times S$ 是一致成立的, 这里 R_0, S 分别是 R 和 R^n 中的任一紧集. 因为 $f(t, \tau, x)$ 关于 τ 是 T -周期的, 所以 $g(t, \tau, x)$ 关于 τ 也是 T -周期的. 又对于 at_k , 总有整数 m_k , 使得 $0 \leq at_k - m_k T \leq T$. 记 $\tau_k = at_k - m_k T$, 于是 $\{\tau_k\}$ 是有界序列, 因此它有收敛子列 $\{\tau_{k_j}\}$, 可设 $\tau_{k_j} \rightarrow \tau_0$, 当 $j \rightarrow +\infty$ 时. 由 f, g 关于 τ 的周期性知下列极限

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} f(t + t_{k_j}, at + at_{k_j}, x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f(t + t_{k_j}, at + a\tau_{k_j}, x) = g(t, at + \tau_0, x)$$

和

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} g(t - t_{kj}, at + \tau_0 - at_{kj}, x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} g(t - t_{kj}, at + \tau_0 - \tau_{kj}, x) \\ = f(t, at + \tau_0 - \tau_0, x) = f(t, at, x)$$

对 $(t, x) \in R_0 \times S$ 是一致成立的。故 $f(t, at, x)$ 是关于 t 对 $x \in R^n$ 一致地概自守函数。即结论 (1) 成立。

现证结论 (2)。因为 $x(t)$ 是概自守函数，故对任意给定的序列 $\{t'_j\}$ ，恒存在子序列 $\{t'_{j_m}\} \subset \{t'_j\}$ 及连续函数 $h: R \rightarrow R^n$ 使得下列极限

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x(t + t'_{j_m}) = h(t)$$

和

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} h(t - t'_{j_m}) = x(t)$$

对一切 $t \in R_0$ 是一致成立的。由结论 (1) 知 $f(t, at, x)$ 是关于 t 对 $x \in R^n$ 一致地概自守函数，故对序列 $\{t'_{j_m}\}$ ，恒存在子序列 $\{t_k\} \subset \{t'_{j_m}\}$ 及连续函数 $F: R \times R \times R^n \rightarrow R^n$ 使得下列极限

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(t + t_k, at + at_k, x) = F(t, at, x)$$

和

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F(t - t_k, at - at_k, x) = f(t, at, x)$$

对一切 $(t, x) \in R_0 \times S$ 是一致成立的。从而极限

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(t + t_k, at + at_k, x(t + t_k)) = F(t, at, h(t))$$

和

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F(t - t_k, at - at_k, h(t - t_k)) = f(t, at, x(t))$$

对一切 $t \in R_0$ 是一致成立的。因此 $f(t, at, x(t))$ 是 t 的概自守函数。即结论 (2) 也成立。证毕。

参 考 文 献

- [1] Veech, W. A., Almost Automorphic Functions on Groups, *Amer. J. of Math.*, 87, (1965), 719—751.
- [2] Bochner, S., A new Approach to Almost Periodicity, *Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A.*, 48, (1962), 2039—2043.
- [3] Veech, W. A., Almost Automorphic Functions, *Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A.*, 49, (1963), 462—464.

Uniformly Almost-Automorphic Function and Its Properties

Wang Quanyi Xu Baofen

(*Department of Management Information Science, Attached Middle School*)

Abstract Almost-automorphic function is known as the extension of almost periodic function which is again the extension of periodic function. The property of almost-automorphic function is “worse” than that of almost periodic function but “better” than that of recurrent function. The authors extend almost-automorphic function to uniformly almost automorphic function which is more extensive, and then study its properties by making use of limit theorem and diagonal method.

Key Words almost periodic function, extension, limit theorems, uniformly almost automorphic function, diagonal method