第12卷 第2期 华侨大学学报自然科学版 Vol.12 No.2
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1991年4月 (NATURAL SCIENCE) Apr 1991

严格对角占优矩阵的SOR法收敛性和误差估计式

陈 恒 新

(管理信息科学系)

摘要 本文给出了严格对角占优矩阵A的SOR法($0<\omega<c$, $c>1$)收敛性和误差估计式，其误差估计常数h_ω仅依赖于矩阵A的元素和松弛因子ω，从而避免了计算SOR法迭代矩阵$L_\omega=(D+\omega L)^{-1}((1-\omega)D-\omega U)$的麻烦，因此具有较好的实用价值。

关键词 对角占优矩阵，收敛，误差估计，SOR法

0 引言

当A是一个严格对角占优矩阵，对于松弛因子$0<\omega\leqslant 1$，解线性方程组$Ax=b$的SOR迭代法收敛，如文[1]。然而，解线性方程组的SOR迭代法收敛的必要条件是$0<\omega<2$[2]。那么对于$1<\omega<2$，SOR法是否有收敛的可能性呢？本文定理则给出了当A是一个严格对角占优矩阵，对于$0<\omega<c$，$c>1$，SOR迭代法亦收敛。从而扩充了松弛因子ω的取值范围。

其次，由文[2]知，当$\|L_\omega\|=q<1$时，解线性方程组$Ax=b$的SOR迭代法$x^{(m+1)}=L_\omega x^{(m)}+f$有误差估计式：$\|x^{(m)}-x^*\|\leqslant q/(1-q)\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|$和$\|x^{(m)}-x^*\|\leqslant q^m/(1-q)\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$。然而，其迭代矩阵$L_\omega=(D+\omega L)^{-1}((1-\omega)D-\omega U)$的计算很麻烦，因此利用上式进行误差估计并非易事，且在实际利用SOR法求解时也不需具体求出迭代矩阵L_ω。那么，是否具有不需计算L_ω的SOR法之误差估计式？当A是一个严格对角占优矩阵时，本文同样给出了类似的误差估计式，该误差估计常数h_ω仅依赖于矩阵A的元素和松弛因子ω，且计算简便，并且可有$h_\omega<\|B\|_\infty<1$。这里，B是Jacobi迭代矩阵，说明SOR法收敛速度快于Jacoba迭代法。

1 定理

定理 设$A=[a_{ij}]$为严格对角占优矩阵，若取松弛因子$0<\omega<c=2/(1+l_k+u_k)$，这里

$$l_i=\sum_{j=1}^{i-1}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|,\quad u_i=\sum_{j=i+1}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

本文1989－03－09收到．

$l_1=u_n=0$，$l_k+u_k=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(l_i+u_i)$。则$c>1$，解方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$之SOR迭代法

$$\mathbf{x}^{(m+1)}=\mathbf{L}_\omega\mathbf{x}^{(m)}+\mathbf{f}=(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}((1-\omega)\mathbf{D}-\omega\mathbf{U})\mathbf{x}^{(m)}+(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}\omega b(m=0,1,2,\cdots),\quad(1)$$

收敛且有误差估计式

$$\|\mathbf{x}^{(m)}-\mathbf{x}^*\|_\infty\leqslant\frac{h_\omega}{1-h_\omega}\|\mathbf{x}^{(m)}-\mathbf{x}^{(m-1)}\|_\infty\quad(2)$$

和

$$\|\mathbf{x}^{(m)}-\mathbf{x}^*\|_\infty\leqslant\frac{h_\omega^m}{1-h_\omega}\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|_\infty,\quad(3)$$

这里误差估计常数

$$h_\omega=\max_{1\leqslant i\leqslant n}h_\omega^{(i)}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|1-\omega|+\omega u_i}{1-\omega l_i},\qquad \text{且}h_\omega<1.$$

其次，若取松弛因子ω：$s_1\leqslant\omega\leqslant s_2$，这里$s_1=(1-(l_k+u_k))/(1-\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(u_i+l_i(l_k+u_k)))$，$s_2=\min(c,\ t)$，$t=(1+l_k+u_k)/(1+\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(u_i+l_i(l_k+u_k)))$。则有 $0<s_1\leqslant1\leqslant s_2$*，且误差估计常数$h_\omega\leqslant\|\mathbf{B}\|_\infty<1$，其中$\mathbf{B}$为Jacobi迭代矩阵。并且若$s_1<s_2$，只要取 $s_1<\omega<s_2$ 便有$h_\omega<\|\mathbf{B}\|_\infty<1$。

证明　因为$\mathbf{A}$为严格对角占优矩阵，因此$\mathbf{A}=\mathbf{D}+\mathbf{L}+\mathbf{U}$分解（其中$\mathbf{D}$为对角阵，$\mathbf{L}$为严格下三角阵，$\mathbf{U}$为严格上三角阵）中$\det\mathbf{D}\neq0$。由 $\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|<|a_{ii}|$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 有

$$\sum_{j=1}^{i-1}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|+\sum_{j=i+1}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|=\sum_{j\neq i}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|<1,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

即

$$l_i+u_i<1,\qquad l_i,\ u_i\geqslant0,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.\quad(4)$$

由于式（4）有$l_k+u_k=\max\limits_i(l_i+u_i)<1$，因此$C=2/(1+l_k+u_k)>2/(1+1)=1$。

现先证误差估计常数$h_\omega<1$。当$0<\omega<1$时，由定义有

$$h_\omega^{(i)}=\frac{|1-\omega|+\omega u_i}{1-\omega l_i}=\frac{1-\omega+\omega u_i}{1-\omega l_i},\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ .$$

因$l_i<1$　$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$所以有$1-\omega l_i>0$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。由于$l_i+u_i<1$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，则有$\omega(l_i+u_i)<\omega$，可推出

$$-\omega+\omega u_i<-\omega l_i,\qquad 1-\omega+\omega u_i<1-\omega l_i,$$

因此

$$h_\omega^{(i)}=\frac{1-\omega+\omega u_i}{1-\omega l_i}<1,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

故有

$$h_\omega=\max_i h_\omega^{(i)}<1.$$

当$1\leqslant\omega<c=2/(1+l_k+u_k)$时，由定义有

*实际上，对大部分严格对角占优矩阵$\mathbf{A}$，有$0<s_1<1<s_2$，见例1.

$$h_\omega^{(i)}=\frac{|1-\omega|+\omega u_i}{1-\omega l_i}=\frac{\omega-1+\omega u_i}{1-\omega l_i},\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

因为 $\omega l_i\leqslant cl_i=2l_i/(1+l_k+u_k)<(1+l_i)/(1+l_k+u_k)\leqslant(1+l_i+u_i)/(1+l_k+u_k)\leqslant 1$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，所以$1-\omega l_i>0$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。由于 $\omega(1+l_i+u_i)<c(1+l_i+u_i)=2(1+l_i+u_i)/(1+l_k+u_k)\leqslant 2$，有$\omega+\omega u_i<2-\omega l_i$，　$\omega-1+\omega u_i<1-\omega l_i$，因此

$$h_\omega^{(i)}=\frac{\omega-1+\omega u_i}{1-\omega l_i}<1,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

故

$$h_\omega=\max_i h_\omega^{(i)}<1.$$

综上所述，对于任$0<\omega<c$，都有$h_\omega<1$且$1-\omega l_i>0$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。

由式（1）有

$$(D+\omega L)x^{(m+1)}=((1-\omega)D-\omega U)X^{(m)}+\omega b;$$

$$DX^{(m+1)}=-\omega LX^{(m+1)}+((1-\omega)D-\omega U)x^{(m)}+\omega b;$$

$$x^{(m+1)}=-\omega D^{-1}Lx^{(m+1)}+((1-\omega)I-\omega D^{-1}U)x^{(m)}+\omega D^{-1}b,\qquad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

因此有$x^{(m+1)}-x^{(m)}=-\omega D^{-1}L(x^{(m+1)}-x^{(m)})+((1-\omega)I-\omega D^{-1}U)(x^{(m)}-x^{(m-1)}),m=1,2,\cdots$.

记

$$\|x^{(m+1)}-x^{(m)}\|_\infty=\max_i|x_i^{(m+1)}-x_i^{(m)}|=|x_r^{(m+1)}-x_r^{(m)}|,$$

则

$$\begin{aligned}\|x^{(m+1)}-x^{(m)}\|_\infty&=|x_r^{(m+1)}-x_r^{(m)}|\\&=\Big|-\omega\sum_{j=1}^{r-1}\frac{a_{rj}}{a_{rr}}(x_j^{(m+1)}-x_j^{(m)})+(1-\omega)(x_r^{(m)}-x_r^{(m-1)})\\&\qquad-\omega\sum_{j=r+1}^{n}\frac{a_{rj}}{a_{rr}}(x_j^{(m)}-x_j^{(m-1)})\Big|\\&\leqslant\omega\sum_{j=1}^{r-1}\left|\frac{a_{rj}}{a_{rr}}\right|\left|x_j^{(m+1)}-x_j^{(m)}\right|+\left|1-\omega\right|\left|x_r^{(m)}-x_r^{(m-1)}\right|\\&\qquad+\omega\sum_{j=r+1}^{n}\left|\frac{a_{rj}}{a_{rr}}\right|\left|x_j^{(m)}-x_j^{(m-1)}\right|\\&\leqslant\omega l_r\|x^{(m+1)}-x^{(m)}\|_\infty+(|1-\omega|+\omega u_r)\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|_\infty,\end{aligned}$$

于是有

$$(1-\omega l_r)\|x^{(m+1)}-x^{(m)}\|_\infty\leqslant(|1-\omega|+\omega u_r)\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|_\infty,$$

$$\begin{aligned}\|x^{(m+1)}-x^{(m)}\|_\infty&\leqslant\frac{|1-\omega|+\omega u_r}{1-\omega l_r}\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|_\infty\\&\leqslant\max_i\frac{|1-\omega|+\omega u_i}{1-\omega l_i}\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|_\infty,\end{aligned}$$

即有

$$\|x^{(m+1)}-x^{(m)}\|_\infty\leqslant h_\omega\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|_\infty,\qquad m=1,\ 2,\ \cdots.\tag{5}$$

利用范数性质及公式（5）可知，对任意正整数P有

$$\|x^{(m+p)}-x^{(m)}\|_\infty=\|x^{(m+p)}-x^{(m+p-1)}+x^{(m+p-1)}-x^{(m+p-2)}+x^{(m+p-2)}-\cdots+x^{(m+1)}-x^{(m)}\|_\infty$$

$$\leqslant\|x^{(m+p)}-x^{(m+p-1)}\|_\infty+\|x^{(m+p-1)}-x^{(m+p-2)}\|_\infty+\cdots+\|x^{(m+1)}-x^{(m)}\|_\infty$$
$$\leqslant(h_\omega^{p-1}+h_\omega^{p-2}+\cdots+h_\omega+1)\|x^{(m+1)}-x^{(m)}\|_\infty\leqslant$$
$$1/(1-h_\omega)\|x^{(m+1)}-x^{(m)}\|_\infty\leqslant1/(1-h_\omega)h_\omega^m\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty,$$

于是得到公式

$$\|x^{(m+p)}-x^{(m)}\|_\infty\leqslant h_\omega^m\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty/(1-h_\omega). \tag{6}$$

由于$h_\omega<1$，于是对任意给定的正数$\varepsilon>0$，必存在正整数N，使得当$m>N$时式（6）之右端项小于ε。故由Cauchy收敛准则知序列$\{x^{(m)}\}$收敛，记为 $\lim\limits_{m\to\infty}x^{(m)}=x^*$。因此，令式(1)中$m\to\infty$，便得$x^*=L_\omega x^*+f$，它等价于 $Ax^*=b$。即由SOR迭代法（1）产生的序列收敛于方程组$Ax=b$之解x^*。因为 $x^{(m)}-x^*=\sum\limits_{i=m}^{m}(x^{(i)}-x^{(i+1)})$，所以再利用范数性质及式（5）有

$$\|x^{(m)}-x^*\|_\infty\leqslant\sum_{i=m}^{\infty}\|x^{(i)}-x^{(i+1)}\|_\infty=\sum_{i=m}^{\infty}\|x^{(i+1)}-x^{(i)}\|_\infty$$
$$=\|x^{(m+1)}-x^{(m)}\|_\infty+\|x^{(m+2)}-x^{(m+1)}\|_\infty+\|x^{(m+3)}-x^{(m+2)}\|_\infty+\cdots$$
$$\leqslant(h_\omega+h^2_\omega+h^3_\omega+\cdots)\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|_\infty$$
$$=\frac{h_\omega}{1-h_\omega}\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|_\infty,$$

即得

$$\|x^{(m)}-x^*\|_\infty\leqslant\frac{h_\omega}{1-h_\omega}\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|_\infty.$$

又反复利用式（5）有

$$\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|_\infty\leqslant h_\omega^{m-1}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty,$$

代入上一个式子便得

$$\|x^{(m)}-x^*\|_\infty\leqslant\frac{h_\omega^m}{1-h_\omega}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty.$$

至此已证明了收敛性及误差估计式（2）和（3）。

其次，若$s_1\leqslant\omega\leqslant s_2$，因为$1-(l_k+u_k)>0$，且

$$u_i+l_i(l_k+u_k)\leqslant u_i+l_i\times1=u_i+l_i\leqslant u_k+l_k<1,\ （对任i=1,2,\cdots,n）. \tag{7}$$

于是

$$1-\max_i(u_i+l_i(l_k+u_k))\geqslant1-(l_k+u_k)>0, \tag{8}$$

因此有$s_1=(1-(l_k+u_k))/(1-\max\limits_i(u_i+l_i(l_k+u_k))>0$，且由式（8）知 $s_1\leqslant(1-(l_k+u_k))/(1-l_k+u_k))=1$，再由式（7）知$1+\max\limits_i(u_i+l_i(l_k+u_k))\leqslant1+l_k+u_k$。所以，$t=(1+l_k+u_k)/(1+\max\limits_i(u_i+l_i(l_k+u_k))\geqslant(1+l_k+u_k)/(1+l_k+u_k)=1$。又因 $c>1$，所以 $s_2=\min(c,t)\geqslant1$。综上所述有 $0<s_1\leqslant1\leqslant s_2$，且知区间 $[s_1, s_2]\subset(0, c)$，故当 $s_1\leqslant\omega\leqslant s_2$，误差估计式（2），（3）亦成立。

下面来证明 $h_\omega\leqslant\|B\|_\infty<1$。因为Jacobi迭代矩阵 $B=-D^{-1}(L+U)$，所以 $\|B\|_\infty=\max\limits_i\sum\limits_{j\neq i}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|=\max\limits_i(l_i+u_i)=l_k+u_k<1$。当$s_1\leqslant\omega\leqslant1$时，由定义

$$h_\omega^{(i)}=\frac{|1-\omega|+\omega u_i}{1-\omega l_i}=\frac{1-\omega+\omega u_i}{1-\omega l_i},\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

由于 $\omega\geqslant s_1=(1-(l_k+u_k))/(1-\max\limits_i(u_i+l_i(l_k+u_k)))\geqslant(1-(l_k+u_k))/(1-(u_i+l_i(l_k+u_k)))$，$i=1,2,\cdots,n$。因此有

$$\omega(1-(u_i+l_i(l_k+u_k))\geqslant 1-(l_k+u_k),$$
$$\omega-\omega u_i-\omega l_i(l_k+u_k)\geqslant 1-(l_k+u_k),$$
$$(1-\omega l_i)(l_k+u_k)\geqslant 1-\omega+\omega u_i。$$

所以

$$h_\omega^{(i)}=\frac{1-\omega+\omega u_i}{1-\omega l_i}\leqslant l_k+u_k,\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

故

$$h_\omega=\max_i\ h_\omega^{(i)}\leqslant l_k+u_k=\|B\|_\infty<1。$$

当$1\leqslant\omega\leqslant s_2$时，由定义

$$h_\omega^{(i)}=\frac{|1-\omega|+\omega u_i}{1-\omega l_i}=\frac{\omega-1+\omega u_i}{1-\omega l_i},\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

由于$\omega\leqslant s_2=\min(c,t)\leqslant t=(1+l_k+u_k)/(1+\max\limits_i(u_i+l_i(l_k+u_k)))\leqslant(1+l_k+u_k)/(1+u_i+l_i(l_k+u_k))$，　$i=1,2,\cdots,n$。因此有

$$\omega(1+u_i+l_i(l_k+u_k))\leqslant 1+l_k+u_k,\ \omega+\omega u_i+\omega l_i(l_k+u_k)\leqslant 1+l_k+u_k,\ \omega-1+\omega u_i\leqslant(1-\omega l_i)(l_k+u_k)。$$

所以

$$h_\omega^{(i)}=\frac{\omega-1+\omega u_i}{1-\omega l_i}\leqslant l_k+u_k,\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

故

$$h_\omega=\max_i\ h_\omega^{(i)}\leqslant l_k+u_k=\|B\|_\infty<1。$$

综上所述，对任意$s_1\leqslant\omega\leqslant s_2$，成立$h_\omega\leqslant\|B\|_\infty<1$。

显然，若$s_1<s_2$，由上述证明过程可知，只要取$s_1<\omega<s_2$，便有$h_\omega<\|B\|_\infty<1$。证毕

2　例子

设有线性方程组

$$\begin{pmatrix}5&-1&1\\-5&10&2\\3&2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\\1\end{pmatrix},\tag{9}$$

可知式（9）之系数矩阵A为严格对角占优矩阵，其Jacobi迭代矩阵为

$$B=-D^{-1}(L+U)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{5}\\-\frac{3}{7}&-\frac{2}{7}&0\end{pmatrix},$$

因$l_1=0$，$u_1=2/5$；$l_2=1/2$，$u_2=1/5$；$l_3=5/7$，$u_3=0$。所以$l_k+u_k=\max_i(l_i+u_i)=l_3+u_3=5/7$，于是

$$c=2/(1+l_k+u_k)=2/(1+5/7)=7/6.$$

由定理知，若取松弛因子$0<\omega<7/6$，则解方程组（9）之SOR迭代法（1）收敛，且有误差式（2）和（3）。例如，取$\omega=0.9$，则$h_\omega^{(i)}=(1+9u_i)/(10-9l_i)$，$i=1, 2, 3$，因

$$h_\omega^{(1)}=\frac{23}{50}=0.46,\quad h_\omega^{(2)}=\frac{28}{55}=0.5091,\quad h_\omega^{(3)}=\frac{7}{25}=0.28,$$

于是得 $h_\omega=\max_i h_\omega^{(i)}=\frac{28}{55}=0.5091$代入式（2），（3）便得

$$\|x^{(m)}-x^*\|_\infty\leqslant\frac{28}{27}\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|_\infty,$$

$$\|x^{(m)}-x^*\|_\infty\leqslant\left(\frac{28}{55}\right)^m\times\frac{55}{27}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty.$$

其次，因$\max_i(u_i+l_i(l_k+u_k))=\max_i(u_i+l_i\times 5/7)=39/70$，$s_1=(1-(l_k+u_k))/(1-\max_i(u_i+l_i(l_k+u_k)))=(1-5/7)/(1-39/70)=20/31$，$t=(1+l_k+u_k)/(1+\max_i(u_i+l_i(l_k+u_k)))=(1+5/7)/(1+39/70)=120/109$，$s_2=\min(c, t)=\min(7/6, 120/109)=120/109$。于是，由定理知若取$20/31<\omega<120/109$，便有 $h_\omega<\|B\|_\infty=5/7=0.7143$。例如，取$\omega=0.9$ 时，有$h_\omega=0.5091<\|B\|_\infty=0.7143$。

参 考 文 献

[1] 康金章等编. 计算机数值方法，厦门大学出版社.（1988）.
[2] 李庆扬等编. 数值分析. 华中工学院出版社.（1982）.

SOR-method Convergence and Error Estimate Formula in Strictly Diagonally Dominant Matrix

Chen Hengxin

(*Department of Management Information Science*)

Abstract This paper gives the SOR-method ($0<\omega<C$, $C>1$) convergence and error estimate formula in strictly diagonally dominant matrix. The error estimate constant h_ω depends only on the element of matrix A and the relaxation factor ω, and thus avoids trouble in computing SOR iterative matrix $L_\omega=(D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega U]$. Consequently, it has a fairly good practical value.

Key words diagonally dominant matrix, conergence, error estimate, successive over relaxation method