第12卷 第2期 华侨大学学报自然科学版 Vol.12 No.2
1991年4月 JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Apr. 1991

降次线性算子的一些性质

陈玛添
(管理信息科学系)

摘要 本文主要研究在多项式空间中降次线性算子的一些与导数密切有关的性质

关键词 降次线性算子、基，台劳展开系，双标准正交

0 引言

设P为由全体多项式所组成的空间，则在这空间中微分算子$D=d/dx$具有：(1)线性：对$f,P\in p$及数α,β，有$D(\alpha f+\beta g)=\alpha Df+\beta Dg$；(2)严格逐一降次：$(D^i f)(x)(i=1,2,\cdots,\ )$较$(D^{i-1}f)(x)$低一次。

不难发现，具有性质(1)，(2)的算子不止微分算子D，例如数值分析[1]中的前向差分算子$\triangle$为$(\triangle f)(x)=f(x+h)-f(x)$；后向差分算子$\nabla$为$(\nabla f)(x)=f(x)-f(x-h)$；中心差分算子为$\delta=f(x+h/2)-f(x-h/2)$等也是这种算子。

定义 1 空间p中具有性质(1)，(2)的算子称为降次线性算子[1]，记为L。

本文将研究降次线性算子L一系列与微分运算密切有关的性质。

1 从Taylor级数展开到Taylor展开系

设$f\in P$，则f在点$x=\alpha$的Taylor级数展开式为

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}(D^j f)(\alpha)\frac{(x-\alpha)^j}{j!},\tag{1}$$

为把Taylor级数展开推广到降次线性算子，现先分析(1)的一些对后面问题的研究颇有启发的特点，即

(1)多项式$a_j(x)=(x-a)^j/j!\ (j=0,1,2,3,\cdots)$，组成空间$P$的一个基$\{1,(x-a)/1!,(x-a)^2/2!,\cdots,(x-a)^j/j!,\cdots\}$。

(2)微分算子$D_j=D^j(j=0,1,2,\cdots)$，所组成的序列$\{D_i\}$与基$\{a_j\}$为标准双正交，即

本文1989-09-11收到.

$$D_i\alpha_j=(D^i\alpha_j)(a)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 当 i=j,\\ 0, & 当 i\neq j,\end{cases}$$

（3）D和$\{\alpha_j\}$满足

$$\begin{cases}\alpha_0=1,\\ \alpha_j(a)=0(j>0),\\ D\alpha_j=\alpha_{j-1}(j>0).\end{cases}$$

（4）设E_a为平移算子 $(E_af)(x)=f(x-\alpha)$，则D与E_a具有可交换性$DE_a=E_aD$。

现在证明在降次线性算子中。有类似于Taylor级数展开的展开系。

定理 1 设L为降次的线性算子，$\{\alpha_j\}$为P中的一个基，则每一$f\in P$在点$x=\alpha$可表为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(L^kf)(\alpha)\alpha_k(x) \tag{2}$$

的充要条件，是泛函$L_if=(L^if)(\alpha)$和多项式α_j为双标准正交，即$L_i\alpha_j=\delta_{ij}$。

证明 设表达式（2）成立，取$f(x)=\alpha_j(x)$，即有

$$\alpha_j(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(L^i\alpha_j)(a)\alpha_i(x),$$

由于$\{\alpha_j\}$为空间P的一个基，所以有

$$L_i\alpha_j=(L^i\alpha_j)(a)=\delta_{ij}.$$

反之，设$\{L_i\}$与$\{\alpha_k\}$具有双标准正交性，并把任一$f\in P$表为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\alpha_k(x),$$

则应用线性泛函L_j，即有

$$(L^jf)(a)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(L^j\alpha_k)(a)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\delta_{jk}=a_j,$$

所以

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(L^kf)(a)\alpha_k(a).$$

根据定理 1 的结果，我们给出

定义 2 若$L^i\alpha_j=\delta_{ij}$，则称降次线性算子L和$\{\alpha_j\}$在点$x=\alpha$构成一个 Taylor 展开系；在$x=0$的Taylor展开系称为Maclaurin展开系。试例，若记

$$(x-\alpha)^{(j)}=\begin{cases}1, & 当 j=0,\\ (x-\alpha)(x-\alpha-h)\cdots(x-\alpha-(j-1)h), & j=1,2,3,\cdots,\end{cases}$$

且取$L=\triangle$，$\alpha_j=(x-\alpha)^{(j)}/j!\ h^j$，则易知$L_i\alpha_j=(\triangle^i\alpha_j)(\alpha)=\delta_{ij}$，故每一$f\in P$均可表为

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(\triangle^if)(a)\frac{(x-\alpha)^{(i)}}{i!\ h^i}.$$

Taylor展开系有如下一个后面证明中要用到的特性，即

定理 2　L和$\{\alpha_j\}$在$x=a$构成Taylor展开系的充要条件是：(1)$\alpha_0=1$；(2)$\alpha_j(a)=0$，当$j>0$；（3）$L\alpha_j=\alpha_{j-1}$，当$j>0$。

证明　设全部条件均成立，则$L\alpha_j=\alpha_{j-1}$，$L^2\alpha_j=\alpha_{j-2}$，…，$L^i\alpha_j=\alpha_{j-i}$，（$j\geqslant i$），故

$$(L^i\alpha_j)(a)=\begin{cases}\alpha_{j-i}(a)=0，当j>i，\\ \alpha_0(a)=1，当i=j，\\ L^{i-j}\alpha_0=0，当i>j，\end{cases}$$

即

$$L^i\alpha_j=(L^i\alpha_j)(a)=\delta_{ij}.$$

反之，若L和$\{\alpha_j\}$在$x=a$构成一Taylor展开系，则由定义2有：（1）$\alpha_0\equiv\alpha_0(a)=(L^0\alpha_0)(a)=1$；（2）当$j>0$时，$\alpha_j(a)=(L^0\alpha_j)(a)=\delta_{0j}=0$，而由定理1，有

$$(L\alpha_j)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(L^k(L\alpha_j))(a)\alpha_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(L^{k+1}\alpha_j)(a)\alpha_k(x)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\delta_{k+1\ j}\alpha_k(x)=\alpha_{j-1}(x).$$

由定理2可以推知：若$\{\alpha_j\}$为满足条件（1），（2），（3）的基，则必存在唯一的降次线性算子L，使L和$\{\alpha_j\}$在$x=a$构成一个Taylor展开系；反之，对每一降次线性算子L及每一实数a，必对应地有唯一的一个基$\{\alpha_j\}$在$x=a$构成一个Taylor展开系。特别地，对每一降次线性算子，必存在唯一的基$\{\alpha_j\}$，使L和$\{\alpha_j\}$构成Maclaurin展开系。试例，设$x_j=x_0+jh$，$0\leqslant j\leqslant n$，$h>0$，H为均差算子，定义为

$$(H^0f)(x_0)=f[x_0]=f(x_0),$$

$$(Hf)(x_0)=f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},$$

$$(H^2f)(x)=f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{(Hf)(x_1)-(Hf)(x_0)}{x_2-x_0}$$

$$\vdots$$

$$(H^nf)(x_0)=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_n]-f[x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

$$=\frac{(H^{n-1}f)(x_1)-(H^{n-1}f)(x_0)}{x_n-x_0},$$

易知H为降次线性算子。若取$\alpha_j(x)=(x-x_0)^{(j)}/j!$，则有：（1）$\alpha_0=1$；（2）$\alpha_j(x_0)=0$，当$j>0$；（3）$(H\alpha_j)(x)=[\alpha_j(x_1)-\alpha_j(x)]/(x_1-x_0)=[\alpha_j(x+h)-\alpha_j(x)]/h=[(x-x_0)\cdot(x-x_0-h),\cdots,(x-x_0-(j-2)h)]/[(j-1)!]=(H\alpha_{j-1})(x)$。

所以，由定理2，H与$\{\alpha_j\}$在$x=x_0$构成Taylor展开系，即对$f\in P$，有

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(H^if)(x_0)\frac{(x-x_0)^{(i)}}{i!}.$$

正如在微分运算中Taylor级数与Maclaurin级数的关系一样，Taylor展开系与Maclanrin展开系也有下面类似的关系，即

定理 3 设L为降次线性算子，$\{\alpha_j\}$为使L和$\{\alpha_j\}$构成Maclaurin展开系的一个基，则L和$\{x_j(x-\alpha)\}$为一在$x=a$的Taylor展开系的充要条件是

$$LE_a=E_aL.$$

证明 设 $LE_a=E_aL$，则对于基$\{\alpha_j(x-\alpha)\}$，有：（1）$\alpha_0(x-a)=\alpha_0(x)\equiv 1$；（2）$\alpha_j(x-\alpha)|_{x=a}=\alpha_j(0)=0$，当 $j>0$；（3）$Lx_j(x-\alpha)=LE_a\alpha_j(x)=E_aL\alpha_j(x)=E_a\alpha_{j-1}(x)=\alpha_{j-1}(x-a)$。所以，由定理2，$L$和$\{\alpha_j(x-\alpha)\}$在$x=a$构成Taylor展开系。反之，若$L$和$\{\alpha_j(x-\alpha)\}$在$x=\alpha$构成一个Taylor展开系，则对任一$f\in P$，可考虑它的Maclnurin展开

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(L^kf)(0)\alpha_k(x).$$

由定理2，$L\alpha_k(x-a)=\alpha_{k-1}(x-a)$，于是有

$$\begin{aligned}(LE_af)(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}(L^kf)(0)(LE_a\alpha_k)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(L^kf)(0)(L\alpha_k(x-a))\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(L^kf)(0)\alpha_{k-1}(x-a)=\sum_{k=0}^{\infty}(L^kf)(0)E_a\alpha_{k-1}(x)\\&=E_a\sum_{k=0}^{\infty}(L^kf)(0)\alpha_{k-1}(x)=(E_aLf)(x),\end{aligned}$$

即

$$LE_a=E_aL.$$

为了进一步研究具有性质$LE_a=E_aL$的降次线性算子的特性，给出

定义 3 对一切a，恒满足$LE_a=E_aL$的降次线性算子，称为Taylor算子。试例，易知$E_aD=DE_a$，$E_a\triangle=\triangle E_a$，$E_a\nabla=\nabla E_a$，$HE_a=E_aH$，$E_a\delta=\delta E_a$，所以算子$D$，$\triangle$，$\nabla$,$H$，$\delta$均为Taylor算子。

2 Taylor 算子的特性

下面用两个定理从不同的角度来说明Taylor算子的特性。

定理 4 设L为降次线性算子，它关于基$\{x^j/j!\}$的矩阵为(a_{ij})，则L为Taylor算子的充要条件为

$$a_{n\ n+k}=a_{0\ k}\quad (K\geqslant 0),$$

即矩阵(a_{ij})每一上对角线的元素相等。

证明 由于L为降次线性算子，对$j=1,2,3,\cdots$有

$$L\frac{x^j}{j!}=a_{0j}+a_{1j}\frac{x}{1!}+a_{2j}\frac{x^2}{2!}+\cdots+a_{j-1\,j}\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}+0\frac{x^j}{j!}+0\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}+\cdots$$

及

$$L(1)=0.$$

所以L关于基$\{x^j/j!\}$的矩阵

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \qquad (当 i\geqslant j,\ a_{ij}=0),$$

为上三角形矩阵，同样对平移算子E_a，由于

$$E_a(1)=1=1+0\frac{x}{1!}+0\frac{x^2}{2!}+\cdots,$$

$$E_a\frac{x^j}{j!}=\frac{(x-a)^j}{j!}=\frac{(-a)^j}{j!}+\frac{(-a)^{j-1}}{(j-1)!}\frac{x}{1!}+\frac{(-a)^{j-2}}{(j-2)!}\frac{x^2}{2!}$$

$$+\cdots+\frac{x^j}{j!}+0\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}+\cdots,$$

$$\vdots$$

所以E_a关于基$\{x_j/j!\}$的矩阵

$$(b_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & b_{01} & b_{02} & b_{03} & \cdots \\ 0 & 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & b_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

也是上三角形矩阵。其中

$$b_{ij}=\begin{cases} 0, & 当 i>j, \\ \dfrac{(-a)^{j-i}}{(j-i)!}, & 当 i\leqslant j. \end{cases}$$

矩阵a_{ij}和b_{ij}的乘积为

$$(a_{ij})(b_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b_{01} & b_{02} & b_{03} & \cdots \\ 0 & 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & b_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & c_{01} & c_{02} & c_{03} & \cdots \\ 0 & 0 & c_{12} & c_{13} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & c_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}=(c_{ij})$$

其中

$$c_{ij}=\sum_{k=i+1}^{j}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=i+1}^{j}a_{ik}\frac{(-a)^{j-k}}{(j-k)!} \quad (i<j),$$

得

$$(a_{ij})(b_{ij})=\begin{pmatrix}1 & b_{01} & b_{02} & b_{03} & \cdots\\ 0 & 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & b_{23} & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots\\ 0 & 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & a_{23} & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} & \cdots\\ 0 & 0 & d_{12} & d_{13} & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & d_{23} & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}=(d_{ij})$$

其中

$$d_{ij}=\sum_{k=i}^{j-i}b_{ik}a_{kj}=\sum_{k=i}^{j-i}a_{kj}\frac{(-a)^{k-i}}{(k-i)!}\qquad(i<j)$$

由于L为Taylor算子，所以$LE_a=E_aL$,即$(c_{ij})=(d_{ij})$,由此得

$$\sum_{k=i+1}^{j}a_{ij}\frac{(-a)^{j-k}}{(j-k)!}=\sum_{K=i}^{j-1}a_{kj}\frac{(-a)^{k-i}}{(k-i)!}$$

比较上式两边a的同次幂，即得$a_{i,j-1}=a_{i+r,j}(r\geqslant 0,\ i<j)$，这说明矩阵$(a_{ij})$的每一上对角线的元素均相等。由于上述的论证过程显然是可逆的，故定理得证。

定理 5　L为Taylor算子的充要条件是：它具有形式

$$L=\sum_{k=1}^{\infty}a_kD^k\qquad(a_1\neq 0)。\tag{3}$$

证明　设L为任一Taylor算子，且$f(x)\in P$的Taylor展开式为

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}(D^jf)(0)\frac{x^j}{j!},$$

对上式应用Taylor算子L及定理 4 的结论，有

$$(Lf)(x)=\sum_{j=0}^{\infty}(D^jf)(0)\ L\frac{x^j}{j!}=(Df)(0)a_{01}+(D^2f)(0)(a_{02}+a_{12}\frac{x}{1!})$$

$$+(D^3f)(0)(a_{03}+a_{13}\frac{x}{1!}+a_{23}\frac{x^2}{2!})+\cdots+(D^jf)(0)(a_{0j}+a_{1j}\frac{x}{1!}$$

$$+\cdots+a_{j-1\ j}\frac{x^{j-1}}{(j-1)!})+\cdots$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}(D^jf)(0)\sum_{i=0}^{j-1}a_{ij}\frac{x_i}{i!}=\sum_{j=1}^{\infty}(D^jf)(0)\sum_{i=0}^{j-1}a_{i,\ i+(j-1)}\frac{x^i}{i!}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}(D^jf)(0)\sum_{i=0}^{j-1}a_{0\ j-i}\frac{x^i}{i!}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{0k}\sum_{J=K}^{\infty}(D^jf)(0)\frac{x^{j-k}}{(j-k)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}a_{0k}(D^kf)(x)=(\sum_{k=1}^{\infty}a_{0k}D^kf)(x),$$

显然上述的论证是可逆的，故定理得证。

由定理 5 见Taylor算子与微分算子有密切的联系，当$\alpha_1=1$，$a_k=0(k=2,3,\cdots)$时，L即为微分算子D，而其余的Taylor算子均可表为微分算子D的"无穷幂级数"的形式，例如，当$a_k=h^k/k!$时，前向差分算子即可表为

$$\triangle=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^k}{k!}D^{k[1]}.$$

3　关于降次线性算子的链锁法则与"中值"性质

导数运算的一个重要性质是所谓链锁法则．这法则对降次线性算子L来说是否普遍成立？下面研究这个问题．

定义 4　对$f,g\in P$，记$(f_0g)(x)=f(g(x))$，若

$$(L(f_0g))(x)=(Lf)(g(x))(Lg)(x), \tag{4}$$

则称降次线性算子L为链锁算子．

定理 6　在降次线性算子中，D是唯一的链锁算子．

证明　（1）先证在Taylor算子中，D是唯一的链锁算子．由定理 5 知，Taylor 算子L必可表为

$$L=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_iD^i \qquad (\lambda_1\neq 0),$$

在链锁法则（4）中，若取$f(x)=g(x)=x^2$，则得$\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$．现设存在某些其它非零的系数$\lambda_j(j\geqslant 5)$使

$$L=D+\lambda_jD^j+\cdots \qquad (j\geqslant 5),$$

于是在链锁法则中取$f(x)=x^2$，$g(x)=x^j$，有

$$(L(f_0g))(x)=2jx^{2j-1}+\lambda_j\frac{(2j)!}{j!}x^j+\cdots,$$

$$(Lf)(g(x))(Lg)(x)=2jx^{2j-1}+2j!\ \lambda_jx^j+\cdots, \quad (j\geqslant 5),$$

比较两式同类项系数，即得当$j\geqslant 5$时，$\lambda_j=0$，此与假设$\lambda_j\neq 0(j\geqslant 5)$矛盾，所以当$j>1$时$\lambda_j=0$，从而$L=D$．

（2）证明每一链锁算子L必是Toylor算子．设$\{\alpha_j\}$为一多项式序列，它与L构成Maclaurin系，则由定理 2，$\alpha_0=1$，$\alpha_1=\lambda x(\lambda\neq 0)$，且$L\alpha_1(x)=\alpha_0=1$，即$Lx=1/\lambda$．但若在链锁法则（4）中取$f=g=\alpha_1$，则得$\lambda=1$．于是对$f\in P$，有

$$\begin{aligned}(LE_af)(x)&=Lf(x-a)=(Lf)(x-a)L(x-a)=(Lf)(x-a)\\&=(E_aLf)(x),\end{aligned}$$

所以，L为Taylor算子，从而由（1）可知$L=D$．

可见，链锁法则是导数所独有的特性．

Rolle定理是导数运算中的重要结果之一，这一定理所反映的"中值"性质，在降次线性算子中也不是普遍成立的．为证明这问题，我们先引进一个概念．

定义 5　若对一切$f\in P$和实数a,b，当$f(a)=f(b)=0$时，恒有$\xi\in(a,b)$使$(Lf)(\xi)=0$，则称降次线性算子L为Rolle算子．

定理 7 Rolle算子必是微分算子。

证明 设L为Rolle算子，先证明与L构成Maclaurin展开系的唯一序列$\{a_j\}$必具有形式

$$a_j(x)=\alpha_j x^j. \qquad (5)$$

由定理2，对$j=0,1$，结论成立。现设并非所有$a_j(x)$均有这种形式，令n为使$a_n(x)=x^kP(x)$的最小正整数，其中$P(0)\neq 0$，且$1\leqslant k<n$。于是若对实数a，令$f(x)=a_n(x)-x^kP(a)$，则有$f(a)=f(0)=0$，而在0，a之间不存在ξ使$(Lf)(\xi)=0$。事实上，由定理2有

$$(Lf)(x)=(La_n)(x)-\frac{p(a)}{\alpha_k}(La_k)(x)=a_{n-1}(x)-\frac{p(a)}{\alpha_k}a_{k-1}$$

$$=\alpha_{n-1}x^{n-1}-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}P(a)x^{k-1}=x^{k-1}\left(\alpha_{n-1}x^{n-k}-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}P(a)\right),$$

由于$p(0)\neq 0$，可取一$a\neq 0$，使上式右端两因子之积在0，a之间总保持正号或负号，即在0，a之间不存在ξ使$(Lf)(\xi)=0$。这与L为Rolle算子相矛盾。所以对所有的j，$a_j=\alpha_j x^j$。

其次若设$\beta_k=\alpha_{k-1}/\alpha_k$，则$Lx^k=(\alpha_{k-1}/\alpha_k)x^{k-1}=\beta_k x^{k-1}$，由于$a_0=\alpha_0=1$，若取$\alpha_1=1$，则$\beta_1=1$。现进一步来证明对所有的$m>1$，$\beta_m=m$。应用归纳法，假设$j=1,2,\cdots,m-1$，$\beta_j=j$，并引进辅助函数

$$\sigma_m(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_m) \qquad (\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_m),$$

由于L为Rolle算子，且σ_m在区间$[\lambda_1,\ \lambda_m]$有m个零点，所以$L^{m-1}\sigma_m$在$(\lambda_1,\ \lambda_m)$内有一零点。但由归纳假设，有

$$(L^{m-1}\sigma_m)(x)=\beta_m(m-1)!\ x-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)(m-1)!\ ,$$

上式仅当$x_0=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i/\beta_m$等于零，且对一切$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\cdots$，$\lambda_m$，要使$x_0\in(\lambda_1,\ \lambda_m)$仅当$\beta_m=m$才有可能。因此，对所有$j>0$，$\beta_j=j$，从而$a_j=x_j/j!$，且$Lx^k=kx^{k-1}$，所以

$$L=D.$$

可见，Rolle定理所反映的“中值”性也是微分运算所独有的特性。

4 推广线性算子到更大空间的问题

上面在空间P中研究了降次线性算子一系列与导数运算有密切联系的性质，把各种降次线性算子统一在Taylor展开系之中，并证明了微分算子的两个独有的特性——“链锁”性和“中值”性，给古典微分运算的唯一性以一种新的认识。下面进一步研究把降次线性算子的运算从空间P推广到更大空间的问题。

设C^{n+1}是由$[a,b]$上具有$(n+1)$阶连续导数的全体函数所构成的空间，则数学分析中的Taylor定理可表述为：设$f\in C^{n+1}$，$x_0\in[a,b]$，则成立

$$f(x)=f(_0)+\frac{(Df)}{1!}(x_0)(x-x_0)+\frac{(D^2f)}{2!}(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{(D^nf)}{n!}(x_0)(x-x_0)^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中ξ介于x_0与x之间。

现在来证明在空间C^{n+1}中，对降次线性算子L也有类似于Taylor定理的如下定理。

定理 8 设（1）$f\in C^{n+1}$，多项式$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(L^if)(x_0)a_i(x)$且$L^ia_j=\delta_{ij}$；（2）在点点$a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n=b$处，$f(x_i)=P_n(x_i)$，$i=0,1,2,\cdots,n$。则对任一$x\in[a,b]$，有

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}(L^if)(x_0)a_i(x)+R_n(x),\tag{7}$$

其中余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

ξ介于x_0与x之间。

证明 由给定条件知$R_n(x_i)=0$，$i=0,1,2,\cdots,n$。于是

$$R_n(x)=k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-n)=k\sigma_n(x),\tag{8}$$

其中k为待定的常数。现把x看成$[a,b]$上一个固定点，并作函数

$$F(t)=f(t)-P_n(t)-k\sigma_n(t),$$

则由给定条件可知，$F(t)$在点$x_0,x_1,x_2,\cdots x_n$及x处均为零，故$F(t)$在$[a,b]$上有$(n+2)$个零点，从而由Rolle定理，$F'(t)$在$F(t)$的两个零点之间至少有一个零点，故$F'(t)$在$[a,b]$内至有$(n+1)$个零点，再应用Rolle定理，可知$F''(t)$在$[a,b]$内至少有n个零点。依此类推，$F^{(n+1)}(t)$在(a,b)内至少有一个零点，令$\xi\in(a,b)$表示这个零点，即有

$$F^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!\ k=0.$$

于是

$$k=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

把它代入式（8），即得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\sigma_n(x).$$

推论 在区间I上，当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$时，

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(L^if)(x_0)a_i(x)\quad(x\in I),$$

其中

$$L^ia_j=\delta_{ij},$$

最后看定理 8 的几个特例。

（1）若取$L=\triangle$，$x_i=x_0+ih(i=0,1,2,\cdots,n)$，$a_i(x)=(x-x_0)^{(i)}/(i!\ h^i)$，则由于$P(x_i)=f(x_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$，且$\triangle^ia_j=\delta_{ij}$，有

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}(\triangle^if)(x_0)\frac{(x-x_0)^{(i)}}{i!\ h^i}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_n)^{n+1},\tag{9}$$

ξ介于x_0与x_n之间。此即为前向差分公式[1]。

（2）注意到$f[x_0,x_1,x_2,\cdots x_n]=[(\triangle^nf)(x_0)]/(n!\ h^n)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=[f^{(n)}(x_0)]/n!$，式（9）可写成

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)$$

$$\cdots(x-x_{n-1})+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \quad (\xi\text{介于}x_0\text{与}x_n\text{之间},$$

令$h\to0$，对上式两边取极限，即得f在点x_0的Taylor公式（6）。

可见定理8是Taylor定理的推广。

（3）若取$L=\nabla$，$x_i=x_0-ih$，$(i=0,1,2,\cdots,n)$，$a_i(x)=(x-x_0)^{(i)}/(i!\ h^i)$则得后向差分公式，即

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(\nabla^i f)(x_0)}{i!\ h^i}(x-x_0)^{(i)}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)},$$

ξ介于x_0与x_n之间。

参 考 文 献

[1] Hildebrand, F. B., *Intraduction to Numerical Analysis*, Mcgraw-Hill, New York, (1956).

[2] G. M. 菲利普斯, P. J. 泰勒，数值分析的理论及其应用，上海科学技术出版社，(1980).

Some Properties of Depressed Linear Operators

Chen Matjan

(*Department of Management Information Science*)

Abstract The author studies the depressed operators in space p of all the polynomials and puts stress on some of its properties intimately connected with the derivative.

Key words depressed linear operator, basis, Taylor expansion system, biorthonormal