第12卷 第2期 华侨大学学报自然科学版 Vol.12 No.2
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1991年4月 (NATURAL SCIENCE) Apr. 1991

最优ε策略的性质及线性度量对策的值

王 志 雄

(管理信息科学系)

摘要 本文确定了线性度量对策两个局中人具有特定的最优ε策略类，利用这些策略类的性质，估计了线性度量对策的值。

关键词 线性度量空间、两人对策，零和对策，紧，策略

0 引言

给定度量空间 $(R,\ d(\cdot,\ \cdot))$ 的紧集D，D上的度量对策$\Gamma=(D,\ D,\ d)$指的是取D为两个局中人的纯策略空间，以度量 $d(\cdot,\ \cdot)$为支付函数的二人零和对策。这对策的值$V(\Gamma)$和D的直径$r(D)$恒存在[1,2]。当R为一般的度量空间，D取遍其全体紧集时，O.Gross得到

$$\sup V(\Gamma)/r(D)=1,\qquad \inf V(\Gamma)/r(D)=1/2,$$

而且，下确界是可达的[1]。

当R为n维Euclid空间，D取遍其全体有界闭凸集时，作者得到

$$\sup V(\Gamma)/r(D)=\sqrt{n/2(n+1)},\qquad \inf V(\Gamma)/r(D)=1/2,$$

而且，上下确界都是可达的[3]。

本文利用度量对策的最优ε策略的性质，对线性度量对策的值做一估计，并在D为Euclid平面的有界闭集的情况下，对对策的值进一步的估计。

1 最优ε策略的性质

设$(R,\ d)$是线性度量空间，若D是R的紧集，必有界。从而在所讨论的问题中，不妨设D含在单位闭球$S=\{x\in R:\ d(x,\ 0)\leqslant 1\}$中。此后，如无另加声明，$R$，$d$，$D$的意义都如上假设。这时，度量对策$\Gamma=(D,\ D,\ d)$的值恒存在：

$$\begin{aligned}V(\Gamma)&=\sup_{\mu\in M_D}\inf_{\nu\in N_D}\int d(\cdot,\ \cdot)d(\mu\times\nu)\\&=\inf_{\nu\in N_D}\sup_{\mu\in M_D}\int d(\cdot,\ \cdot)d(\mu\times\nu)\end{aligned}\qquad(1)$$

本文1989－09－24收到。

其中，$M_D = N_D$ 是两个局中人的混合策略空间，即集合 D 上的概率测度。

给定 $\varepsilon > 0$，若存在 $\mu^* \in M_D$，使得

$$\int d(\cdot, \cdot) d(\mu^* \times \nu) \geqslant V(\Gamma) - \varepsilon, \qquad (\forall \nu \in N_D), \tag{2}$$

则称 μ^* 为局中人Ⅰ的最优 ε 策略。

因为对一切 $y \in D$，$\{y\}$ 为 D 之一 Borel 集，故式（2）等价于

$$\int d(\cdot, y) d\mu^* \geqslant V(\Gamma) - \varepsilon, \qquad (\forall y \in D). \tag{3}$$

类似的，若

$$\int d(x, \cdot) d\nu^* \leqslant V(\Gamma) + \varepsilon, \qquad (\forall x \in D), \tag{4}$$

则称 $\nu^* \in N_D$ 为局中人Ⅱ的最优 ε 策略。

给定 $\mu \in M_D$，若存在 $D_0 \subset D$，使 $\mu(D \setminus D_0) = 0$，则称 μ 的负荷为 D_0，若 D_0 是有限集时，称 μ 是有限负荷的策略。

由式（1），对任意给定的 $\varepsilon > 0$，两个局中人的最优 ε 策略都存在，而且还有。

引理1 若 D 是 (R, d) 的全有界集，对策 $\Gamma = (D, D, d)$ 的值存在，则它的两个局中人都有有限负荷的最优 ε 策略。

证 设 μ_0 是局中人Ⅰ的一个最优 $\varepsilon/2$ 策略，由式（3）得

$$\int d(\cdot, y) d\mu_0 \geqslant V(\Gamma) - \varepsilon/2, \qquad (\forall y \in D).$$

又设 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 是 D 的一个 $\varepsilon/2$ 网，令

$$A_1 = \{x \in D: d(x, x_1) \leqslant \varepsilon/2\},$$
$$A_2 = \{x \in D \setminus A_1: d(x, x_2) \leqslant \varepsilon/2\},$$
$$\vdots$$
$$A_n = \{x \in D \setminus A_1 \setminus \cdots \setminus A_{n-1}: d(x, x_n) \leqslant \varepsilon/2\}.$$

则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 形成 D 的一个划分，且都是 D 之 Borel 集，令 $\alpha_i = \mu_0(A_i)$，并对 D 之任意 Borel 集 E，令

$$\mu^*(E) = \sum_{i:\, x_i \in E} \alpha_i, \tag{5}$$

则 μ^* 是局中人Ⅰ的一个有限负荷最优 ε 策略。

同理可证局中人Ⅱ有有限负荷最优 ε 策略，证毕。

定理1 D 是线性度量空间 R 的紧集，则度量对策 $\Gamma = (D, D, d)$ 的局中人Ⅰ恒存在负荷含在 D 的边界 ∂D 中的有限负荷最优 ε 策略。

证 由引理1，局中人Ⅰ存在有限负荷最优 ε 策略 μ^*，其负荷 $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset D$，

$$\mu^*(\{x_i\}) = a_i > 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1.$$

当 $x_i \in \partial D$ 时，令 $\hat{\mu}(\{x_i\}) = a_i$；当 $x_i \in \partial D$ 时，过 x_i 任作一直线 $x = x_i + \lambda t$（$-\infty < \lambda < +\infty$，$t \neq 0$，$t \in R$），令

$$\lambda_{i_1} = \sup\{\lambda: x = x_i + \lambda t \in D\}, \qquad \lambda_{i_2} = \inf\{\lambda: x = x_i + \lambda t \in D\},$$

因 D 是紧的，故 $x_{i_1} = x_i + \lambda_{i_1} t \in \partial D$，$x_{i_2} = x_i + \lambda_{i_2} t \in \partial D$，且 $-\infty < \lambda_{i_2} < 0 < \lambda_{i_1} < +\infty$，令

$$\hat{a}(\{x_{i_1}\}) = -\lambda_{i_2}a_i/\lambda_{i_1}-\lambda_{i_2}, \qquad \hat{a}(\{x_{i_2}\}) = \lambda_{i_1}a_i/\lambda_{i_1}-\lambda_{i_2},$$

则$\hat{a}$是负荷在∂D中的有限负荷策略，且对一切$y\in D$,

$$\int d(\cdot, y)d\hat{a} = \sum{}_1 d(x_i, y)a_i$$

$$+\sum{}_2 \left[d(x_{i_1}, y)\left(-\frac{\lambda_{i_2}a_i}{\lambda_{i_1}-\lambda_{i_2}}\right)+d(x_{i_2}, y)\cdot\frac{\lambda_{i_1}a_i}{\lambda_{i_1}-\lambda_{i_2}}\right]$$

$$\geqslant \sum{}_1 d(x_i, y)a_i+\sum{}_2 d\left(\frac{-\lambda_{i_2}x_{i_1}+\lambda_{i_1}x_{i_2}}{\lambda_{i_1}-\lambda_{i_2}}, y\right)a_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n} d(x_i, y)a_i = \int d(\cdot, y)d\mu^*.$$

其中，Σ_1表示对使$x_i\in\partial D$的一切i求和，Σ_2表示对使$x_i\overline{\in}\partial D$的一切$i$求和。不等式得自度量$d$的下凸性：

$\lambda d(x_1, y)+(1-\lambda)d(x_2, y)\geqslant d(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, y)$，对$(0\leqslant\lambda\leqslant 1, x_1, x_2, y\in R)$，结合式（3）得$\hat{a}$也是局中人Ⅰ的最优ε策略。证毕。

设$x, y\in D$，若开线节$(x, y)=\{z: z=\lambda x+(1-\lambda)y, 0<\lambda<1\}$与$D$不交，则称$x, y$为$D$的相互可见点偶。

定理2　D是线性度量空间R的紧集，则度量对策$\Gamma=(D, D, d)$的局中人Ⅱ恒存在有限负荷的最优ε策略，而且，若负荷的元数＞1，则负荷的点，两两形成相互可见点偶。

证　由引理1，局中人Ⅱ有有限负荷最优ε策略ν^*，设负荷为$\{y_1,\cdots,y_m\}$，$\nu^*(\{y_i\})=\beta_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$，$\sum_{i=1}^{m}\beta_i=1$。令$y_0=\sum_{i=1}^{m}\beta_i y_i$，称$\sum_{i=1}^{m}\beta_i d(y_0, y_i)$为点列$y_1, \cdots, y_m$关于权$\beta_1, \cdots, \beta_m$的偏心距。若$y_0\in D$，令$\hat{\nu}(\{y_0\})=1$，则由$d$之下凸性，对一切$x\in D$,

$$\int d(x, \cdot)d\hat{\nu}=d(x, y_0)\leqslant\sum\beta_i d(x, y_i)=\int d(x, \cdot)d\nu^*\leqslant V(\Gamma)+\varepsilon,$$

即$\hat{\nu}$是局中人Ⅱ的最优ε策略，负荷元数1。

若$y_0\overline{\in}D$，对m施行归纳法。

当$m=2$时，令

$$\lambda_1=\inf\{\lambda: \lambda y_1+(1-\lambda)y_0\in D, 0\leqslant\lambda\leqslant 1\},$$
$$\lambda_2=\inf\{\lambda: \lambda y_2+(1-\lambda)y_0\in D, 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}.$$

则$0<\lambda_1, \lambda_2<1$且$y_1'=\lambda_1 y_1+(1-\lambda_1)y_0\in D$，$y_2'=\lambda_2 y_2+(1-\lambda_2)y_0\in D$形成$D$的相互可见点偶，令

$$\hat{\nu}(\{y_1'\})=\lambda_2\beta_1/\lambda_1\beta_2+\lambda_2\beta_1, \qquad \hat{\nu}(\{y_2'\})=\lambda_1\beta_2/\lambda_1\beta_2+\lambda_2\beta_1.$$

由d之下凸性得$\hat{\nu}$也是局中人Ⅱ的最优ε策略，负荷仅由y_1'，y_2'这一相互可见点偶组成。

当$m>2$时，若$y_0'=\beta_1 y_1+\beta_2 y_2/\beta_1+\beta_2\in D$，令

$$\hat{\nu}(\{y_0'\})=\beta_1+\beta_2, \qquad \hat{\nu}(\{y_i\})=\beta_i\ (3\leqslant i\leqslant m),$$

则$\hat{\nu}$是负荷为$(m-1)$元集的最优ε策略，由归纳假设得证。若$y_0'\overline{\in}D$，以y_0'代替以上的y_0，构造y_1'，y_2'，则点系$\{y_1', y_2', y_3, \cdots, y_m\}$关于权$\lambda_2\beta_1(\beta_1+\beta_2)/\lambda_2\beta_1+\lambda_1\beta_2$，$\lambda_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)/\lambda_2\beta_1+\lambda_1\beta_2$，$\beta_3, \cdots, \beta_m$的偏心距小于点系$\{y_1, y_2, y_3, \cdots, y_m\}$关于权$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots,$

β_m的偏心距，因而，局中人Ⅱ的有限负荷最优ε策略中，具有最小偏心距的负荷（由D之紧性，这样的负荷必存在）相应的策略是合命题要求的最优ε策略。证毕。

2　度量对策值的初步估计

设∂D为D的边界，则∂D也是紧的。令$\Gamma_1=(D, D, d)$，$\Gamma_2=(\partial D, \partial D, d)$，$V(\Gamma_1)$和$V(\Gamma_2)$分别为对策$\Gamma_1$和$\Gamma_2$的值。它们显然是存在的，且有

定理3　$V(\Gamma_1)\leqslant V(\Gamma_2)$。

证　由定理1，对策Γ_1的局中人Ⅰ存在负荷含在∂D中的有限负荷最优ε策略$\hat{u}$，即$\hat{u}\in M_{\partial D}$，故对一切$y\in\partial D\subset D$，

$$\sup_{\mu\in M_{\partial D}}\int d(\cdot, y)d\mu\geqslant\int d(\cdot, y)d\hat{u}\geqslant V(\Gamma_1)-\varepsilon,$$

从而

$$V(\Gamma_2)=\inf_{v\in N_{\partial D}}\sup_{u\in M_{\partial D}}\int d(\cdot, \cdot)d(\mu\times v)\geqslant V(\Gamma_1)-\varepsilon.$$

由$\varepsilon>0$之任意性，得$V(\Gamma_2)\geqslant V(\Gamma_1)$。证毕。

若A为R的全有界集，则$\Gamma_1=(A, A, d)$的值存在。设$\bar{A}$为A之闭包，令$\Gamma_3=(\bar{A},\bar{A},d)$。

定理4　$V(\Gamma_3)=V(\Gamma_1)$

证　由引理1，对策Γ_1的局中人Ⅰ存在有限负荷最优ε策略μ^*，又对一切$y\in\bar{A}$，存在$y'\in A$，使$d(y, y')<\varepsilon$，利用三角不等式，对一切$x\in\bar{A}$，$|d(x, y)-d(x, y')|\leqslant d(y, y')<\varepsilon$，故对一切$\mu\in M_{\bar{A}}$，$|\int d(\cdot, y)d\mu-\int d(\cdot, y')d\mu|\leqslant\varepsilon$。从而，对一切$y\in\bar{A}$，

$$\sup_{\mu\in M_{\bar{A}}}\int d(\cdot,y)d\mu\geqslant\sup_{\mu\in M_{\bar{A}}}\int d(\cdot, y)d\mu\geqslant\int d(\cdot, y)d\mu^*\geqslant\int d(\cdot, y')d\mu^*-\varepsilon\geqslant V(\Gamma_1)-2\varepsilon,$$

即$V(\Gamma_3)\geqslant V(\Gamma_1)-2\varepsilon$。由$\varepsilon>0$的任意性得

$$V(\Gamma_3)\geqslant V(\Gamma_1). \tag{6}$$

从局中人Ⅱ的有限负荷最优ε策略出发，同理可得

$$V(\Gamma_1)\geqslant V(\Gamma_3), \tag{7}$$

由式(6)和(7)得证。

若R是有限维的，则为了含在单位球S内的集合D是紧的，只要求D是闭的就够了。

设μ^*是对策$\Gamma=(D, D, d)$中局中人Ⅰ的最优$\varepsilon/2$策略，负荷为$\{x_1, \cdots, x_n\}$，$\mu^*(\{x_i\})=a_i>0$。由有理数集在实数集中稠密性，存在有理数γ_i，使

$$\gamma_i>0,\quad |\gamma_i-a_i|<\varepsilon/4n\ (i=1, 2, \cdots, n,)\qquad \sum_{i=1}^{n}\gamma_i=1,$$

令$\hat{u}(\{x_i\})=\gamma_i$，因$D$含在单位球中，故$r(D)\leqslant 2$，从而，对一切$y\in D$，

$$\int d(\cdot, y)d\hat{u}=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i d(x_i, y)=\sum a_i d(x_i, y)+\sum(\gamma_i-a_i)d(x_i, y)$$

$$\geqslant V(\Gamma)(\varepsilon/2)-2n(\varepsilon/4n)=V(\Gamma)-\varepsilon.$$

即$\tilde{\alpha}$是对策Γ的局中人 I 的最优ε策略，它仅在点x_1，…，x_n处取正有理数概率γ_1，…，γ_n。

设诸γ_i的最小公分母为N，$\gamma_i = m_i/N$，则m_i是正整数，令Z是点x_1，…，x_n分别取m_1，…，m_n重的多重N元集，则$\tilde{\alpha}$可视为在Z的每一点z_i处取等概率$1/N$的最优ε策略，故对一切$y \in D$，有

$$V(\Gamma) \leqslant \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} d(z_i,\ y) + \varepsilon. \tag{8}$$

单位球S中，N元（多重）集$\{z_1, \cdots, z_N\}$的两两距离之和记为

$$f(z_1,\ \cdots,\ z_N) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} d(z_i,\ z_j).$$

令

$$F_N = \max_{z_1,\ \cdots,\ z_N \in S} f(z_1,\ \cdots,\ z_N),$$

则f是紧集$S\times\cdots\times S$上的N元连续函数，故F_N存在[2]。

实际上可证f在$\partial S\times\cdots\times\partial S$上某点达到最大值$F_N$，即得。

引理2 $F_N = \max\limits_{z_1,\cdots,z_N \in \partial S} f(z_1,\ \cdots,\ z_N)$.

因为，对一切z_1，…，$z_N \in D \subset S$，$f(z_1,\ \cdots,\ z_N) \leqslant F_N$，即

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} d(z_i,\ z_j) = 2f(z_1,\ \cdots,\ z_N) \leqslant 2F_N,$$

故有$j_0(1 \leqslant j_0 \leqslant N)$使

$$\sum_{i=0}^{N} d(z_i,\ z_{j_0}) \leqslant 2F_N/N.$$

在式（8）中取$y = z_{j_0} \in D$，得$V(\Gamma) \leqslant 2F_N/N^2 + \varepsilon$。又因为对一切$z_i$，$z_j \in S$，$0 \leqslant d \leqslant 2$，故对一切$N$，$0 \leqslant F_N/N^2 \leqslant 1$，从而，

$$F = \sup_{N=1,2,\cdots} \{F_N/N^2\}$$

存在，且$V(\Gamma) \leqslant 2F + \varepsilon$，由$\varepsilon > 0$之任意性，得

定理5 对有限维线性度量空间（R，d）中单位闭球S的任意闭集D，对策$\Gamma = (D,D,d)$的值满足

$$V(\Gamma) \leqslant 2F. \tag{9}$$

3 Euclid平面度量对策值的估计

若R为Euclid平面，$f(z_1,\ \cdots,\ z_N) = F_N$。由引理 2，可设$z_i$的坐标为（$\cos\theta_i$，$\sin\theta_i$），又$f$为$z_1$，…，$z_N$之对称函数，在关于原点旋转下，值不变，故不妨设

$$0 = \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \cdots \leqslant \theta_N \leqslant 2\pi, \tag{10}$$

把

$$f(z_1, \cdots, z_N) = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \sin\frac{\theta_j-\theta_i}{2}$$

记为$\phi(\theta)=\phi(\theta_2, \cdots, \theta_N)$，其定义域$E$由式（10）确定，是（$N-1$）维Euclid空间的有界闭凸集，由于$\phi(\theta)$是$\theta$的严格上凸函数，故存在唯一最大值点，又因$\partial\phi/\partial\theta_i$（$i=2, 3, \cdots, N$）当$\theta_2=2\pi/N, \theta_2=4\pi/N, \cdots, \theta_N=2(N-1)\pi/N$时为零，故$\phi$在$\hat{\theta}=(2\pi/N, \cdots, 2(N-1)\pi/N)$达到最大值：

$$F_N=\phi(\hat{\theta})=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} 2\sin(j-i)\pi/N=N\mathrm{ctg}\,\pi/2N.$$

又因为$N\to+\infty$时，$(1/N)\mathrm{ctg}(\pi/2N)$单调增加趋于$2/\pi$，故$F=2/\pi$。由定理5，度量对策$\Gamma=(D, D, d)$的值$V(\Gamma)\leqslant 4/\pi$。另一方面，取$D$为单位圆周，$\mu_0$，$\nu_0$为这圆周上的均匀分布，则对一切$x$，$y\in D$，

$$\int d(\cdot, y)d\mu_0=\int d(\cdot, \cdot)d\mu_0\times\nu_0=\int d(x, \cdot)d\nu_0=4/\pi,$$

即这对策的值恰为$4/\pi$，因而有

定理6 Euclid平面内单位圆上闭集D的度量对策$\Gamma=(D, D, d)$的值的上界是$4/\pi$，这个上界是可达的。

推论 $V(\Gamma)/r(D)\leqslant 4/\sqrt{3}\pi$，其中$D$为Euclid平面的紧集，对策$\Gamma=(D, D, d)$。

证 不妨设D含于单位圆内，由定理6

$$V(\Gamma)\leqslant 4/\pi, \tag{11}$$

因为任意紧集与它的闭凸壳有相同的直径，由文〔3〕的定理4（取$n=2$）得

$$r(D)\geqslant\sqrt{3}, \tag{12}$$

由式（11）和（12）得证。

如图1，设A_1, A_2, A_3是单位圆周上两两等距的三点，以A_1, A_2, A_3为圆心，$\sqrt{3}$为半径分别作弧$\widehat{A_1mA_2}$，$\widehat{A_2nA_3}$和$\widehat{A_3tA_1}$。令$D=\widehat{A_1mA_2}\cup\widehat{A_2nA_3}$，$\cup\ \widehat{A_3tA_1}$，则$D$的点可用幅角$\theta$唯一表示，$D$是Euclid平面上的连通紧集。

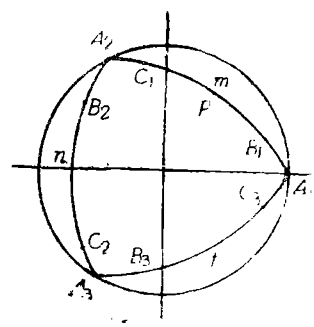

图1 单位圆内对策

定理7 D如上确定，则度量对策$\Gamma=(D, D, d)$的值$V(\Gamma)>2/\sqrt{3}$，从而，$V(\Gamma)/r(D)>2/3$。

证 局中人Ⅰ取策略μ_0：$\mu_0(\{A_i\})=1/3$，（$i=1, 2, 3$），则对一切$B\in D$，

$$\sum_{i=1}^{3}d(A_i, B)\geqslant 2\sqrt{3},$$

故

$$V(\Gamma)=\inf_{\nu\in N_D}\int d(\cdot, \cdot)d(\mu_0\times\nu)$$

$$=\frac{1}{3}\inf_{\nu\in N_D}\sum_{i=1}^{3}\int d(A_i, \cdot)d\nu\geqslant\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}=2/\sqrt{3}.$$

上式等号不能成立，否则，即$V(\Gamma)=2\sqrt{3}$，若考虑局中人Ⅱ的最优策略$\nu^*(\theta)$，因（1/3）

〔$\nu^*(\theta)+\nu^*(\theta+2\pi/3)+\nu^*(\theta+4\pi/3)$〕也是局中人Ⅱ的最优策略，故不妨设$\nu^*(\theta)$具有周期$2\pi/3$。

ν^*的负荷不能在$\{A_1, A_2, A_3\}$上，否则，由文〔4〕，对一切$B\in D$,

$$(1/3)(BA_1+BA_2+BA_3)\leqslant V(\Gamma_1)=2/\sqrt{3},$$

但是当取B为$\widehat{A_1mA_2}$中点P时，

$$(1/3)(PA_1+PA_2+PA_3)=(1+\sqrt{6}-\sqrt{2})/\sqrt{3}>2/\sqrt{3}$$

矛盾。因而，存在$P_0>0$及$\widehat{A_1mA_2}$上的点B_1, C_1; $\widehat{A_2nA_3}$上的点B_2, C_2; $\widehat{A_3tA_1}$上的点B_3, C_3（图1），使得

$$\widehat{A_1B_1}=\widehat{C_1A_2}=\widehat{A_2B_2}=\widehat{C_2A_3}=\widehat{A_3B_3}=\widehat{C_3A_1}=a\quad(0<a<\pi/6),$$

而且$\nu^*(\widehat{B_1C_1})=\nu^*(\widehat{B_2C_2})=\nu^*(\widehat{B_3C_3})=p_0$，令

$$\tilde{D}=D\setminus(\widehat{B_1C_1}\cup\widehat{B_2C_2}\cup\widehat{B_3C_3})$$

局中人Ⅰ仍取策略μ_0，则

$$V(\Gamma)=\sup\int d(\cdot,\ \cdot)d(\mu\times\nu^*)$$

$$\geqslant\int d(\cdot,\ \cdot)d(\mu_0\times\nu^*)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\int d(A_i,\ \cdot)d\nu^*$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}\int_{\widehat{B_jC_j}}d(A_i,\ \cdot)d\nu^*+\int_{\tilde{D}}d(A_i,\ \cdot)d\nu^*\right)$$

$$\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}p_0\left[(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{a}{2}\right)-1\right]>\frac{2}{\sqrt{3}},$$

又得矛盾，从而，证得$V(\Gamma)>2/\sqrt{3}$。

显然，D之直径$r(D)=\sqrt{3}$，立得定理之后半部分。证毕。

推论　$2/3<\sup V(\Gamma)/r(D)\leqslant4/\sqrt{3}\pi$，其中，$D$取遍Euclid平面的紧集，$\Gamma=(D, D, d)$。

参　考　文　献

[1] Gross, O., Advances in Game Theory, *Annals of Math' Studies*, Princeton, New Jersey, 52, (1964), 49—55.

[2] Eisenberg, M., *Topology*, Holt Inc., New York, (1974).

[3] 王志雄，关于Euclid度量对策的值，厦门大学学报（自然科学版），20，2（1981），155—167.

[4] Mckinsey, J. C. C., *Introduction to the Thtory of Game*, *McGraw-Hill*, *New York*, (1952).

Property of Optimal ε-Strategy and Value of Linear Metric Gbme

Wang Zhixiong

(Department of Management Information Science)

Abstract The author defines a specific class of optimal ε-strategies that must be possessed by both players of linear metric game。 By making use of this class of strategies, the value of linear metric game can be estimated。

Key words linear metric spaces, two-person games, zero-sum games, campact, strategy