第12卷 第2期 华侨大学学报自然科学版 Vol.12 No.2
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1991年4月 (NATURAL SCIENCE) Apr. 1991

搜索最优迭代参数的一个方法

蔡 火 萤

(管理信息科学系)

摘要 在求解线性组的方法中，GAOR方法(Generalized Iterarion Method)是最新的方法之一，其中有两个迭代参数．本文给出一个挑选最优迭代参数的方法．

关键词 挑选，最优，迭代，参数

0 引言

1978年，A. Hadjidimos在文〔1〕中提出求解线性组的AOR方法，1983年，他在文〔2〕中对AOR方法作了推广，并把推广后的AOR方法，简称为GAOR方法．1986年，他和A. Psimarni及A. Yeyies进一步研究了GAOR方法的收敛性问题[3]．GAOR方法具有两个迭代参数w，r和两个可选对角线矩阵D_1，D_2，迭代参数选取不同直接影响迭代过程的收敛性和收敛速度．目前许多人在研究保证迭代收敛的参数选取范围，但如何选取使收敛最快的最优迭代参数，在一般情况下，目前尚无人研究过．本文提出，当两个可选对角矩阵选定后，在一定条件下，这两个最优迭代参数的一种决定方法．

1 GAOR迭代法

对于所给线性代数方程组

$$Ax=b, \tag{1}$$

其中，$A\in E_{m\times n}$，$b\in E_m$，把A分解成为

$$A=D_A-C_L-C_U,$$

其中，D_A为A的对角线阵，$-C_L$，$-C_U$分别为A的严格下三角阵和严格上三角阵．则求解线性组(1)的GAOR迭代法为

$$x^{(k+1)}=[D_1-r(D_2+C_L)]^{-1}[(1-\omega)D_1+(\omega-r)(D_2+C_L)+\omega(D_3+C_U)]x^{(k)}$$
$$+\omega[D_1-r(D_2+C_L)]^{-1}b,\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{2}$$

其中$x^{(0)}$为初始迭代点，D_1，D_2，D_3是满足下面关系的可选对角线阵．

$$D_1-D_2-D_3=D_A=\mathrm{diag}(A),\qquad \det(D_1)\neq 0.$$

本文1989-05-27收到．

而ω，$r\in E_1$，分别称为松弛参数和加速参数，且$\omega\neq 0$，$\det(D_1-rD_2)\neq 0$。

2　GAOR方法的迭代矩阵

$$\begin{aligned}
L_{\omega,r} &\equiv L_{\omega,r}(D_1,\ D_2)\\
&=[D_1-r(D_2+C_L)]^{-1}[(1-\omega)D_1+(\omega-r)(D_2+C_L)+\omega(D_3+C_U)]\\
&=[I-rL]^{-1}[(1-\omega)(D_1-rD_2)^{-1}D_1+(\omega-r)(D_1-rD_2)^{-1}(D_2+C_L)\\
&\quad+\omega(D_1-rD_2)^{-1}(D_3+C_U)]=[I-rL]^{-1}[(I-\omega D)+(\omega-r)L+\omega U]\\
&=I-\omega[D_1-rD_2-rC_L]^{-1}A,
\end{aligned}$$

其中

$$D=(D_1-rD_2)^{-1}D_A,\qquad L=(D_1-rD_2)^{-1}C_L,\qquad U=(D_1-rD_2)^{-1}C_U.$$

当松弛参数ω，加速参数r取不同值以及对角线阵D_1，D_2取不同形式时，便可以得到不同形式的迭代法。

（1）当$D_1=D_A$，$D_2=D_3=0$时，

$$L_{\omega,r}=[D_A-rC_L]^{-1}[(1-\omega)D_A+(\omega-r)C_L+\omega C_U],$$

它就是AOR迭代法。

（2）当$\omega=1$，$r=0$时，

$$\begin{aligned}
L_{1,0}&=D_1^{-1}[(D_2+C_L)+(D_3+C_U)]\\
&=I-D_1^{-1}A=I-D+L+U,
\end{aligned}$$

它是推广的Jacobi迭代法，简称为GJ方法。其中

$$D=D_1^{-1}D_A,\qquad L=D_1^{-1}C_L,\qquad U=D_1^{-1}C_U.$$

（3）当$\omega=r=1$时，

$$L_{1,1}=[D_1-D_2-C_L]^{-1}[D_3+C_U]=[I-L]^{-1}[I-D+U],$$

它是推广的Gauss-Seidil迭代法，简称为GGS方法，其中

$$D=(D_1-D_2)^{-1}D_A,\qquad L=(D_1-D_2)^{-1}C_L,\qquad U=(D_1-D_2)^{-1}C_U.$$

（4）当$\omega=r$时，

$$\begin{aligned}
L_{\omega,\omega}&=[D_1-\omega(D_2+C_L)]^{-1}[(1-\omega)D_1+\omega(D_3+C_U)]\\
&=[I-\omega L]^{-1}[I-\omega D+\omega U],
\end{aligned}$$

它是推广的SOR方法，简称为GSOR方法。其中

$$D=(D_1-\omega D_2)^{-1}D_A,\qquad L=(D_1-\omega D_2)^{-1}C_L,\qquad U=(D_1-\omega D_2)^{-1}C_U.$$

3　GAOR迭代矩阵的谱半径

设λ，X分别是$L_{\omega,r}$的按模最大特征值和相应的特征向量，则有

$$L_{\omega,r}X=\lambda X.$$

进而有

$$(D_1-rD_2-rC_L)\lambda X=$$

$$=[(1-\omega)D_1+(\omega-r)(D_2+C_L)+\omega(D_3+C_U)]X \tag{3}$$

记 $H=C_L+C_U$，$S=C_L-C_U$，$G=D_1-rD_2-(r/2)H$，则有$C_L=(1/2)(H+S)$，$C_U=(1/2)\cdot(H-S)$，$A=D_A-H$，将它们代入式（3）可得

$$\lambda[GX-(r/2)SX]=[GX-\omega AX-(r/2)SX],$$

两边与X内积可得

$$\lambda=\frac{(\langle GX,X\rangle-\omega\langle AX,X\rangle-(r/2)\langle SX,X\rangle)}{(\langle GX,X\rangle-(r/2)\langle SX,X\rangle)}, \tag{4}$$

在A，D_1，D_2给定后，H，S，G都是已知矩阵。若 $L_{\omega,r}$ 是一个具有线性初等因子的实阵时，则在 GAOR 方法收敛的参数范围内，任意固定一对ω_0,r_0，便可利用乘幂法或其他方法，求出L_{ω_0,r_0}的按模最大特征值和相应特征向量λ_0和X_0，采用这一对λ_0和X_0，关系（4）仍成立，今固定X_0，放开ω_0，r_0，λ便成为ω与r的函数了，今记

$$a=-\langle AX_0,X_0\rangle/\langle X_0,X_0\rangle,\ b=-(1/2)\langle SX_0,X_0\rangle/\langle X_0,X_0\rangle,$$
$$c=\langle GX_0,X_0\rangle/\langle X_0,X_0\rangle,$$

可得

$$\lambda=\frac{a\omega+br+c}{br+c}.$$

4　GAOR方法收敛的一些矩阵类

定义1　若$A=D_A-C_L-C_U$，且$B=D_A^{-1}(C_L+C_U)$，当$\rho(|B|)<1$时，便称 A 是H一矩阵。其中，D_A表示A的对角线矩阵，$-C_L$，$-C_U$分别表示A的严格下三角阵和严格上三角阵，$\rho(|B|)$表示矩阵$|B|$的谱半径。

定义2　若A非奇矩阵，且$A^{-1}>0$便称A为单调矩阵。

定理1　若方程组（1）的系数矩阵$A=D_A-C_L-C_U$是一个H一矩阵。则当 $0\leqslant r\leqslant\omega\leqslant1$，$\omega\neq0$，$D_2$，$D_3\geqslant0$，$D_A>0$时，GAOR方法收敛。

证明　记$R_1=I-\omega D+(\omega-r)|L|+\omega|U|$，$0\leqslant r\leqslant\omega\leqslant1$，$\omega\neq0$，则$R_1\geqslant|I-\omega D+(\omega-r)L+\omega U|$。记$Q=I-r|L|$，$0\leqslant r\leqslant1$，则$Q^{-1}\geqslant(I-rL)^{-1}$。由此推知

$$L_{\omega,r}=[I-rL]^{-1}[I-\omega D+(\omega-r)L+\omega U]\leqslant Q^{-1}R_1,$$

进而有

$$\rho(L_{\omega,r})\leqslant\rho(Q^{-1}R_1).$$

由正规分裂矩阵知，$\rho(Q^{-1}R_1)<1$的充分必要条件是

$$Q-R_1=[I-r|L|]-[I-\omega D+(\omega-r)|L|+\omega|U|]$$
$$=\omega(D-|L|-|U|)=\omega(D_1-rD_2)^{-1}D_A(I-|B|)$$

是一个单调矩阵。因为A是H-矩阵，所以$(Q-R_1)^{-1}=\omega(I-|B|)^{-1}D_A^{-1}(D_1-rD_2)>0$是单调矩阵，从而GAOR方法收敛。

综上所述可知，在某些矩阵类下，GAOR方法在$0\leqslant r\leqslant\omega\leqslant1$，$\omega\neq0$，$D_2$，$D_3\geqslant0$，$D_A>0$的条件下收敛，当两个可选对角线矩阵给定之后，两个最佳迭代参数的决定问题转化为下面的非线性规划的求解问题，这个非线性规划的形式是

$$\min \frac{a_1\omega + b_1 r + c_1}{a_2\omega + b_2 r + c_2}, \qquad \text{s.t} \quad 0 \leqslant r \leqslant \omega \leqslant 1, \ \omega \neq 0,$$

下面进一步把约束条件化成等式约束，为此令

$$t_1 = \omega - r \geqslant 0, \qquad t_2 = 1 - \omega \geqslant 0,$$

或者写成

$$t_1 - \omega + r = 0, \qquad t_2 + \omega = 1,$$

$$t_1 \geqslant 0, \quad t_2 \geqslant 0, \quad \omega > 0, \quad r \geqslant 0.$$

把求解最优迭代参数的问题写成更一般的形式，它就是分式线性规划

$$(\mathrm{FP}) \begin{cases} \min \dfrac{p^T x + \alpha}{q^T x + \beta}, \\ x \in R, \\ R = \{ x \mid Ax = b, \ x \geqslant 0 \}, \end{cases}$$

其中，p，$q \in E_n$，α，$\beta \in E_1$，$b \in E_m$，$A \in E_{m\times n}$，对于任意$x \in R$，$q^T x + \beta \neq 0$.

5　(FP)问题相对应的(FLP)问题

在（FP）问题中作替换，$x = y/\tau$，$\tau > 0$，把它代入（FP）问题中的目标函数和约束方程中，可得

$$\left(p^T \frac{y}{\tau} + \alpha\right) \Big/ \left(q^T \frac{y}{\tau} + \beta\right), \qquad A\frac{y}{\tau} - b = 0,$$

或者可得

$$(p^T y + \tau\alpha)/(q^T y + \tau\beta), \qquad Ay - \tau b = 0.$$

然后构造线性规划

$$(\mathrm{FLP}) \begin{cases} \min \ p^T y + \tau\alpha, \\ \text{s.t} \quad q^T y + \tau\beta = 1, \ Ay - \tau b = 0, \ y \geqslant 0, \ \tau \geqslant 0. \end{cases}$$

6　(FP)问题与(FLP)问题的解之间的关系

定理2　若$R = \{ x \mid Ax = b, \ x \geqslant 0 \}$为非空有界集，且$[y^T, \tau]^T$为(FLP)问题的可行解，则$\tau > 0$.

证明　若$\tau = 0$，则$q^T y = 1$，$Ay = 0$，由此推知$y > 0$. 易证，对于任意$x \in R$，$\lambda > 0$，皆有$x + \lambda y \in R$，让$\lambda \to \infty$，可知R为无界集，这与假设矛盾，即$\tau > 0$.

定理3　若$R = \{ x \mid Ax = b, \ x \geqslant 0 \}$为非空有界集，且$\bar{x} \in R$，又$\bar{v} = q^T \bar{x} + \beta > 0$，则$[\bar{y}^T, \bar{\tau}]^T$为（FLP）问题之可行解，其中

$$\bar{y} = \frac{\bar{x}}{\bar{v}}, \quad \bar{\tau} = \frac{1}{\bar{v}}.$$

证明　因

$$A\bar{y} - \bar{\tau} b = A\bar{y} - \frac{b}{\bar{v}} = \frac{A\bar{y}\bar{v} - b}{\bar{v}} = 0,$$

$$q^T\bar{y}+\bar{\tau}\beta=q^T\bar{y}+\frac{\beta}{\bar{v}}=\frac{q^T\bar{x}+\beta}{\bar{v}}=1,$$

$$\bar{y}=\frac{\bar{x}}{\bar{v}}\geqslant 0,\qquad \bar{\tau}=\frac{1}{\bar{v}}\geqslant 0,$$

所以$[\bar{y}^T,\ \bar{\tau}]^T$为（FLP）问题的可行解。

定理4　若$R=\{x|Ax=b,\ x\geqslant 0\}$为非空有界集，$\bar{x}$为（FP）问题的最优解，且$\bar{v}=q^T\bar{x}+\beta>0$，则$[\bar{y}^T,\ \bar{\tau}]^T$为（FLP）问题的最优解，其中

$$\bar{y}=\frac{\bar{x}}{\bar{v}},\qquad \bar{\tau}=\frac{1}{\bar{v}}.$$

证明　首先$[\bar{y}^T,\ \bar{\tau}]^T$为（FLP）问题的可行解，今设$[y^T,\ \tau]^T$为（FLP）问题的任意一个可行解，由于$R=\{x|Ax=b,\ x\geqslant 0\}$非空有界，由定理2知，$\tau>0$，今记$x=y/\tau$，可证$x$为（FP）问题的一个可行解，并且

$$p^Ty+\tau\alpha=\frac{p^Ty+\tau\alpha}{q^Ty+\tau\beta}=\frac{p^T(y/\tau)+\alpha}{q^T(y/\tau)+\beta}=\frac{p^Tx+\alpha}{q^Tx+\beta}\geqslant\frac{p^T\bar{x}+\alpha}{q^T\bar{x}+\beta}$$

$$=p^T\frac{\bar{x}}{\bar{v}}+\frac{\alpha}{\bar{v}}=p^T\bar{y}+\bar{\tau}\alpha,$$

由此推知$[\bar{y}^T,\ \bar{\tau}]^T$为（FLP）问题之最优解。

定理5　若（FP）问题存在最优解x^0，且$v_0=q^Tx^0+\beta>0$。又知$[\bar{y}^T,\ \bar{\tau}]^T$为（FLP）问题的最优解，同时$\bar{\tau}>0$，则$\bar{x}=\bar{y}/\bar{\tau}$为（FP）问题的最优解。

证明　易知$\bar{x}$为（FP）问题的一个可行解，今证$\bar{x}$为（FP）问题的最优解，今用反证法，如果$\bar{x}$不是（FP）问题的最优解，则有

$$\frac{p^Tx_0+\alpha}{q^Tx_0+\beta}<\frac{p^T\bar{x}+\alpha}{q^T\bar{x}+\beta}=\frac{p^T\bar{y}+\bar{\tau}\alpha}{q^T\bar{y}+\bar{\tau}\beta}=p^T\bar{y}+\bar{\tau}\alpha,$$

记$y^0=x^0/v^0$，$\tau^0=1/v^0$。易知$[y^{0T},\ \tau^0]^T$为（FLP）问题的可行解，且

$$p^Ty^0+\tau^0\alpha=\frac{p^Ty^0+\tau^0\alpha}{q^Ty^0+\tau^0\beta}=\frac{p^Tx^0+\alpha}{q^Tx^0+\beta}<p^T\bar{y}+\bar{\tau}\alpha,$$

所以

$$p^Ty^0+\tau\alpha<p^T\bar{y}+\bar{\tau}\alpha,$$

这与$[\bar{y}^T,\ \bar{\tau}]^T$为（FLP）问题的最优解矛盾，这就证明了$\bar{x}$为（FP）问题的最优解。

由上面诸定理的证明可知，若分式规划的某可行解或最优解使得目标函数的分母小于零，则考虑分式规划

$$(\mathrm{FP1})\begin{cases}\min\dfrac{-p^Tx-\alpha}{-q^Tx-\beta}.\\ \mathrm{s.t}\quad Ax=b,\ x\geqslant 0,\end{cases}$$

而相应的线性规划变为

$$(\mathrm{FLP1})\begin{cases}\min(-p^Ty-\tau\alpha),\\ \mathrm{s.t}\quad -q^Ty-\tau\beta=1,\ Ay-\tau b=0,\ y\geqslant 0,\ \tau\geqslant 0,\end{cases}$$

由于在求解分式规划（FP）的最优解时，事先往往不知道在最优解处$q^Tx+\beta$的符号，因此通常要同时求解一对线性规划问题（FLP）和（FLP1），再依照$q^Tx+\beta$的符号来决定最优迭

代参数。

参 考 文 献

[1] Hadjidimos, A. , *Accelerated Overrelaxation Method*, Math. Comp. , 32, (1978).

[2] Hadjidimos, A. , *On the generalization of the Basic Iterative Methods for the Solution of Linear Systems*, Znternat J. Comput. Math. , 14. (1983), 355—369.

[3] Hadjidimos, A. , Psimarni, A. and Yeyios, A. , *On the Convergence of Some Generalized Iteration Method*, LAA, 75, (1986), 117—132.

A Method for Searching the Optimal Iterated Parameter

Cai Huoying

(*Department of Management Information Science*)

Abstract There are two iterated parameters in the generalized iteration method, one of the latest methods for the solution of linear systems. The author points out the way to choose the optimal parameter.

Key words choose, optimal, iterated, parameter