第12卷 第1期 华侨大学学报自然科学版 Vol.12 No.1
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1991年1月 (NATURAL SCIENCE) Jan. 1991

考虑摩擦时机构力分析的矩阵解法

洪尚任

(精密机械工程系)

摘要 考虑摩擦时机构力分析是个非线性问题．本文提出了摩擦力矩系数的新概念，把非线性问题转化为线性问题并建立矩阵求解法．

关键词 机构、动力学、摩擦

0 引言

近10多年来，国内外发表了不少有关机构动力学方面的论文，研究诸如惯性、弹性、粘性阻尼，冲击，运动副间隙等对机构动力性能的影响问题，却往往忽略了摩擦。但在许多机构中，摩擦损失了大量能量，降低了效率，所以在进行机构力分析时，考虑摩擦的影响十分重要。

在做机构图解力分析时对转动副（轴承）摩擦问题的经典处理方法是利用摩擦圆概念，这是一种逐步逼近法，需要反复作图并计算逼近值，直到满意的精度为止，不但图解工作量大，而且积累误差大，精度低。特别对于多环多杆机构，其复杂性及难度更大。目前，与这种图解法相配合的解析法，也是采用逐步逼近法（数值迭代法）求解，即首先不考虑摩擦，计算各运动副反力和平衡力；然后求出转动副中的摩擦力矩，再将摩擦力矩作为已知力矩作用在构件上，重新算得各个运动副反力和平衡力，作为考虑摩擦时机构力分析的第一次逼近值，如此反复计算，直到满足精度要求。

倘若不计摩擦，机构力分析的平衡方程组是线性方程组，则采用矩阵解法十分简便。由于考虑摩擦时力矩平衡方程是非线性方程，不能直接应用矩阵解法．为此本文提出摩擦力矩系数的概念，目的是把非线性问题转化为线性问题，并建立相应的求解该问题的矩阵解法。

1 摩擦力矩线性表达式

图1（a）适用于图解力分析，下面仍从摩擦圆的概念着手。如果不计摩擦，转动副反力f^{0}_{ji}通过转动副中心；但如考虑摩擦f^{0}_{ji}，则总反力f_{ji}与摩擦圆相切，产生了摩擦力矩为

$$M_{ji}=\lambda_{ji}\mu_{ji}e_{ji}f_{ji}=\lambda_{ji}\rho_{ji}f_{ji}, \tag{1}$$

本文1990-05-28收到。

其中

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda_{ji}=-\lambda_{ij}, & M_{ji}=-M_{ij},\\ \rho_{ji}=\rho_{ij}=\rho_i, & \mu_{ji}=\mu_{ij}=\mu_i,\\ e_{ji}=e_{ij}=e_i, & \rho_i=\mu_i e_i.\end{array}\right\} \tag{2}$$

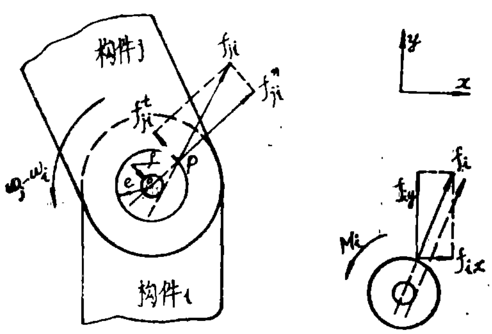
式（1），（2）中，μ_i为当量摩擦系数；e_i为转动副半径；ρ_i为摩擦圆半径；f_{ji}为构件j对构件i的总反力；λ_{ji}为正负号标记。λ_{ji}的取值为

$$\lambda_{ji}=\begin{cases}-1, & (w_j-w_i)<0,\\ 0, & (w_j-w_i)=0,\\ +1, & (w_j-w_i)>0.\end{cases} \tag{3}$$

为了便于讨论，取机构中第 i 个转动副为例，并将双下标记法改为单下标记法。例如，记$f_{ji}=f_i(f_{ij}=-f_i)$，$\lambda_{ji}=\lambda_i(\lambda_{ij}=-\lambda_i)$，$M_{ji}=M_i(M_{ij}=-M_i)$。图1(b)所示力系与(a)所示的是等价力系，且适合于计算机计算。与摩擦圆相切的转动副总反力f_i可以用一个通过转动副中心的合力f_i（其直角坐标两个分量为f_{ix}和f_{iy}）以及摩擦力矩M_i来代替，则

$$M_i=\lambda_i\rho_i(f_{ix}^2+f_{iy}^2)^{1/2}, \tag{4}$$

式（4）所表示的摩擦力矩与未知的转动副反力间关系是非线性关系，倘若代入力矩平衡方程，得到的亦是非线性方程。为此必须设法将摩擦力矩表示为未知反力的线性函数，现用图2来阐述线性化原理。



（a）　　（b）

图1　转动副中的摩擦分析

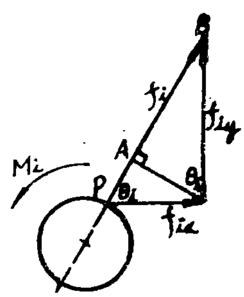


图2　线性化原理图

图2中，因为

$$f_i=(f_{ix}^2+f_{iy}^2)^{1/2}=PB=PA+AB,$$
$$PA=f_{ix}\cos\theta_i,\qquad AB=f_{iy}\sin\theta_i,$$

所以

$$f_i=f_{ix}\cos\theta_i+f_{iy}\sin\theta_i, \tag{5}$$

式（4）可改写为

$$M_i=\lambda_i\rho_i(f_{ix}\cos\theta_i+f_{iy}\sin\theta_i), \tag{6}$$

令

$$k_{ix}=\lambda_i\rho_i f_{ix}\cos\theta_i,\qquad k_{iy}=\lambda_i\rho_i f_{iy}\sin\theta_i,\tag{7}$$

则可简化式(6)为

$$M_i=k_{ix}f_{ix}+k_{iy}f_{iy}.\tag{8}$$

式(7)和(8)中的k_{ix}、k_{iy}定义为摩擦力矩系数。若$\rho_i=0(\mu_i=0)$，则$k_{ix}=k_{iy}=0, M_i=0$，就是不计摩擦时力分析的情况。至于考虑摩擦时$\cos\theta_i$，$\sin\theta_i$的具体值可近似按不计摩擦情况来计算(右上角标为0)，公式如下

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_i&=f^0_{ix}/(f^{02}_{ix}+f^{02}_{iy})^{1/2},\\ \sin\theta_i&=f^0_{iy}/(f^{02}_{ix}+f^{02}_{iy})^{1/2}.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

2 考虑摩擦时机构力分析的矩阵解法

不失一般性，以典型的铰链四杆机构为例来说明带摩擦力分析矩阵解法的建模过程。

受力图采用图3所示的矢量坐标记法，图中构件i的质量m_i、质心位置g_i、绕质心的转动惯量I_i、质心运动的加速度$\ddot{\theta}_i$；角位移、角速度和角加速度分别为θ_i，$\dot{\theta}_i$和$\ddot{\theta}_i$。假定已对机构作过运动分析，所有运动参数均看作已知量可直接用于力分析。设作用于构件i上的已知外力矢量和为$\sum\vec{F}_i$，外力矩矢量和为$\sum\vec{T}_i$，而转动副反力$\vec{f}_i$，摩擦力矩$\vec{M}_i$，所需驱动力矩T_0为待求量。现规定$\vec{p}_i$指从质心g_i到前铰接点i的矢量，$\vec{q}_i$指从质心g_i到后铰接点$(i-1)$的矢量，$\vec{d}_i$指从g_i到$\sum\vec{F}_i$作用线上任一点的矢量，与图3相对应的各构件力分离体如图4所示。本文

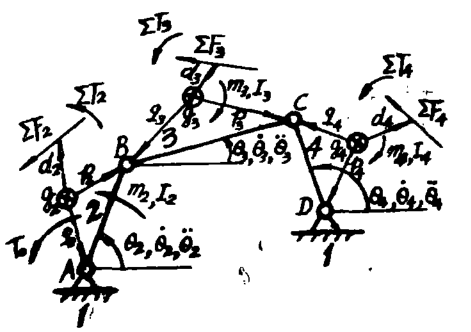


图3　铰链四杆机构受力图

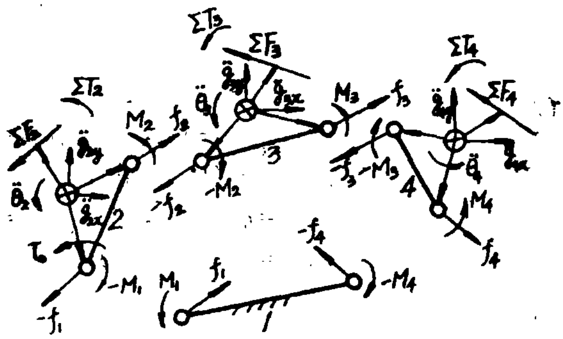


图4　力分离体图

设定转动副中的反力$\vec{f}_i$和摩擦力矩M_i(下标i与构件编号相同)为正矢量，则各构件的力和力矩平衡矢量方程分别为

构件2

$$\vec{f}_2-\vec{f}_1=m_2\ddot{g}_2-\sum\vec{F}_2,\tag{10}$$

$$(\vec{p}_2\times\vec{f}_2)-(\vec{q}_2\times\vec{f}_1)+M_2-M_1+T_0=I_2\ddot{\theta}_2-\sum T_2-(\vec{d}_2\times\sum\vec{F}_2);\tag{11}$$

构件3

$$\vec{f}_3-\vec{f}_2=m_3\ddot{g}_3-\sum\vec{F}_3,\tag{12}$$

$$(\vec{p}_3\times\vec{f}_3)-(\vec{q}_3\times\vec{f}_2)+M_3-M_2=I_3\ddot{\theta}_3-\sum T_3-(\vec{d}_3\times\sum\vec{F}_3);\tag{13}$$

构件 4

$$\vec{f}_4-\vec{f}_3=m_4\ddot{g}_4-\sum\vec{F}_4, \tag{14}$$

$$(\vec{p}_4\times\vec{f}_4)-(\vec{q}_4\times\vec{f}_3)+M_4-M_3=I_4\ddot{\theta}_4-\sum T_4-(\vec{d}_4+\sum\vec{F}_4); \tag{15}$$

式（11），（13），（15）是含有摩擦力矩M_i的非线性方程，只要M_i用式（8）的线性表达式代入，就可转化为线性方程。根据矢量叉积的性质，将（$\vec{p}_i\times\vec{f}_i$）及（$\vec{q}_i\times\vec{f}_{i-1}$）展开，并把矢量方程（10），（12），（14）分别用两个标量方程代替后得到

$$f_{2x}-f_{1x}=m_2\ddot{g}_{2x}-\sum F_{2x}, \tag{16}$$

$$f_{2y}-f_{1y}=m_2\ddot{g}_{2y}-\sum F_{2y}, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&(q_{2y}-k_{1x})f_{1x}-(q_{2x}+k_{1y})f_{1y}+(k_{2x}-p_{2y})f_{2x}+(p_{2x}+k_{2y})f_{2y}+T_0\\&=I_2\ddot{\theta}_2-\sum T_2-(\vec{d}_2\times\sum\vec{F}_2),\end{aligned} \tag{18}$$

$$f_{3x}-f_{2x}=m_3\ddot{g}_{3x}-\sum F_{3x}, \tag{19}$$

$$f_{3y}-f_{2y}=m_3\ddot{g}_{3y}-\sum F_{3y}, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&(q_{3y}-k_{2x})f_{2x}-(q_{3x}+k_{2y})f_{2y}+(k_{3x}-p_{3y})f_{3x}+(p_{3x}+k_{3y}))f_{3y}\\&=I_3\ddot{\theta}_3-\sum T_3-(\vec{d}_3\times\sum\vec{F}_3),\end{aligned} \tag{21}$$

$$f_{4x}-f_{3x}=m_4\ddot{g}_{4x}-\sum F_{4x}, \tag{22}$$

$$f_{4y}-f_{3y}=m_4\ddot{g}_{4y}-\sum F_{4y}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&(q_{4y}-k_{3x})f_{3x}-(q_{4x}+k_{3y})f_{3y}+(k_{4x}-p_{4y})f_{4x}+(p_{4x}+k_{3y})f_{4y}\\&=I_4\ddot{\theta}_4-\sum T_4-(\vec{d}_4\times\sum\vec{F}_4).\end{aligned} \tag{24}$$

方程（16）—（24）为9个独立的线性代数方程，可联立求解9个未知量，即转动副反力f_{1x}，f_{1y}，f_{2x}，f_{2y}，f_{3x}，f_{3y}，f_{4x}，f_{4y}及平衡力矩T_0（作用于构件2上的驱动力矩）。令

$$\left.\begin{aligned}&qk_{1x}=q_{2y}-k_{1x}, && qk_{1y}=-(q_{2x}+k_{1y}),\\&pk_{2x}=-(p_{2y}-k_{2x}), && pk_{2y}=p_{2x}+k_{2y},\\&qk_{2x}=q_{3y}-k_{2x}, && qk_{2y}=-(q_{3y}+k_{2y}),\\&pk_{3x}=-(p_{3y}-k_{3x}), && pk_{3y}=p_{3x}+k_{3y},\\&qk_{3x}=q_{4y}-k_{3x}, && qk_{3y}=-(q_{4x}+k_{3y}),\\&pk_{4x}=-(p_{4y}-k_{4x}), && pk_{4y}=p_{4x}+k_{4y}.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

再令

$$\left.\begin{aligned}&b_1=m_2\ddot{g}_{2x}-\Sigma F_{2x}, \qquad b_2=m_2\ddot{g}_{2y}-\sum F_{2y},\\&b_3=I_2\ddot{\theta}_2-\Sigma T_2-(\vec{d}_2\times\sum\vec{F}_2);\\&b_4=m_3\ddot{g}_{3x}-\sum F_{3x}, \qquad b_5=m_3\ddot{g}_{3y}-\sum F_{3y},\\&b_6=I_3\ddot{\theta}_3-\sum T_3-(\vec{d}_3\times\sum\vec{F}_3);\\&b_7=m_4\ddot{g}_{4x}-\sum F_{4x}, \qquad b_8=m_4\ddot{g}_{4y}-\sum F_{4y},\\&b_9=I_4\ddot{g}_4-\sum T_4-(\vec{d}_4\times\sum\vec{F}_4).\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

联立后可写成十分简洁的矩阵方程。即

$$[A][F]=[B]. \tag{27}$$

式（27）中

$$[A]=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ qk_{1x} & qk_{1y} & pk_{2x} & pk_{2y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & qk_{2x} & qk_{2y} & pk_{3x} & pk_{3y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & qk_{3x} & qk_{3y} & pk_{4x} & pk_{4y} & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$[F]=(f_{1x},\ f_{1y},\ f_{2x},\ f_{2y},\ f_{3x},\ f_{3y},\ f_{4x},\ f_{4y},\ T_0)^T, \tag{29}$$

$$[B]=(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6,\ b_7,\ b_8,\ b_9)^T. \tag{30}$$

矩阵方程（27）采用高斯消元法电算求解，十分简便。

3 结论

（1）本文引入了摩擦力矩系数概念，把非线性问题转化为线性问题，大大简化了力分析的求解过程。

（2）本文导出的矩阵方程具有普遍意义，既可用于求解考虑摩擦时机构力分析问题，也适用于求解不计摩擦时（作为特例，令$\mu=0$）的机构力分析问题。

参 考 文 献

[1] Suh. C. H. and Radcliffe. C. W. , *Kinematics and Mechanisms Design*. New York, wiley. (1978).

[2] Lmam. L. Skreiner. M. and Sadler. J. P. , A New solution to Coulomb Friction in Mechanism Bearings: Theory and Application, *Journal of Mechanical Design*, Trans. ASME. 103. (1981).

[3] Bagci. C. , Dynamic Motion Analysis of Plane Mechanism with Coulomb and Viscous Damping Via the Joint Force Analysis. *Journal of Engineering for Industry*, Trans. ASME. (1975).

[4] 曹龙华主编. 机械原理. 高等教育出版社.（1986）.

[5] 孙桓主编. 机械原理. 高等教育出版社.（1987）.

[6] 机械原理电算程序集编写组. 机械原理电算程序集. 高等教育出版社.（1987）.

Matrix Analysis of the Force of the Mechanism when the Friction is Taken into Account

Hong Shanren

(*Department of Precision Mechanical Engineering*)

Abstract The analysis of force of the mechanism when the friction is taken into account is a nonlinear problem. For transforming it into linear problem, a new concept of friction torque coefficient is presented, and its matrix solution is established.

Key words mechanism, dynamics, friction