第11卷 第4期 华侨大学学报自然科学版 Vol.11 No.4
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1990年10月 (NATURAL SCIENCE) Oct.1990

2/3阶控制系统准则函数及其应用

王 永 初

（精密机械工程系）

摘要 ISE准则用于设计最佳工业过程控制系统，其应用有时受到限制，这是由于人们不知如何去选择简单但可用的参数结构式．本文给出一种ISE准则函数积分值的修正等价公式，可用以确定给定值系统2/3阶过程模型的最佳参数波动度．首次证明了给定值系统的最佳波动度是应在0.2874±△的范围内选择．

关键词 准则，最佳控制，定值系统，过程模型

0 问题的提出

目前，控制系统的设计基本上建立在典型二阶系统特性基础上，非二阶系统按零极点配置原则，保留基本的二阶系统部分，多余的零极点设法将它们移动至远离虚轴．因此多余的零极点影响到了系统响应的上升时间以后很快会消失．这种设计方法无论是采用频率法或根轨迹法都容易实现，並且指标明确．按ISE准则，系统的波动度$\zeta=0.707$为最佳值．这个结果应该说仅对波动系统有效；对于生产过程控制问题，更多遇到的是定值调节，即克服外扰$f(s)$而保持被控制变量最好地追近给定值，ζ指标值应该不一样．因此ζ的取值是本文研究的内容之一．

在应用最佳值判断准则时，作者发现许多文献关于2/3阶的公式有误[1,2]．

记2/3阶系统的误差传递函数为

$$e(s)=\frac{c_2s^2+c_1s+c_0}{d_3s^3+d_2s^2+d_1s+d_0}, \tag{1}$$

而文献给出ISE值为

$$I_3=\frac{c_2{}^2d_0d_1+(c_2{}^2-2c_0c_2)d_0d_3+d_0{}^2d_2d_3}{2d_0d_3(d_1d_3-d_0d_2)}, \tag{2}$$

可能推导有关，应为

$$I_3=\frac{c_2{}^2d_0d_1+(c_2{}^2-2c_0c_2)d_0d_3+c_0{}^2d_2d_3}{2d_0d_3(d_1d_2-d_0d_3)}. \tag{3}$$

並得出定值控制系统，对于等幅上升变化的外扰$f(s)=1/s$，最佳的波动度$\zeta=0.2874$．这个结果同ISE值有关，因此本文讨论式(3)修正式的原理及其在系统设计中的应用．

本文1989-11-24收到．

1 ISE的计算等价式

ISE法的表示式为

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^2(t)dt, \tag{4}$$

若记$e(t)$的拉普拉斯变换式为

式中$e(t)$表示控制系统的瞬时调节误差。

$$e(s)=\frac{c_n(s)}{D_n(s)}=\frac{c_{n-1}s^{n-1}+c_{n-2}s^{n-2}+\cdots+c_1s+c_0}{d_ns^n+d_{n-1}s^{n-1}+\cdots+d_1s+d_0}, \tag{5}$$

由于

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}e(t)e(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}e(t)\left[\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}e(s)e^{st}ds\right]dt$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}e(s)\left[\int_{-\infty}^{\infty}e(t)e^{st}dt\right]ds=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}e(s)e(-s)ds$$

$$=\mathrm{Res}[e(s)e(-s)], \tag{6}$$

式中Res[ ]表示对括号内的函数取位于s复平面左边的留数。

式(5)的s有理多项式，其分母分多项式可分解为

$$D_n(s)=\frac{1}{2}[D_n(s)+(-1)^nD(-s)]+\frac{1}{2}[D_n(s)-(-1)^nD(-s)]$$

$$=\bar{D}_n(s)+\tilde{D}_n(s), \tag{7}$$

其中

$$\bar{D}_n(s)=\frac{1}{2}[D_n(s)+(-1)^nD_n(-s)],$$

$$\tilde{D}_n(s)=\frac{1}{2}[D_n(s)-(-1)^nD_n(-s)].$$

$D_n(s)$降低一阶函数$D_{n-1}(s)$可表示为

$$D_{n-1}(s)=D_n(s)-\frac{d_n}{d_{n-1}}s\tilde{D}(s), \tag{8}$$

$c_n(s)$降低一阶函数$c_{n-1}(s)$亦可以表示为

$$c_{n-1}(s)=c_n(s)-\frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}\tilde{D}_n(s), \tag{9}$$

由于

$$\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{c_{n-1}(s)c_{n-1}(-s)}{D_n(s)D_n(-s)}ds=\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{c_n(s)c_n(-s)}{D_n(s)D_n(-s)}ds$$

$$-\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{\frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}c_n(s)\tilde{D}_n(-s)}{D_n(s)D_n(-s)}ds-\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{\frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}c_n(-s)\tilde{D}_n(s)}{D_n(s)D_n(-s)}ds$$

$$+\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{\left(\frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}\right)^2\tilde{D}_n(s)\tilde{D}_n(-s)}{D_n(s)D_n(-s)}ds, \tag{10}$$

且有

$$\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{\frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}c_n(s)\tilde{D}(-s)}{D_n(s)D_n(-s)}ds=-\int_{j\infty}^{-j\infty}\frac{\frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}c_n(-s^*)\tilde{D}(s^*)}{D_n(-s^*)D_n(s^*)}ds^*$$

$$=\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{c_{n-1}c_n(-s)\tilde{D}(s)}{d_{n-1}D_n(-s)D_n(s)}ds,$$

所以式(10)可写成

$$I_n=I_{n-1}+2\cdot\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{\frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}c_n(s)\tilde{D}_n(-s)}{D_n(s)D_n(-s)}ds$$

$$-\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{\left(\frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}\right)^2\tilde{D}_n(s)\tilde{D}_n(-s)}{D_n(s)D_n(-s)}ds, \tag{11}$$

式中

$$I_n=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{c_n(s)c_n(-s)}{D_n(s)D_n(-s)}ds,$$

$$I_{n-1}=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{c_{n-1}(s)c_{n-1}(-s)}{D_n(s)D_n(-s)}ds.$$

$D_n(-s)$同$D_n(s)$及$\tilde{D}_n(s)$有如下关系

$$D_n(-s)=\bar{D}_n(-s)+\tilde{D}_n(-s)=(-1)^n[D_n(s)-2\tilde{D}_n(s)]$$

$$=(-1)^nD_n(s)+2\tilde{D}_n(-s),$$

显然

$$\sum_{s_i}\mathrm{Res}\frac{c_n(s)\tilde{D}(-s)}{D_n(s)D_n(-s)}=\sum_{s_i}\mathrm{Res}\frac{c_n(s)}{2D_n(s)}$$

$$=\sum_{s_i}\mathrm{Res}\left[\frac{c_{n-1}s^{n-1}+c_{n-2}s^{n-2}+\cdots+c_1s+c_0}{d_ns^n+d_{n-1}s^{n-1}+\cdots+d_1s+d_0}\right]$$

$$=\sum_{s_i}\mathrm{Res}\left[\frac{c_{n-1}}{d_n}s^{-1}+\frac{d_nc_{n-2}-c_{n-1}d_{n-2}}{d_n}s^{-2}+\cdots\right]$$

$$=\frac{c_{n-1}}{d_n}. \tag{12}$$

同理可得

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{\tilde{D}_n(s)\tilde{D}_n(-s)}{D_n(s)D_n(-s)}=\frac{1}{2}\sum_{s_i}\mathrm{Res}\frac{\tilde{D}_n(s)}{D_n(s)}=\frac{1}{2}\frac{d_{n-1}}{d_n}, \tag{13}$$

式(12)与式(13)代入式(11)

$$I_n=\tilde{I}_{n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{c_{n-1}^2}{d_nd_{n-1}}. \tag{14}$$

这样，利用递推方式可以确定2/3阶的ISE值．即从0/1阶递推1/2阶，再从1/2阶递推2/3阶的ISE值．但是1/2阶的等阶ISE值前人已做了许多工作，并有了正确的结果，即

$$I_2=\frac{c_0^2d_2+c_1^2d_0}{2d_0d_1d_2}, \tag{15}$$

所以

$$I_3 = \tilde{I}_2 + \frac{c_2^2}{2d_3d_2}. \tag{16}$$

式（16）中的$\tilde{I}_2$表示2/3阶降为1/2的ISE值．2/3阶分子与分母各降一阶的算式如式（8）与式（9）所示．从2/3阶的$c_n(s)/D_n(s)$降阶为$c_{n-1}(s)/D_{n-1}(s)$的结果为

$$\frac{c_{n-1}(s)}{D_{n-1}(s)} = \frac{c_1 s + \dfrac{c_0d_2 - c_2d_0}{d_2}}{d_2s^2 + (d_1 - \dfrac{d_3d_0}{d_2})s + d_0},$$

显然

$$\tilde{I}_2 = \frac{\left(\dfrac{c_0d_2 - c_2d_0}{d_2}\right)^2 d_2 + c_1^2 d_0}{2d_0(d_1 - \dfrac{d_3d_0}{d_2})d_2}, \tag{17}$$

式（17）代入式（16）可以得到本文给出的结果，即式（3）的2/3阶ISE值等阶计算式．

2　定值控制系统的结构参数最佳值

控制工程的许多教材或专著，根据二阶随动系统误差平方积分值最小得到$\zeta = 0.707$的结论，而对于大量生产过程控制系统最佳的ζ值文献很少，日本清水武夫教授在他的专著[3]中首次提出ζ可以适当减少，这已是一个公认的事实．但是ζ能否定量，对生产过程控制系统的调整是很重要的．

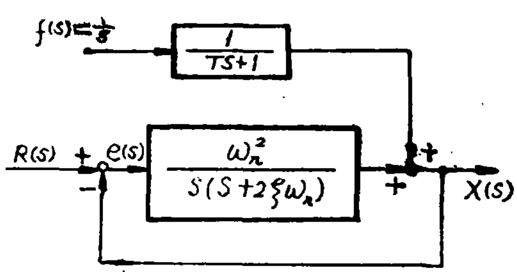

图1　二阶系统结构方框图

一个简化后的典型二阶或近似二阶控制系统的结构方框图，如图1所示．当$f(s) = 0$，即系统演变为随动系统．当主要控制目标是消除$f(s) \neq 0$时的影响，并将$x(s)$维持在$R(s)$附近时，该系统就是一个典型的定值控制系统．$f(s)$为生产过程的扰动，最有代表性的扰动是由阶跃信号通过一阶惯性环节加入．图1的控制误差传递函数为

$$\begin{aligned} e(s) &= \frac{s + 2\zeta w_n}{(Ts+1)(s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2)} \\ &= \frac{s + 2\zeta w_n}{Ts^3 + (T + 2\zeta w_n)s^2 + (Tw_n^2 + 2\zeta w_n)s + w_n^2} \\ &\triangleq \frac{c_2s^2 + c_1s + c_0}{d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0}, \end{aligned} \tag{18}$$

其中，$c_0 = 2\zeta w_n$，$c_1 = 1$，$c_2 = 0$；$d_0 = w_n^2$，$d_1 = Tw_n^2 + 2\zeta w_n$，$d_2 = T + 2\zeta w_n$，$d_3 = T$．

由式（3）知道

$$I_3 = \int_0^\infty e(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} e(s)e(-s)ds$$

$$= \frac{c_2^2 d_0 d_1 + (c_1^2 - 2c_0 c_1 c_2) d_0 d_3 + c_0^2 d_2 d_3}{2 d_0 d d_3 (d_1 d_2 - d_0 d_3)}$$

$$= \frac{c_1^2 d_0 d_3 + c_0^2 d_2 d_3}{2 d_0 d_3 (d_1 d_2 - d_0 d_3)} = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2 d_0 (d_1 d_2 - d_0 d_3)}, \tag{19}$$

代入有关数据关系式，则有

$$I_3 = \frac{w_n^2 + (2\zeta w_n)^2 (T + 2\zeta w_n)}{2 w_n^2 [(T w_n^2 + 2\zeta w_n)(T + 2\zeta w_n) - T w_n^2]}$$

$$= \frac{1 + 4\zeta^2 (T + 2\zeta w_n)}{2[(T w_n^2 + 2\zeta w_n)(T + 2\zeta w_n) - T w_n^2]}. \tag{20}$$

最佳结构参数由下式条件决定

$$\frac{\partial I_3}{\partial \zeta} = 0 , \tag{21}$$

为不失一般性，可设$T = 1/w_n$，$w_n \approx 1$，则式（20）可简化为

$$I_3 = \frac{1 + 4\zeta^2 (1 + 2\zeta)}{8\zeta(\zeta + 1)} , \tag{22}$$

並记

$$x = 2\zeta,$$

则式（22）可写成

$$I_3 = \frac{x^3 + x^2 + 1}{4x^2 + 8},$$

由极值条件

$$\frac{\partial I_3}{\partial x} = \frac{x^4 + 4x^2 + x - 2}{(4x^2 + 8)^2} = 0 ,$$

求得适合于系统问题的根为

$$x = 0.5748,$$

即

$$\zeta = 0.2874.$$

这个数值同随动系统的最佳值$\zeta = 0.707$相差大约 3 倍，处在清水武夫教授经验值 $\zeta = 0.25$—0.36的范围内.

参　考　文　献

[1] Chang, S. h. , *Synthesis of Optimun Control Systems*, McGraw-Hill, (1961).

[2] Åström, K. J. , *Introduction to Stochastic Control Theory*, Academic Press, (1970).

[3] 清水武夫，自动制御工学，コロナ社，(昭和46年).

Criterion Function of 2/3 Order Control System and Its Applications

Wang Yongchu

(*Department of Pricision Mechanical Engineering*)

Abstract ISE criterion can be used for designing the optimal industrial process control system. Its applications are confined occasionally by the ignorance of how to choose simple and applicable formula of parameter constitution. For determining the optimal ripple degree of a 2/3 order process model of set point system, the author gives here a corrected equivalent formula for the integral value of ISE criterion function. It is shown for the first time by the author that the optimal ripple degree ξ of the set point system must be set in the range of $0.2874 \pm \triangle$.

Key wrds criterion, optimal control, set point system, process model