第11卷 第4期 华侨大学学报自然科学版 Vol.11 No.4
1990年10月 JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Oct. 1990

圆环圆拱承受均匀径向荷载时弹性失稳的加权余量解

杜耀星
（土木工程系）

摘要 本文用加权余量法推导出圆环和圆拱在均匀径向荷载作用下，发生弹性失稳时临界荷载q_{cr}的计算公式.

关键词 加权余量法，弹性失稳，圆环，圆拱，临界荷载

0 引言

在不少的结构设计中，有些构件除了进行强度计算外，还需要进行稳定验算。因为弹性体丧失稳定性可以在很多构件中出现，最简单又为大家所熟知的中心受压直杆，当力增加到足够大时会出现失稳现象；圆环在均匀径向压力作用下，当力足够大时也会由圆环形变成椭圆环形，到最后完全压扁；圆拱在均布径向压力q作用下，当q达到一定数值时，圆拱也会出现如图1（a），（b）所示的反对称或对称的失稳变形；甚至常为人忽视的管道经高速流体流经后，当流体的流速达到一定数值V_{cr}时，管道也会如同中心受压直杆一样发生弹性失稳。

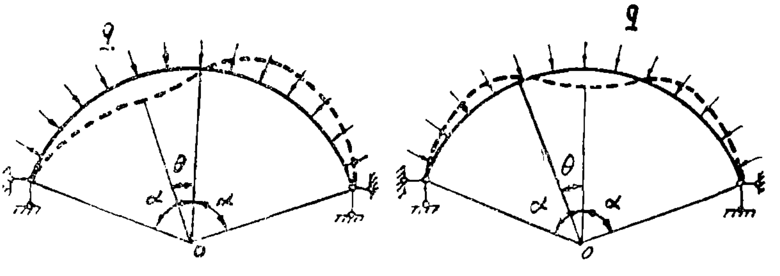

图 1

求解弹性稳定的问题，可以用求解挠曲线微分方程的办法，也可以用差分法、能量法、

本文1999—09—02收到.

虚功原理以及瑞利-李兹法等．此外，同样可以用近来得到迅速发展和应用的加权余量法来求解．本文拟采用这种方法来推导出圆环和两端铰支圆拱承受均布径向荷载时发生弹性失稳的临界荷载q_{cr}计算公式．

1 用加权余量法求解的基本原理

加权余量法又称加权残数法，过去在土木工程中应用较少，但近来这种方法不仅在土木工程中得到应用，而且发展极为迅速．加权余量法本质上说是求解微分方程的数值法，虽然它是一种近似法，但可以根据工程所需的精度而获得满意的解答．

大量的结构分析问题，例如弹性稳定问题，板壳应力分析以及各种弹性力学问题等，最终都是归结为满足一定初始条件或边界条件下，求解微分方程的问题．在加权余量法中，称这类方程为控制方程．设问题的控制方程及边界方程分别为

$$L(u)-f=0 \qquad (在V域内), \tag{1}$$

$$B(u)-g=0 \qquad (在S边界上), \tag{2}$$

式中L，B为按某些规律进行微分运算的微分算子；u为待定函数；f，g为已知函数．

如果设方程（1）的近似解为

$$\tilde{u}=\sum_{i=1}^{n}C_iN_i, \tag{3}$$

其中$\tilde{u}$为试函数；C_i为待定参数；N_i为一组线性无关的基函数．

既然$\tilde{u}$是方程（1），（2）的近似解；故将其代入方程（1），（2）后，必定是得不到满足，即不会等于零而会出现余量．它的余量分别为R_L，R_B

$$L(\tilde{u})-f=R_L, \tag{4}$$

$$B(\tilde{u})-g=R_B, \tag{5}$$

可以采用不同的方法来消除余量，于是以上两式改写为统一的式子

$$\int_V R_LW_i dV+\int_S R_BT_i dS=0 \qquad (i=1, 2, 3, \cdots, n) \tag{6}$$

式中W_i，T_i分别为在域内及边界上所采用的权函数．式（6）表示余量的加权积分为零，由它可以得出包含有一组待定参数C_i的代数方程组．这就是将求解微分方程的问题转化为求代数方程组的问题，一旦C_i求得后，将它回代入式（3）即得问题的近似解．

若所选取的试函数满足所有边界条件，则式（6）可改写为

$$\int_V R_LW_i dV=0 \qquad (i=1, 2, 3, \cdots, n), \tag{7}$$

在上式中由于采用不同的权函数，而把加权余量法分为：子域法、配点法、最小二乘法、矩法和伽辽金法等．

由于伽辽金法具有较高的精度，故应用较为广泛，所以本文就是采用伽辽金加权余量法来求解．现将这种方法简介如下：

在选取试函数式（3）后，若取基函数N_i作为权函数，即

$$W_i=N_i \qquad (i=1, 2, 3, \cdots, n), \tag{8}$$

将式（8）代入式（7），则余量的加权积分式为

$$\int_V R_L N_i dV = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n), \tag{9}$$

因为上式与伽辽金的积分公式相同，故称为伽辽金加权余量法。

2　圆形曲杆的平衡微分方程

图2所示的圆形曲杆，承受均布径向荷载q，当q小于临界值q_{cr}时，圆形曲杆的平衡状态是稳定的，这时横载面上只有轴向压力$N_0=-qR$，可是当q逐渐增大並达到临界值q_{cr}时，圆形曲杆的平衡状态就成为不稳定，原先的轴线就偏离原来的圆形而成为图2中虚线所示的椭圆形。

取曲杆的轴线为s轴，横截面的对称轴为y轴，而z轴通过截面形心並垂直于s轴。

以相距为ds的两个横截面m_1n_1和m_2n_2从曲杆中截取一微段，如图3（a）所示。现假设曲杆失稳后，均布的径向荷载q仍垂直于曲杆的轴线，曲杆由于失稳，横截面上轴力改变为

$$N=N_0+N_1=-qR+N_1, \tag{10}$$

式中N_1为曲杆失稳后横截面上轴力的增量。

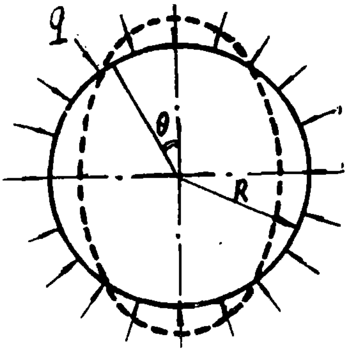

图 2

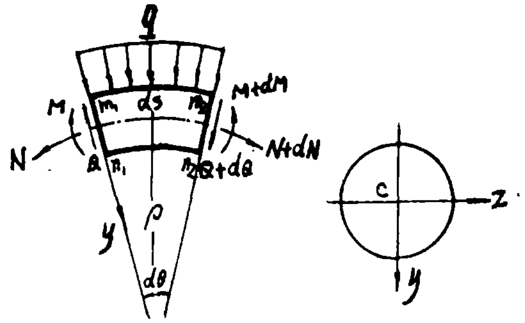

图 3

由于曲杆轴线偏离原来的圆形轴线，所以横截面上不再是均匀压缩。还有弯曲变形而引起的弯矩M和剪力Q，此时曲杆的曲率也由原来的$1/R$改变为$1/\rho$，曲率的改变量为

$$K=1/\rho-1/R. \tag{11}$$

将图3(a)所示微段上的力分别投影到m_1n_1截面的s轴和y轴，並对m_1n_1截面的z轴取矩，即

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma F_s=0:\ (N+dN)\cos(d\theta)-N-(Q+dQ)\sin(d\theta)=0,\\&\Sigma F_y=0:\ (Q+dQ)\cos(d\theta)-Q+(N+dN)\sin(d\theta)+qds=0,\\&\Sigma M_z=0:\ (M+dM)-M-(Q+dQ)ds=0,\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

在整理、化简式（12）时注意到$\cos(d\theta)\approx1$，$\sin(d\theta)\approx d\theta$，$dN=dN_1$，$ds=\rho d\theta$，$RK\approx0$，

並略去二阶微量，于是可得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dN_1}{d\theta}-Q=0,\\&\frac{dQ}{d\theta}+N_1-KqR^2=0,\\&\frac{dM}{d\theta}-RQ=0,\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

从式（13）中联立消去N_1，Q得

$$\frac{d^3M}{d\theta^3}+\frac{dM}{d\theta}-qR^3\frac{dK}{d\theta}=0,\tag{14}$$

式（14）就是圆形曲杆失稳时的平衡微分方程。

3 圆形曲杆挠曲线微分方程

以ω表示圆形曲杆变形后，横截面形心沿径向的位移，对于小曲率曲杆，由材料力学可得

$$\frac{d^2\omega}{ds^2}+\frac{\omega}{R^2}=-\frac{M}{EI},\tag{15}$$

$$K=\left(\frac{d^2\omega}{ds^2}+\frac{\omega}{R^2}\right),\tag{16}$$

由式（15），（16），並注意到$ds=Rd\theta$，于是可得

$$M=-\frac{EI}{R^2}\left(\frac{d^2\omega}{d\theta^2}+\omega\right),\tag{17}$$

$$K=\frac{1}{R^2}\left(\frac{d^2\omega}{d\theta^2}+\omega\right),\tag{18}$$

将式（17），（18）代入式（14）可得

$$\frac{d^5\omega}{d\theta^5}+(1+\beta^2)\frac{d^3\omega}{d\theta^3}+\beta^2\frac{d\omega}{d\theta}=0,\tag{19}$$

式中

$$\beta^2=1+\frac{qR^3}{EI},\tag{20}$$

式（19）就是圆形曲杆失稳时挠曲线的微分方程，在加权余量法中称为控制方程。

4 用加权余量法求解两端铰支圆拱弹性失稳时的临界荷载q_{cr}

图 1 所示为两端铰支的圆拱，承受均匀径向荷载时发生弹性失稳的反对称和对称失稳变形形式，由分析可知，圆拱在均布径向荷载q作用下总是以反对称失稳变形的形式出现，如图 1（a）所示。现选取如下满足边界条件的试函数

$$\omega=A\sin\frac{\pi}{\alpha}\theta=A\sin m\theta,\tag{21}$$

其中，$m=\pi/\alpha$；A为待定系数；$N_i=\sin m\theta$为基函数。

式（21）满足图1（a）所示的边界条件，即$\theta=0$时$\omega=0$；$\theta=\alpha$时$\omega=0$，由式（21）可得

$$\frac{d\omega}{d\theta}=Am\cos m\theta,$$
$$\frac{d^3\omega}{d\theta^3}=-Am^3\cos m\theta,\tag{22}$$
$$\frac{d^5\omega}{d\theta^5}=Am^5\cos m\theta。$$

将式（22）代入本问题的控制方程式（19）得余量R_L为

$$R_L=A[m^5-(1+\beta^2)m^3+\beta^2 m]\cos m\theta。\tag{23}$$

取权函数W_i等于基函数N_i，即

$$W_i=N_i=\sin m\theta,\tag{24}$$

将式（23），（24）代入式（9），並令加权余量积分为零：

$$\int_V R_L W_i dV=2A\int_0^\alpha[m^5-(1+\beta^2)m^3+\beta^2 m]\cos m\theta\sin m\theta d\theta$$
$$=2A[m^5-(1+\beta^2)m^3+\beta^2 m]\int_0^\alpha\cos m\theta\sin m\theta d\theta=0,$$

由上式可知必定是

$$\int_0^\alpha\cos m\theta\sin m\theta d\theta=0,\tag{25}$$

或

$$2A[m^5-(1+\beta^2)m^3+\beta^2 m]=0,\tag{26}$$

在式（27）中以$m=\frac{\pi}{\alpha}$，$\beta^2=1+\frac{qR^3}{EI}$代入整理可得

$$q_{cr}=\frac{EI}{R^3}\left[\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2-1\right]。\tag{27}$$

式（27）就是两端铰支圆拱，承受均匀径向荷载作用下发生弹性失稳时的临界荷载计算式。

5　圆环在均匀径向荷载作用下弹性失稳q_{cr}的加权余量解

对于圆环在均匀径向荷载q作用下，弹性失稳的变形形式如图2所示，式（19）仍为采用加权余量法求解q_{cr}的控制方程。

选取试函数

$$\omega=A\cos\frac{\pi}{\alpha}\theta=A\cos m\theta,\tag{28}$$

式中，$m=\pi/\alpha$；A为待定系数；$N_i=\cos m\theta$为基函数。由式（29）得

$$\frac{d\omega}{d\theta}=-Am\sin m\theta,$$
$$\frac{d^3\omega}{d\theta^3}=Am^3\sin m\theta,\tag{29}$$
$$\frac{d^5\omega}{d\theta^5}=-Am^5\sin m\theta,$$

将式（29）代入式（19）得本问题的余量R_L为

$$R_L = -A[m^5-(1+\beta^2)m^3+\beta^2 m]\sin m\theta. \tag{30}$$

取权函数W_i等于基函数N_i，即

$$W_i = N_i = \cos m\theta, \tag{31}$$

将式（30），（31）代入式（9），並令加权余量积分为零

$$\int_V R_L W_i dV = -4A\int_0^\alpha [m^5-(1+\beta^2)m^3+\beta^2 m]\sin m\theta\cos m\theta d\theta$$

$$= -4A[m^5-(1+\beta^2)m^3+\beta^2 m]\int_0^\alpha \sin md\theta\cos md\theta = 0,$$

由上式可知必定是

$$\int_0^\alpha \sin m\theta\cos m\theta d\theta = 0, \tag{32}$$

或

$$-4A[m^5-(1+\beta^2)m^3+\beta^2 m] = 0, \tag{33}$$

在式（33）中以$m=\frac{\pi}{\alpha}$，$\beta^2=1+\frac{qR^3}{EI}$代入，又因为是圆环，取$\alpha=\frac{\pi}{2}$整理后得

$$q_{cr} = \frac{3EI}{R^3}. \tag{34}$$

式（34)就是圆环在均匀径向荷载q作用下，发生弹性失稳的临界荷载计算式。

参考文献

[1] 徐文焕、陈虬，加权余量法在结构分析中的应用，中国铁道出版社，（1985），5—26.
[2] 湖南大学，结构力学（下册），人民教育出版社，（1959），670—674.
[3] 孙训方等．材料力学（下册）；人民教育出版社，（1980），166—169.
[4] 武汉水电学院，结构力学，中国工业出版社，（1960），425—429.
[5] Cernica, J. N. , *Strength of Materials, Second edition*. (1979). 419—424.

Weighted Residual Solution for Elastic Instability of Circular Ring or Arch Carried Uniformly Radial Distributed Load

Du Yaoxing

(*Department of Civil Engineering*)

Abstract For a circular ring or a circular arch subjected to an uniformly radial distributed load, a formula is derived by the weighted residual method for calculating the critical load q_{cr} in case the elastic instability is occurred.

Key words method of weighted residuals, elastic instability, circular ring, circular arch, critical load