第11卷 第4期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol.11 No.4
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1990年10月　　(NATURAL SCIENCE)　　Oct. 1990

三分子反应模型的稳定性

吴 长 泰

(管理信息科学系)

摘要 本文讨论具有常量输入的三分子反应模型的稳定性．由反应速度方程建立数学模型，方程(2)有唯一正平衡位置$R(x^*, y^*)$，且是稳定的结点或焦点，再证明$R(x^*, y^*)$是全局稳定的．

关键词 稳定性，三分子，模型

设M，N为常量输入，P，Q为生成品，x，y为中间产品，$k_i(i=1, 2, 3)$为反应速度常数（均正数），则三分子化学反应方程为

$$M \longrightarrow x \qquad N \longrightarrow y$$

$$2x + y \xrightarrow{k_1} 3y$$

$$y \xrightarrow{k_2} P \qquad x \xrightarrow{k_3} Q$$

若仍用M，N表示反应物单位输入浓度，x，y表示中间产品浓度，为研究中间产品的浓度随着时间变化的规律，首先建立数学模型

$$\begin{cases} \dot{x} = M - k_1x^2y - k_3x, \\ \dot{y} = N + k_1x^2y - k_2y, \end{cases} \tag{1}$$

无量纲化，作代换如下：

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{K_2}{K_1}}\,\bar{x}\ , \\ y = \sqrt{\dfrac{K_2}{K_1}}\,\bar{y}\ , \\ t = \dfrac{1}{K_2}\,\tau\ , \end{cases}$$

仍以x，y，t代替$\bar{x}$，$\bar{y}$，τ，则式（1）就化为

本文1989—04—08收到．

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a - bx - x^2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = c - y + x^2y, \end{cases} \tag{2}$$

其中

$$a = \frac{M}{K_2}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}, \qquad b = \frac{K_3}{K_2},$$

$$c = \frac{N}{K_2}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}},$$

並记

$$F_1(x,\ y) \equiv a - bx - x^2y,$$
$$F_2(x,\ y) \equiv c - y + x^2y,$$

图 1 为$F_1(x,\ y)$与$F_2(x,\ y)$的曲线。

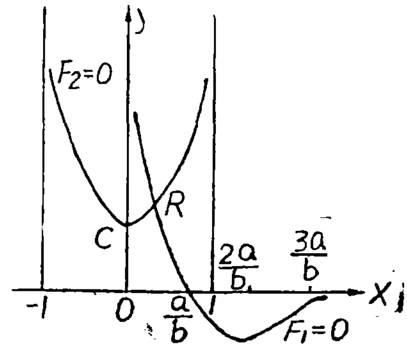

图 1　$F_1(x,\ y)$与$F_2(x,\ y)$的曲线

1）分析垂直与水平等倾线的性质

（i）等倾线$F_1(x,\ y)=0$。即 $y = a - bx/x^2$，以正半x轴，y轴为渐近线，见图 1。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx - 2a}{x^2} < 0, \qquad 当 0 < x < \frac{2a}{b} 时,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2bx + 6a}{x^4} > 0, \qquad 当\ 0 < x < \frac{3a}{b}.$$

所以，$F_1(x,\ y)=0$在$(0,\ a/b)$上是由$+\infty$单调下降到0，向上凹，

（ii）等倾线$F_2(x,\ y)=0$。即$y = c/(1-x^2)$，当$|x|<1$时，$y>0$。$F_2(x,\ y)=0$在[0，0)由C单调上升到$+\infty$，向上凹，由此得方程（2）有唯一的正平衡点$R(x^*, y^*)$且$0<x^*<1$，$y^*>C>0$。

2）讨论$R(x^*,\ y^*)$的稳定性。

因为

$$\left.\frac{\partial F_1}{\partial x}\right|_{(x^*,\ y^*)} = -b - 2x^* \cdot y^*, \qquad \left.\frac{\partial F_1}{\partial y}\right|_{(x^*,\ y^*)} = -x^{*^2},$$

$$\left.\frac{\partial F_2}{\partial x}\right|_{(x^*,\ y^*)} = 2x^*y^*, \qquad \left.\frac{\partial F_2}{\partial y}\right|_{(x^*,\ y^*)} = -1 + x^{*^2},$$

所以方程（2）在$R(^*,\ y^*)$的变分矩阵为

$$\begin{pmatrix} -b - 2x^*y^* & -x^{*2} \\ 2x^*y^* & -1 + x^{*2} \end{pmatrix},$$

$P = b + 2x^*y^* + 1 - x^{*2} > 0$。因为$|x^*|<1$，$q = b + 2x^*y^* - (b + 2x^*y^*)x^{*2} + 2x^{*3}y^* = b + 2cx^* - bx^{*2} + 2x^{*3}y^* > 0$，特征方程 $\lambda^2 + P\lambda + q = 0$ 有两个具有负实部的特征根。所以，唯一的正平衡位置$R(x^*,\ y^*)$是渐近稳定的结点或焦点。

定理　方程（2）的正平衡位置$R(x^*,\ y^*)$是全局稳定的。

证明　以$O(0,\ 0)$，$A(a/b,\ 0)$，$B(a/b,\ y^* + a + c)$，$D(0,\ y^* + a + c + a/b)$ 为顶点作

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

梯形区域$OABD$，如图2所示。

在直线段$0D$上记$L_1 \equiv x = 0$，

则关于方程（2）有

$$\frac{dL_1}{dt}\Big|_{L_1=0} = \frac{dx}{dt}\Big|_{x=0} = a > 0,$$

故直线$x=0$无切，式（2）的轨线在直线段OA上，

记$L_2 \equiv y = 0$，则关于方程（2）有

$$\frac{dL_2}{dt}\Big|_{L_2=0} = \frac{dy}{dt}\Big|_{y=0} = C > 0,$$

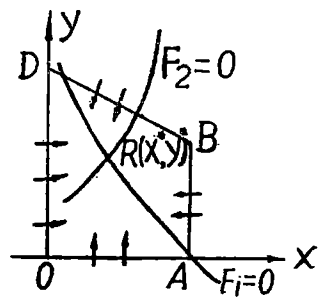

图2　梯形区域$OABD$

故直线$y=0$无切，式（2）的轨线

在其上穿过方向自外向内。在直线段AB上记 $L_3 \equiv x - a/b = 0$，则关于方程（2）有

$$\frac{dL_3}{dt}\Big|_{L_3=0} = \frac{dx}{dt}\Big|_{x=\frac{a}{b}} = -\frac{a^2}{b^2}y < 0,$$

故直线$x = a/b$无切，式（2）的轨线在其上穿过的方向自外向内。

在直线段BD上，记$L_4 \equiv x + y - y^* - a - c - a/b = 0$，则关于方程（2）有

$$\frac{dL_4}{dt}\Big|_{L_4=0} = \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)_{L_4=0} = a + c - bx - y)\Big|_{L_4=0}$$

$$= -y^* - bx - \left(\frac{a}{b} - x\right) < 0,$$

故直线$x + y = y^* - a - c - a/b$无切，式（2）的轨线在其上穿过方向自外向内。

于是从第一象限内出发的轨线都保留在梯形区域$OABD$内，而在此区域内只有唯一的正平衡位置$R(x^*,\ y^*)$，且为稳定的，显然，只要证明在此区域内无极限环，则$R(x^*,\ y^*)$为全局稳定的。为此，取Dulac函数

$$B(x,\ y) = y^{-1},$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial x}(BF_1) + \frac{\partial}{\partial y}(BF_2) = y^{-2}(-by - 2xy^2 - c) < 0,$$

故方程（2）在梯形区域$OABD$内无环，证毕。

结论　此类三分子模型具有一个很好的特性，即不论初始反应情况如何，经过相当长的时间后，其反应将稳定在平衡位$R(x^*,\ y^*)$附近。

参 考 文 献

[1] 陈兰荪，生物动力学系统，科学出版社，(1988).

[2] 陈兰荪。数学生态学模型与研究方法，科学出版社，(1988).

[3] 陈兰荪。生物数学引论，科学出版社，(1988).

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Stability of Three Molecular Reaction Model

Wu Changtai

(*Department of Management Information Science*)

Abstract The author deals wite the stability of a three molecular reaction model with constant input. The model is established from reaction velocity equation. Equation (2) has an unique positive balanced position $R(X^*, Y^*)$, which is also a stable knot or focus. It is proved that $R(X^*, Y^*)$ is stable by and large.

Key words stability, threemolecular, models

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net