第11卷 第4期 华侨大学学报自然科学版 Vol.11 No.4
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1990年10月 (NATURAL SCIENCE) Oct.1990

双退缩非线性抛物型方程的初边值问题解的存在性*

梁 学 信

(管理信息科学系)

摘要 本文讨论一类双退缩非线性抛物型方程的初边值问题(1)，并用 Galerkin方法，在 $f(x, t, u, u_x)$较为一般的情况下，证明整体解的存在性。

关键词 抛物型方程，非线性，存在性，广义解，双退缩，初边值问题，整体解

本文讨论一类双退缩非线性抛物型方程的初边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(|u|^k u)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(|u_{x_i}|^m u_{x_i})=f(x, t, u, u_x), \qquad \text{在}Q_\infty,\\ &u(x, 0)=u_0(x),\\ &u(x, t)|_{\partial\Omega}=0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中$Q_\infty=\Omega\times(0, \infty)$，$\Omega$是$n$维欧氏空间$R^n$中的有界域，其边界$\partial\Omega$充分光滑。常数$k>0$，$m>0$。

方程在$u=0$，$u_{x_i}=0$ ($i=1, 2, \cdots, n$)时退缩。在$f=|u|^\alpha u$的情况，庄琼珊证明了，当$k\leqslant\min(m+1, m+(m+2)/n)$，且$\alpha<m$，$\alpha\leqslant k$，$u_0(x)\in \mathring{W}^{1, m+2}(\Omega)\cap L^{k+2}(\Omega)$时，问题的整体解存在，而当$\max(k, m)<\alpha<m+(m+2)(k+2)/n$时，有局部解。如果初值“适当大”，解将在有限时间内发生*blow-up*。有的作者讨论小初值时整体解的存在性。在$k=0$时，方程仅在$u_{x_i}=0(i=1, 2, \cdots, n)$时退缩。文〔1〕讨论了在$f=f(x, u)$，$|f(x, u)|\leqslant c|u|^{\alpha+1}$，$\alpha>m$，且为小初值时整体解的存在性和衰减性。而在$f$还含有未知函数的一阶导数$u_x$及已知函数时，情况比较复杂。本文在$f$较为一般的情况下，讨论小初值时整体解的存在性。

1 定义和引理

设$Q_T=\Omega\times(0, T)$，常数$0<T\leqslant\infty$，$P\geqslant1$，$q\geqslant1$。

本文1989—01—05收到.

*福建省科学基金资助课题.

现引入以下函数空间的记号：

（ i ）空间$L^q((0,\ T);\ L^p(\Omega))$是有限范数

$$\|u\|_{p,p,Q_T}=\left[\int_0^T\left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{q/p}dt\right]^{1/q}$$

的函数空间。当$p=q$时，范数记为$\|u\|_{p,Q_T}$。

空间$L^\infty((0,\ T);\ L^p(\Omega))$是以

$$\|u\|_{p,\infty,Q_T}=\underset{0\leqslant t\leqslant T}{\mathrm{vrai\ max}}\left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p}$$

为范数的函数空间。

（ ii ）$L^q((0,\ T);\ \overset{\circ}{W}{}^{1,m+2}(\Omega))$是以$\|\nabla u\|_{m+2,q,Q_T}$为范数且在$Q_T$的侧面上为零的函数空间。

函数空间$L^\infty((0,\ T);\ \overset{\circ}{W}{}^{1,m+2}(\Omega))$的定义类似于（ i ）。

定义　如果对 $u(x,\ t)\in L^\infty((0,\ \infty);\ L^{k+2}(\Omega))\cap L^\infty((0,\ T);\ \overset{\circ}{W}{}^{1,m+2}(\Omega))$，及任意的$\varphi(x,\ t)C_0^1((0,\ \infty);\ L^{k+2}(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^{1,m+2}(\Omega))$，使积分恒等式

$$\int_0^\infty\int_\Omega\left\{-|u|^k u\varphi_t+\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^m u_{x_i}\varphi_{x_i}\right\}dxdt$$

$$=\int_0^\infty\int_\Omega f(x,t,u,u_x)\varphi dxdt+\int_\Omega |u_0(x)|^k u_0(x)\varphi(x,0)dx \qquad (2)$$

成立，则称$u(x,\ t)$为问题（1）的广义解。

引理[1]　设$|u|^\lambda u\in W^{1,p}(\Omega)$，$\lambda>0$，$p>1$，则有

$$\|u\|_{q,\Omega}\leqslant C\|u\|_r^{1-\theta}\ \|\nabla(|u|^\lambda u)\|_{p,\Omega}^{\theta/(1+\lambda)}, \qquad (3)$$

其中常数c不依赖于Ω，$\theta=(\lambda+1)(r^{-1}-q^{-1})[n^{-1}-p^{-1}+(1+\lambda)r^{-1}]^{-1}$。当$n>p$时，$1\leqslant r\leqslant q\leqslant(1+\lambda)np/(n-p)$；当$n=p>1$时，$1\leqslant r\leqslant q<\infty$；当$1<n<p$时，$1\leqslant r\leqslant q\leqslant\infty$。

2．整体解的存在性

定理　设$k>0$，$m>0$，函数$f(x,\ t,\ u,\ p)$当u，p固定时，关于变元$(x,\ t)\in\Omega\times R^+$可测，当$(x,\ t)$固定时，关于变元$(u,\ p)\in R^1\times R^n$连续，且满足下面结构条件

$$|f(x,\ t,\ u,\ p)|\leqslant k_0|u|^{\alpha+1}+\varphi_1(x,\ t)|p|^\beta+\varphi_2(x,\ t). \qquad (4)$$

其中

$k_0>0$是常数，

$$m<\alpha<m+\frac{(k+2)(m+2)}{n}, \qquad (5)$$

$$k<\min\left(\alpha,\ \frac{(\alpha+2)[m(n+2)+4]}{2n(m+2)}\right), \qquad (6)$$

$$0 \leqslant \beta < m + 2 - \frac{n}{n+k+2}. \tag{7}$$

$$\varphi_1(x,\ t) \in L^\infty(\Omega),$$

且$t \to \infty$时$\|\varphi_1(\cdot,\ t)\|_{\infty,\Omega}$单调趋于零。

$$\varphi_2(x,\ t) \in L^\infty((0,\ \infty);\ L^q(\Omega)),\quad q = (\alpha+2)/(\alpha+1),$$

且$t \to \infty$时，$\|\varphi_2(\cdot,\ t)\|_{q,\Omega}$单调趋于零。

$$u_0(x) \in L^{k+2}(\Omega).$$

那么存在常数$\delta_1 > 0$，$\delta_2 > 0$和$M_0 > 0$，只要$\|\varphi_1(\cdot,0)\|_\infty < \delta_1$，$\|\varphi_2(\cdot,0)\|_q < \delta_2$，和$\|u_0(x)\|_{k+2} < M_0$，问题（1）有整体解$u(x,\ t) \in L^\infty((0,\ T);\ W^{1,m+2}(\Omega)) \cap L^\infty((0,\ \infty);\ L^{k+2}(\Omega))$。

证　用Calerkin方法证明。设$\{\Psi_j(x)\}$是$L^{k+2}(\Omega) \cap W^{1,m+2}(\Omega)$的完全系，满足$\max(|\Psi_j|,\ |\nabla\Psi_j|) = c_j < \infty$。作近似解

$$u_{N,\varepsilon}(x,t) = \sum_{j=1}^{N} g_{jN,\varepsilon}(t)\Psi_j(x),$$

其中$g_{jN,\varepsilon}(t)$由以下的Cauchy问题确定

$$\frac{d}{dt}((|u_{N,\varepsilon}|^k + \varepsilon)u_{N,\varepsilon},\ \Psi_j(x)) + \left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\right|^m \frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i},\ \Psi_j(x)\right) = \left(f\left(x,t,\ u_{N,\varepsilon},\ \frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x}\right),\ \Psi_j(x)\right),\quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ N, \tag{8}$$

$$u_{N,\varepsilon}(0) = u_{0N}, \tag{9}$$

其中

$$u_{0N} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{jN}\Psi_j(x) \Rightarrow u_0(x),\ 在L^{k+2}(\Omega),\qquad 常数\varepsilon > 0.$$

由常微分方程知，Cauchy问题（8）、（9）存在解$g_{jN,\varepsilon}(t)$。

i）先证$\sup\limits_{t \geqslant 0}\|u_{N,\varepsilon}\|_{k+2,\Omega} \leqslant C$，其中常数$C$不依赖于$N$、$\varepsilon$和$u_{N,\varepsilon}(x,t)$。

以$g_{jN,\varepsilon}(t)$乘式（8），关于j求和，并利用条件式（4）得

$$\frac{1}{k+2}\frac{d}{dt}\|u_{N,\varepsilon}\|_{k+2}^{k+2} + \|\nabla u_{N,\varepsilon}\|_{m+2}^{m+2} \leqslant k_0\|u_{N,\varepsilon}\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} + \int_\Omega \varphi_1(x,\ t)|u_{N,\varepsilon}||\nabla u_{N,\varepsilon}|^\beta dx + \int_\Omega \varphi_2(x,\ t)|u_{N,\varepsilon}|dx. \tag{10}$$

应用引理，对式（10）右边第一项（为方便，下面都设$n > m+2$）有

$$k_0\|u_{N,\varepsilon}\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \leqslant k_0(C\|u_{N,\varepsilon}\|_{k+2}^{1-\theta_1}\|\nabla u_{N,\varepsilon}\|_{m+2}^{\theta_1})^{\alpha+2}, \tag{11}$$

其中

$$\theta_1 = \frac{m+2}{\alpha+2}\cdot\frac{n(\alpha-k)}{(m+2)(k+2)+n(m-k)}.$$

由于　$\alpha < m + (k+2)(m+2)/n$，所以

$$\theta_1 < 1,\ 且(1-\theta_1)(\alpha+2) > \alpha - m,$$

再用Sobolev不等式便得

$$k_0\|u_{N,\varepsilon}\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \leqslant C_0\|u_{N,\varepsilon}\|_{k+2}^{\alpha-m}\|\nabla u_{N,\varepsilon}\|_{m+2}^{m+2}, \tag{12}$$

其中常数C_0不依赖于N和ε;

对式(10)右边第二项用Hölder不等式，有

$$\int_\Omega \varphi_1(x,\ t)|u_{N,\varepsilon}||\nabla u_{N,\varepsilon}|^\beta dx \leqslant \|\varphi_1(\cdot,\ t)\|_\infty \|u_{N,\varepsilon}\|_{h+2}\|\nabla u_{N,\varepsilon}\|^\beta_{m+2},$$

由于式(7)

$$h+2=\frac{m+2}{m+2-\beta}<m+\frac{(k+2)(m+2)}{n}+2=\tilde{h}+2,$$

因此应用引理及Sobolev不等式

$$\int_\Omega \varphi_1(x,\ t)|u_{N,\varepsilon}||\nabla u_{N,\varepsilon}|^\beta dx \leqslant C\|\varphi_1(\cdot,\ t)\|_\infty \|u_{N,\varepsilon}\|_{\tilde{h}+2}\|\nabla u_{N,\varepsilon}\|^\beta_{m+2}$$

$$\leqslant C\|\varphi_1(\cdot,\ t\|_\infty \|u_{N,\varepsilon}\|^{1-\theta_2}_{k+2}\|\nabla u_{N,\varepsilon}\|^{\theta_2+\beta}_{m+2}$$

$$\leqslant C_1\|\varphi_1(\cdot,\ t)\|_\infty \|u_{N,\varepsilon}\|^{\beta-(m+1)}_{k+2}\cdot\|\nabla u_{N,\varepsilon}\|^{m+2}_{m+2}, \tag{13}$$

这是由于式(5)，有

$$\theta_2=\frac{m+2}{\tilde{h}+2}\cdot\frac{n(\tilde{h}-k)}{(k+2)(m+2)+n(m-k)}<1$$

及

$$1-\theta_2>\beta-(m+1),$$

其中常数C_1不依赖于N，ε。

最后对式(10)右边第三项用Hölder不等式，引理及Sobolev不等式得

$$\int_\Omega \varphi_2(x,\ t)|u_{N,\varepsilon}|dx \leqslant \|\varphi_2(\cdot,\ t)\|_q \|u_{N,\varepsilon}\|_{\alpha+2}$$

$$\leqslant C\|\varphi_2(\cdot,\ t)\|_q \|u_{N,\varepsilon}\|^{1-\theta_1}_{k+2}\|\nabla u_{N,\varepsilon}\|^{\theta_1}_{m+2}$$

$$\leqslant C_2\|\varphi_2(\cdot,\ t)\|_q \|u_{N,\varepsilon}\|^{-(m+1)}_{k+2}\|\nabla u_{N,\varepsilon}\|^{m+2}_{m+2}, \tag{14}$$

C_2不依赖于N和ε。

将式(12)、(13)和(14)代入式(10)得

$$\frac{1}{k+2}\frac{d}{dt}\|u_{N,\varepsilon}\|^{k+2}_{k+2} \leqslant \|\nabla u_{N,\varepsilon}\|^{m+2}_{m+2}\Big\{-1+C_0\|u_{N,\varepsilon}\|^{\alpha-m}_{k+2}$$

$$+C_1\|\varphi_1(\cdot,\ t)\|_\infty \|u_{N,\varepsilon}\|^{\beta-(m+1)}_{k+2}+C_2\|\varphi_2(\cdot,\ t)\|_q \|u_{N,\varepsilon}\|^{-(m+1)}_{k+2}\Big\}. \tag{15}$$

下面以$\beta>m+1$，且$\alpha-m<\beta-(m+1)$为例，从式(15)证明$\sup\limits_{t\geqslant 0}\|u_{N,\varepsilon}\|_{k+2}\leqslant C$。

设$M=C_0{}^{-1/(\alpha-m)}$，要证对$\forall M_0<M$，那么当初值$\|u_0\|_{k+2}<M_0$，存在$\delta_1>0$，$\delta_2>0$，使得$\|\varphi_1(0)\|_\infty<\delta_1$，$\|\varphi_2(0)\|_q<\delta_2$时，$\sup\limits_{t\geqslant 0}\|u_{N,\varepsilon}\|_{k+2}\leqslant C$。

对式(15)右边第二项用Young不等式得

$$\frac{1}{k+2}\frac{d}{dt}\|u_{N,\varepsilon}\|^{k+2}_{k+2} \leqslant \|\nabla u_{N,\varepsilon}\|^{m+2}_{m+2}\Big\{-1+\frac{\beta-(\alpha+1)}{\beta-(m+1)}C_0M_0{}^{\alpha-m}$$

$$+\Big(\frac{\alpha-m}{\beta-(m+1)}C_0M_0{}^{\alpha-\beta+1}+C_1\|\varphi_1(\cdot,\ t)\|_\infty\Big)\|u_{N,\varepsilon}\|^{\beta-(m+1)}_{k+2}$$

$$+C_2\|\varphi_2(\cdot,\ t)\|_q\|u_{N,\varepsilon}\|^{-(m+1)}_{k+2}\Big\}.$$

考虑函数

$$G_t(z)=-1+\frac{\beta-(\alpha+1)}{\beta-(m+1)}C_0M_0{}^{\alpha-m}+\left(\frac{\alpha-m}{\beta-(m+1)}C_0M_0{}^{\alpha-\beta+1}+C_1\|\varphi_1(\cdot,\ t)\|_\infty\right)\cdot z^{\beta-(m+1)}+C_2\|\varphi_2(\cdot,\ t)\|_q z^{-(m+1)}$$

作为单参数t的函数族$\{G_t(z)\}$，有

$$G_t(z)\to\infty \qquad (z\to 0\text{或}z\to\infty),$$

且有唯一的极小点，并对固定的z，由于$\|\varphi_1(\cdot,\ t)\|_\infty$及$\|\varphi_2(\cdot,\ t)\|_q$对$t$是单减的，所以$G_t(z)$对$t$也是单减的，现取$\|\varphi_1(0)\|_\infty<\delta_1$，$\|\varphi_2(0)\|_q<\delta_2$充分小，使

$$\begin{aligned}G_0(M_0)&<-1+\frac{\beta-(\alpha+1)}{\beta-(m+1)}C_0M_0{}^{\alpha-m}+\left(\frac{\alpha-m}{\beta-(m+1)}C_0M_0{}^{\alpha-\beta+1}+C_1\delta_1\right)M_0{}^{\beta-(m+1)}\\&\quad+C_2\delta_2M_0^{-(m+1)}\\&=-1+C_0M_0^{\alpha-m}+C_1\delta_1M_0^{\beta-(m+1)}+C_2\delta_2M_0^{-(m+1)}<0,\end{aligned}\tag{16}$$

那么由$G_0(z)$的性质知，在$(0,\ M_0)$内有$G_0(z)=0$的一个根z_1。因此如果初值满足$\|u_0\|_{k+2}<M_0$，那么有两种情况：

（1）如果$\|u_0\|_{k+2}<z_1$，那么根据解关于变量t的连续性，存在t_1，使

$\|u_{N,\varepsilon}\|_{k+2}<z_1<M_0,\qquad t\in[0,\ t_1]$。

（2）如果$\|u_0\|_{k+2}\in(z_1,\ M_0)$，那么注意到式（15），在$t=0$有

$$\frac{d}{dt}\|u_{N,\varepsilon}\|_{k+2}<0,$$

因此存在t_2，使得对$\forall t\in[0,\ t_2]$有

$$\|u_{N,\varepsilon}\|_{k+2}\leqslant\|u_0\|_{k+2}<M_0,$$

取$t_0=min(t_1,\ t_2)$，以t_0开始，重复以上步骤，继续作下去便得

$$\sup_{t\geqslant 0}\|u_{N,\varepsilon}\|_{k+2}\leqslant C\tag{17}$$

成立。

当$0\leqslant\beta<m+1$时，对式（15）右边第三项用Young不等式，化为

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+2}\frac{d}{dt}\|u_{N,\varepsilon}\|_{k+2}^{k+2}\leqslant\|\nabla u_{N,\varepsilon}\|_{m+2}^{m+2}\Big\{&-1+\varepsilon_0+C_0\|u_{N,\varepsilon}\|_{k+2}^{\alpha-m}\\&+(C\varepsilon_0\|\varphi_1(\cdot,\ t)\|_\infty^{\frac{m+1}{m+1-\beta}}+C_2\|\varphi_2(\cdot,\ t)\|_q)\|u_{N,\varepsilon}\|_{k+2}^{-(m+1)}\Big\}\end{aligned}$$

仍可类似于上面证明得式（17）的结论成立，对$\beta=m+1$的情况也类似。

2）其次证$\int_0^T\|\nabla u_{N,\varepsilon}\|_{m+2}^{m+2}dt\leqslant C(T)$，其中$C(T)$不依赖于$N$和$\varepsilon$。

由于有估计式（17）及式中的$\theta_1(\alpha+2)<m+2$，对式（11）右边用Young不等式有

$$k_0\|u_{N,\varepsilon}\|_{\alpha+2}^{\alpha+2}\leqslant\frac{1}{6}\|\nabla u_{N,\varepsilon}\|_{m+2}^{m+2}+C。\tag{18}$$

类似地，由于$\theta_2+\beta<m+2$，由式（15）有

$$\int_\Omega\varphi_1(x,\ t)|u_{N,\varepsilon}||\nabla u_{N,\varepsilon}|^\beta dx\leqslant\frac{1}{6}\|\nabla u_{N,\varepsilon}\|_{m+2}^{m+2}+C\tag{19}$$

及

$$\int_\Omega \varphi^2(x,t)|u_{N,\varepsilon}|dx \leqslant \frac{1}{6}\|\nabla u_{N,\varepsilon}\|_{m+2}^{m+2} + C, \tag{20}$$

将式（18），（19），（20）代入（10），并对 t 从0到T积分便得

$$\|u_{N,\varepsilon}\|_{k+2}^{k+2} + \int_0^T \|\nabla u_{N,\varepsilon}\|_{m+2}^{m+2} dt \leqslant C(T), \tag{21}$$

从而有

$$\int_0^T \|u_{N,\varepsilon}\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} dt \leqslant C(T)。 \tag{22}$$

3）解的存在性：

（i）由式（17）、（21）和（22）知存在$\{|u_{N,\varepsilon}|^k u_{N,\varepsilon}\}$的一个子列（仍记为$\{|u_{N,\varepsilon}|^k u_{N,\varepsilon}\}$），使$N\to\infty$，$\varepsilon\to 0$时

$$|u_{N,\varepsilon}|^k u_{N,\varepsilon}(x,t) \rightharpoonup |u|^k u(x,t)$$

$$\text{在} L^\infty((0,\infty); L^{(k+2)/(k+1)}(\Omega)) \cap L^\lambda((0,T); W^{1,\lambda}(\Omega)),$$

其中

$$\lambda = \frac{(m+2)(\alpha+2)}{k(m+2)+(\alpha+2)} > 1。$$

记

$$W_{N,\varepsilon}(x,t) = (|u_{N,\varepsilon}|^k + \varepsilon)u_{N,\varepsilon}(x,t),$$

由方程（8）得

$$(W_{N,\varepsilon}(x,t+h) - W_{N,\varepsilon}(x,t), \Psi_j(x)) = \int_\Omega \int_t^{t+h} \frac{\partial W_{N,\varepsilon}}{\partial t}\Psi_j(x)dt\,dx$$

$$\leqslant \left| \int_t^{t+h} \int_\Omega \left\{ \left| \left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i} \right|^m \frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i} \right) \right| \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left| f(x, t, u_{N,\varepsilon}, \frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x})\Psi_j(x) \right| \right\} dx dt \right|$$

$$\leqslant C_j \left| \int_t^{t+h} \int_\Omega \left(|\nabla u_{N,\varepsilon}|^{m+1} + \left| f(x, t, u_{N,\varepsilon}, \frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x}) \right| \right) dx dt \right|$$

$$\leqslant C_j \|\nabla u_{N,\varepsilon}\|_{m+2, Q_T}^{m+1} (h\,mes\,\Omega)^{\frac{1}{m+2}} + \|f\|_{l_0, Q_T} (h\,mes\,\Omega)^{1-\frac{1}{l_0}},$$

其中

$$l_0 = \min\left(\frac{m+2}{\beta}, \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right)。$$

因此$(W_{N,\varepsilon}(x,t), \Psi_j(x))$ $j=1, 2, \cdots$ 对每个固定的j关于t等度连续。又由估计式（17），有

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} |(W_{N,\varepsilon}(x,t), \Psi_j(x))| \leqslant C,$$

所以对每个固定的j，$\{W_{N,\varepsilon}(x,t)\}$ 必存在子列（仍记为 $\{W_{N,\varepsilon}(x,t)\}$），当 $N\to\infty$，$\varepsilon\to 0$时

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} |(W_{N,\varepsilon}(x,t) - W(x,t), \Psi_j(x))| \to 0,$$

其中

$$W(x,\ t)=|u|^k u(x,\ t).$$

再由文[2]知，对$\forall\varepsilon'>0$，存在$N>0$及$\varepsilon_0>0$，当N_1，$N_2>N$，ε_1，$\varepsilon_2<\varepsilon_0$时，有

$$\|W_{N_1,\varepsilon_1}-W_{N_2,\varepsilon_2}\|_2\leqslant C\left[\sum_{j=1}^{N}(W_{N_1,\varepsilon_1}-W_{N_2,\varepsilon_2},\ \Psi_j)^2\right]^{1/2}$$

$$+\varepsilon'\left\|\frac{\partial W_{N_1,\varepsilon_1}}{\partial x_i}-\frac{\partial W_{N_2,\varepsilon_2}}{\partial x_i}\right\|_{\lambda,\Omega}.$$

因此，当N_1，N_2充分大，ε_1，ε_2充分小时，

$$\int_0^T\|W_{N_1,\varepsilon_1}-W_{N_1,\varepsilon_2}\|_2dt\leqslant CT\left[\max_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{j=1}^{N}(W_{N_1,\varepsilon_1}-W_{N_2,\varepsilon_2},\ \Psi_j)^2\right]^{1/2}$$

$$+\varepsilon'\int_0^T\left\|\frac{\partial W_{N_1,\varepsilon_1}}{\partial x_i}-\frac{\partial W_{N_2,\varepsilon_2}}{\partial x_i}\right\|_\lambda dt$$

$$\leqslant CT\left[\max_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{j=1}^{N}(W_{N_1,\varepsilon_1}-W_{N_2,\varepsilon_2},\ \Psi_j)^2\right]^{1/2}$$

$$+\varepsilon' T^{1+\frac{1}{m+2}-\frac{k}{\alpha+2}}\|u_{N_1,\varepsilon_1}-u_{N_2,\varepsilon_2}\|^{k}_{\alpha+2,\,Q_T}$$

$$\cdot\|\nabla(u_{N_1,\varepsilon_1}-u_{N_2,\varepsilon_2})\|_{m+2,Q_T}\leqslant\varepsilon'',$$

于是

$$\|W_{N,\varepsilon}-W\|_{2,Q_T}\to 0\qquad(N\to\infty,\ \varepsilon\to 0),$$

也有

$$\||u_{N,\varepsilon}|^k u_{N,\varepsilon}-|u|^k u\|_{2,Q_T}\to 0\qquad(N\to\infty,\ \varepsilon\to 0),$$

所以$\{|u_{N,\varepsilon}|^k u_{N,\varepsilon}(x,\ t)\}$中可选出子列（仍记为$\{|u_{N,\varepsilon}|^k u_{N,\varepsilon}(x,\ t)\}$）使

$$|u_{N,\varepsilon}|^k u_{N,\varepsilon}(x,\ t)\to|u|^k u(x,\ t),\qquad a.\ e.\ 在Q_T中,$$

从而　　$u_{N,\varepsilon}(x,\ t)\to u(x,\ t)$，　　$a.\ e.$ 在Q_T中。

（ii）再证$\nabla u_{N,\varepsilon}\to\nabla u$，$a.\ e.$ 在Q_T中：

对$\forall\varphi(x,\ t)\in C_0^1((0,\ \infty),\ L^{k+2}(\Omega)\cap\dot W^{1,\,m+2}(\Omega))$，由式（8）有

$$\iiint_{Q_\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[(|u_{N,\varepsilon}|^k+\varepsilon)u_{N,\varepsilon}]\varphi+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\right|^m\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right.$$

$$\left.-f\left(x,\ t,\ u_{N,\varepsilon},\ \frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x}\right)\varphi\right\}dxdt=0,\tag{23}$$

因　$f\left(x,\ t,\ u_{N,\varepsilon},\ \dfrac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\in L^{l_0}(Q_T)$，知存在$F(x,\ t)$，使

$$f\left(x,\ t,\ u_{N,\varepsilon},\ \frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x}\right)\to F(x,\ t),\qquad 在\ L^{l_0}(Q_T),$$

因　$\left|\dfrac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\right|^m\dfrac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\in L^{\frac{m+2}{m+1}}(Q_T)$，知存在$a_i(x,\ t)$，使

$$\left|\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\right|^m\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\to a_i(x,t),\qquad 在L^{\frac{m+2}{m+1}}(Q_T),$$

在式(23)中，令$N\to\infty$，$\varepsilon\to0$得

$$\iint_{Q_\infty}\left\{-|u|^k u\varphi_t+\sum_{i=1}^n a_i(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-F(x,t)\varphi\right\}dxdt$$

$$=\int_\Omega |u_0|^k u_0(x)\varphi(x,0)dx. \tag{24}$$

将$u_{N,\varepsilon}(x,t)$，$u(x,t)$，$F(x,t)$及$a_i(x,t)$以零开拓到$(-\infty,0)$及(T,∞)上，并对充分小的ρ作非负光滑函数

$$\zeta_\rho(t)=\begin{cases}0, & t\in(-\infty,\rho)\cup(T-\rho,\infty),\\ 1, & t\in(2\rho,T-2\rho),\\ \leqslant1, & 其余.\end{cases}$$

取$\varphi(x,t)=\eta(x,t)(\zeta_\rho(t))^{k+1}$

$$\forall\eta(x,t)\in C_0^1((-\infty,\infty),\ L^{k+2}(\Omega)\cap\dot W^{1,m+2}(\Omega)),$$

$$v_{N,\varepsilon}=u_{N,\varepsilon}\zeta_\rho,\qquad v=v\zeta_\rho,$$

则式(23)变为

$$\iint_Q\left\{\eta\frac{\partial}{\partial t}(|v_{N,\varepsilon}|^k v_{N,\varepsilon})+\zeta_\rho^{k+1}\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\right|^m\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right.$$

$$\left.-\left[|u_{N,\varepsilon}|^k u_{N,\varepsilon}\frac{\partial\zeta_\rho^{k+1}}{\partial t}+f(x,t,u_{N,\varepsilon},\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x})\zeta_\rho^{k+1}-\varepsilon\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial t}\zeta_\rho^{k+1}\right]\eta\right\}$$

$$\cdot dxdt=0, \tag{25}$$

式(24)变为

$$\iint_Q\left\{-|u|^k v\eta_t+\zeta_\rho^{k+1}\sum_{i=1}^n a_i(x,t)\frac{\partial\eta}{\partial x_i}-F(x,t)\zeta_\rho^{k+1}\eta\right.$$

$$\left.-|u|^k u\frac{\partial\vartheta_\rho^{k+1}}{\partial t}\eta\right\}dxdt=0, \tag{26}$$

其中 $Q=\Omega\times(-\infty,\infty)$。

对固定的ρ，设$r\in(0,\rho/2)$为某个实数，取

$$\xi(x,t)\in L^\infty((-\infty,\infty);\ L^{k+2}(\Omega)\cap\dot W^{1,m+2}(\Omega))$$

作 $\xi(x,t)$的平均函数

$$\xi_r=\frac{1}{r}\int_t^{t+r}\xi(x,\tau)d\tau,\qquad \xi_{\bar r}=\frac{1}{r}\int_{t-r}^t\zeta(x,\tau)d\tau,$$

则 ξ_r，$\xi_{\bar r}\in C_0^1((-\infty,\infty);\ L^{k+2}(\Omega)\cap\dot W^{1,m+2}(\Omega))$。

在式(26)中取$\eta=\xi_{\bar r}$，并取$\zeta=v_r$，由平均函数的性质得

$$\iint_Q\left\{\frac{\partial}{\partial t}(|v|^k v)_r\zeta+(\zeta_\rho^{k+1}\sum_{i=1}^n a_i(x,t))_r\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\right.$$

$$-\Big[\Big(F(x,\ t)\zeta_\rho^{k+1}\ \Big)\zeta+\Big(\ |u|^k\ u\frac{\partial\zeta_\rho^{k+1}}{\partial t}\Big)_r\ \zeta\ \Big\}dxdt=0,$$

或得

$$\iint_Q\Big\{\Big(\zeta_\rho^{k+1}\ \sum_{i=1}^n a_i(x,\ t)\Big)_r\Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)_r-[(F(x,\ t)\zeta_\rho^{k+1}\ )_r\ v_r+\Big(\ |u|^k\ u\frac{\partial\zeta_\rho^{k+1}}{\partial t}\Big)_r v_r\Big\}\cdot dxdt=0,$$

令$r\to0$得

$$\iint_Q\Big\{\zeta_\rho^{k+1}\ \sum_{i=1}^n a_i(x,\ t)\frac{\partial v}{\partial x_i}-\Big(F(x,\ t)\zeta_\rho^{k+1}\ +|u|^k\ u\frac{\partial\zeta_\rho^{k+1}}{\partial t}\Big)v\Big\}dxdt=0,\tag{27}$$

考虑积分

$$\begin{aligned}J(N,\ \varepsilon)=&\iint_Q\zeta_\rho^{k+1}\ \Big[\sum_{i=1}^n\Big(\Big|\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\Big|^m\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}-\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^m\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\Big(\frac{\partial v_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}-\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)dxdt\\=&\iint_Q\zeta_\rho^{k+1}\ \sum_{i=1}^n\Big|\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\Big|^m\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\ \frac{\partial v_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}dxdt\\&-\iint_Q\zeta_\rho^{k+1}\ \sum_{i=1}^n\Big|\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\Big|^m\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\ \frac{\partial v}{\partial x_i}dxdt\\&-\iint_Q\zeta_\rho^{k+1}\ \sum_{i=1}^n\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^m\frac{\partial u}{\partial x_i}\ \frac{\partial v_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}dxdt\\&+\iint_Q\zeta_\rho^{k+1}\ \sum_{i=1}^n\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^m\frac{\partial u}{\partial x_i}\ \frac{\partial v}{\partial x_i}dxdt\\=&\sum_{i=1}^4 J_i(N,\ \varepsilon),\end{aligned}$$

在式（25）中取$\eta=u_{N,\varepsilon}$，那么得

$$\begin{aligned}J_1(N,\ \varepsilon)=&\iint_Q\Big\{f(x,\ t,u_{N,\varepsilon},\ \frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x})\zeta_\rho^{k+1}\ +|u_{N,\varepsilon}|^k u_{N,\varepsilon}\frac{\partial\zeta_\rho^{k+1}}{\partial t}\\&-\ \varepsilon\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial t}\zeta_\rho^{k+1}\ \Big\}v_{N,\varepsilon}dxdt\\=&\iint_Q\Big\{f(x,\ t,\ v_{N,\varepsilon},\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x})v_{N,\varepsilon}\zeta_\rho^{k+1}\ +|u_{N,\varepsilon}|^k\ u_{N,\varepsilon}v\frac{\partial\zeta_\rho^{k+1}}{\partial t}\\&+|u_{N,\varepsilon}|^k\ u_{N,\varepsilon}(v_{N,\varepsilon}-v\frac{\partial\zeta_\rho^{k+1}}{\partial t}-\frac{\varepsilon}{2}\ \frac{\partial}{\partial t}(v^2_{N,\varepsilon}\zeta_\rho^k)\ +\frac{\varepsilon(k+2)}{2(k+1)}u_{N,\varepsilon}\ v_{N,\varepsilon}\frac{\partial\zeta_\rho^{k+1}}{\partial t}\Big\}dxdt\\&\to\iint_Q\Big[F(x,\ t)\zeta_\rho^{k+1}\ +|u|^k\ u\frac{\partial\zeta_\rho^{k+1}}{\partial t}\Big]vdxdt,\qquad(\varepsilon\to0),\end{aligned}$$

$$J_3(N,\ \varepsilon)\to-\iint_Q\zeta_\rho^{k+1}\ \sum_{i=1}^n\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^m\frac{\partial u}{\partial x_i}\ \frac{\partial v}{\partial x_i}dxdt=J_4(N,\ \varepsilon),$$

$$J_2(N,\ \varepsilon)\to-\iint_Q\zeta_\rho^{k+1}\ \sum_{i=1}^n a_i(x,\ t)\frac{\partial v}{\partial x_i}dxdt,$$

注意到式(27)，便得

$$J(N,\varepsilon)\to 0.$$

由ρ的任意性，便得$N\to\infty$，$\varepsilon\to 0$时

$$\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\to\frac{\partial u}{\partial x_i},\qquad a.\ e.\ 在Q_T中,$$

从而

$$\left|\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\right|^m\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i}\to\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^m\frac{\partial u}{\partial x_i},\qquad a.\ e.\ 在Q_T中,$$

$$f(x,t,u_{N,\varepsilon},\frac{\partial u_{N,\varepsilon}}{\partial x_i})\to f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}),\qquad a.\ e.\ 在Q_T中,$$

在式(23)中将第一项分部积分，并令$N\to\infty$，$\varepsilon\to 0$便得$u(x,t)$满足

$$\iint_{Q_T}\left\{-|u|^k u\varphi_t+\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^m\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\}dxdt$$

$$=\iint_{Q_T}f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})\varphi dxdt+\int_\Omega|u_0|^k u_0(x)\varphi(x,0)dx,$$

于是定理证完.

参　考　文　献

[1] Nakao, M., Global Solutions for Some Nonlinear Parabolic Equations with Nonmonotonic Perturbations, *Nonlinear Analysis*, 10(1986), 299—314.

[2] Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., and Ural'tseva, N.N., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Amer. Math. Soc. Providence, R. I., (1968).

The Existence of Solutions for the Initial Boundary Value of Double Degenerate Non-linear Parabolic Equations

Liang Xuexin

(*Department of Management Information Science*)

Abstract The author discusses in this paper the initial boundary value double degenerate non-linear parabolic equations (1). The existence of global solutions under more generalized condition of f(x, t, u, ux) is demonstrated by Galerkin method.

Key words parabolic equation, non-linear, existence, generalized solution, double degenerate, initial boundary value problem, global solution