

一阶微分方程初值问题的单调叠代术*

张 上 泰

(管理信息科学系)

摘要 考虑一阶微分方程的初值问题,目的是改善文[1,3]里的一些结论.本文在单边李普希兹条件之下,给出存在性的构造性证明并指明了解的唯一性.

关键词 微分方程,单调叠代术,存在性,解

对于许多非线性问题解的存在唯一性证明,上、下解方法是一个有效而有趣的技巧.在使用这种技巧的过程中,往往伴随着上、下解的单调叠代,使得非线性问题解的存在界限的估计越来越好.这从理论上或构造上,都具有很大意义.这种技巧和方法越来越广泛地应用在抽象空间中的一般算子方程,也广泛地应用在具体的非线性方程的研究中. G.S.Ladde, V.Lakshmikantham, A.S.Vatsala在文^[1]中系统地论述了非线性微分方程中的这种技巧和所得的结果.

本文考虑如下一阶微分方程的纯量初值问题

$$u' = f(t, u), \quad u(0) = u_0, \quad (1)$$

这里

$$f \in C[J \times R, R], \quad J = [0, T].$$

我们将改进和补充文[1]和[3]中的某些工作.

如果一个函数 $v \in C^1[J, R]$ 使得

$$v' \leq f(t, v), \quad t \in J \text{ 和 } v(0) \leq u_0,$$

就称它是非线性初值问题(1)的一个下解,而如果上述不等式反向的话,就称它是一个上解^[1].关于初值问题(1)上、下解的存在性和解的存在唯一性有如下的

定理1 假定有常数 L 使得, 当 $u \geq \bar{u}$ 时,

$$f(t, u) - f(t, \bar{u}) \leq L(u - \bar{u}), \quad (2)$$

那末

(i) 存在初值问题(1)的上解 w_0 和下解 v_0 , 使得在 J 上有 $u_0 \leq w_0$,

(ii) 初值问题(1)有一个唯一解 u , 而且在 J 上有 $u_0 \leq u \leq w_0$.

本文1989-06-22收到.

*福建省科学基金资助课题.

证明 考虑线性微分方程初值问题

$$u' = f(t, u_0) + L(u - u_0), \quad u(0) = \bar{u}_0, \quad (3)$$

其中

$$\bar{u}_0 = \max \left\{ u_0, \max(u_0 - \int_0^t f(x, u_0) e^{-Lx} dx) \right\}.$$

显然, 初值问题(3)在 J 上存在唯一解, 记它为 w_0 . 对于它, 应有

$$\begin{aligned} w_0 &= e^{Lt} \left\{ \bar{u}_0 + \int_0^t (f(x, u_0) - Lu_0) e^{-Lx} dx \right\} \\ &= e^{Lt} \left\{ \bar{u}_0 + \int_0^t f(x, u_0) e^{-Lx} dx + u_0 e^{-Lt} - u_0 \right\} \\ &= u_0 + e^{Lt} \left\{ \bar{u}_0 - (u_0 - \int_0^t f(x, u_0) e^{-Lx} dx) \right\} \geq u_0. \end{aligned}$$

根据条件(2)有

$$w_0' = f(t, u_0) + L(w_0 - u_0) \geq f(t, w_0) - L(w_0 - u_0) + L(w_0 - u_0) = f(t, w_0).$$

这说明 w_0 是初值问题(1)的一个上解。

下面, 考虑方程(3)对于初值 $u(0) = \bar{v}_0$ 的唯一解 v_0 , 这里

$$\bar{v}_0 = \min \left\{ u_0, \min(u_0 - \int_0^t f(x, u_0) e^{-Lx} dx) \right\}.$$

与刚才完全类似地, 可以证得 v_0 是初值问题(1)的一个下解. 而在 J 上 $v_0 \leq w_0$, 则是不言而喻的。

由于 $v_0, w_0 \in C^1[J, R]$ 是初值问题(1)的下解和上解, 而且在 J 上 $v_0 \leq w_0$, 又有 $f \in C[\Omega, R]$, 这里

$$\Omega = \{(t, u) : v_0(t) \leq u \leq w_0(t), t \in J\}.$$

那末根据文[1]中定理1.1.4存在初值问题(1)的一个解 u , 在 J 上满足 $v_0 \leq u \leq w_0$.

最后, 我们来证明初值问题(1)只有一个解. 设不然, 用 u_1 和 u_2 分别表示初值问题(1)的最小解和最大解^[2]. 根据条件(2)应有

$$u_2' - u_1' = f(t, u_2) - f(t, u_1) \leq L(u_2 - u_1).$$

利用微分不等式法则, 进而可得

$$u_2 - u_1 \leq (u_2(0) - u_1(0))e^{Lt} = 0,$$

这就是说 $u_2 \leq u_1$. 考虑到 u_1 和 u_2 分别是初值问题(1)的最小和最大解, 于是 $u_1 = u_2$. 这就说明初值问题(1)只有一个解, 它就是前述的 u . 定理证完。

从定理1可以立即得出如下的推论1; 它是文[1]中的引理1.2.1.

推论1 假设 $f(t, u)$ 关于 u 非增, 那末

(1) 存在初值问题(1)的上解 w_0 和下解 v_0 , 使得在 J 上 $v_0 \leq w_0$;

(2) 存在初值问题(1)的唯一解 u , 使得在 J 上 $v_0 \leq u \leq w_0$.

这只要在定理1中令 $L=0$, 就可得到这个推论。

现在, 我们仍然假定 f 满足单边的Lipschitz条件(2). 设 v_0, w_0 分别是初值问题(1)在 J 上满足 $v_0 \leq w_0$ 的任一个下解和上解, 它们本身界定了初值问题(1)那个唯一解的变化区域. 为了压缩这个变化区域, 可使用单调叠代的技巧。

对于任一个函数 $\eta \in [v_0, w_0]$, 现来考虑如下线性初值问题

$$u' = f(t, \eta) + L(u - \eta), \quad u(0) = u_0. \quad (4)$$

显然, 对于每一个 η , 初值问题(4)在 J 上存在唯一解 u , 它可表为

$$u = e^{Lt} \{ u_0 + \int_0^t (f(x, \eta) - L\eta) e^{-Lx} dx \}.$$

定义映射 A 为 $A\eta = u$. 从下解 v_0 和上解 w_0 出发, 经映射 A , 可得如下两个序列:

$$\begin{aligned} v_n &= Av_{n-1}, \\ w_n &= Aw_{n-1}, \end{aligned} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

现在来证明如此选出的任何一个序列都能从唯一解 u 的两侧交错单调地界定它.

定理2 假定函数 f 满足单边的Lipschitz条件(2), 那末

(i) 由式(5)得到的序列 $\{v_n\}$ 与唯一解 u 满足

$$v_0 \leq v_2 \leq \dots \leq v_{2n} \leq \dots \leq u \leq \dots \leq v_{2n+1} \leq \dots \leq v_3 \leq v_1, \quad (6)$$

只要 $v_0 \leq v_2$. 其次, 序列 $\{v_{2n}\}$, $\{v_{2n+1}\}$ 在 J 上分别单调一致地趋于函数 ρ 和 r , 而且在 J 上 $\rho \leq u \leq r$;

(ii) 由式(5)得到的序列 $\{w_n\}$ 与唯一解 u 满足

$$w_1 \leq w_3 \leq \dots \leq w_{2n+1} \leq \dots \leq u \leq \dots \leq w_{2n} \leq \dots \leq w_2 \leq w_0;$$

只要 $w_2 \leq w_0$. 其次, 序列 $\{w_{2n+1}\}$, $\{w_{2n}\}$ 在 J 上分别单调一致趋于函数 ρ^* 和 r^* , 而且在 J 上 $\rho^* \leq u \leq r^*$.

证明 只证明(i)的情况, 因为(ii)的证明是类似的. 依设在 J 上 $v_0 \leq v_2$, 首先证明在 J 上有

$$v_0 \leq v_2 \leq u \leq v_3 \leq v_1. \quad (7)$$

令 $p = v_1 - v_0$, 显然 $p(0) \geq 0$, 而

$$p' = v_1' - v_0' \geq f(t, v_0) + L(v_1 - v_0) - f(t, v_0) = Lp,$$

所以 $p(t) \geq p(0) \cdot e^{Lt} \geq 0$, $t \in J$, 这就说明 $v_0 \leq v_1$. 根据定理1和文[1]的定理1.1.4初值问题(1)存在唯一解 u 使得 $v_0 \leq u$. 现在令 $p = v_1 - u$, 有 $p(0) = 0$ 和

$$\begin{aligned} p' &= v_1' - u' = f(t, v_0) + L(v_1 - v_0) - f(t, u) \\ &\geq f(t, u) - L(u - v_0) + L(v_1 - v_0) - f(t, u) = L(v_1 - u) = Lp. \end{aligned}$$

所以 $p(t) \geq 0 \cdot e^{Lt} = 0$, 即 $u \leq v_1$. 完全类似地, 可以依次证得 $v_2 \leq u$, $v_3 \leq v_1$ 和 $u \leq v_3$. 因此, 式(7)是成立的. 接着使用数学归纳法, 就不难得到式(6).

因为 $f \in C[J \times R, R]$ 和 $v_0 \leq v_n \leq v_1$, 所以序列 $\{v_{2n}\}$ 和 $v_{2n+1}\}$ 都是在 J 上一致有界和等度连续的函数列. 根据Ascoli—Arzela定理, $\{v_{2n}\}$ 在 J 上含有一致收敛的子序列 $v_{2n_i} \rightarrow \rho$, 同样 $\{v_{2n+1}\}$ 也含有一致收敛的子序列 $v_{2n_j+1} \rightarrow r$. 因而 $\{v_{2n}\}$ 和 $\{v_{2n+1}\}$ 在 J 上分别单调一致地趋于 ρ 和 r .

居于

$$v_{2n} \leq u \leq v_{2n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

让 $n \rightarrow \infty$, 就证得 $\rho \leq u \leq r$. 定理证完.

如果 $f(t, u)$ 关于 u 非增, 在定理2中让 $L = 0$ 就立刻得到如下的推论2, 它是文[1]中的定理1.2.2.

推论2 假设函数 f 关于 u 非增, 那末定理2的结论成立(其中映射 A 中的 $L = 0$).

推论3 如果除了定理2的假定外,函数 f 关于 u 还是可加的,那末序列 $\{\frac{1}{2}(v_{2n} + v_{2n+1})\}$ 和 $\{\frac{1}{2}(w_{2n} + w_{2n+1})\}$ 同时在 J 上一致收敛于初值问题(1)的唯一解 u .

事实上,根据定理2的证明过程,还可进一步推得序列 $\{v_{2n}'\}$ 和 $\{v_{2n+1}'\}$ 在 J 上分别一致收敛于 ρ' 和 r' ,并且

$$\begin{aligned}\rho' &= f(t, r) + L(\rho - r), \\ r' &= f(t, \rho) + L(r - \rho),\end{aligned}\quad t \in J,$$

依照 $f(t, u)$ 关于 u 可加的设,就有

$$\begin{aligned}(\rho + r)' &= f(t, \rho + r), \\ (\frac{1}{2}(\rho + r))' &= f(t, \frac{1}{2}(\rho + r)).\end{aligned}$$

另方面,显然

$$\frac{1}{2}(\rho(o) + r(o)) = \frac{1}{2}(u_o + u_o) = u_o.$$

这样 $\frac{1}{2}(\rho + r)$ 就是初值问题(1)的一个解,再根据定理1证得的唯一性,知它就是 u .

推论4 假定 $u \geq \bar{u}$ 时

$$M(u - \bar{u}) \leq f(t, u) - f(t, \bar{u}) \leq L(u - \bar{u}), \quad (8)$$

那末 $\rho = r = u$.

事实上有

$$M(r - \rho) \leq \rho' - r' = f(t, r) - f(t, \rho) \leq L(r - \rho),$$

这就是说

$$-L(r - \rho) \leq r' - \rho' \leq -M(r - \rho).$$

由于 $r(o) = \rho(o) = u_o$, 所以 $r(o) = \rho(o) = 0$, 于是

$$0 = 0 \cdot e^{-Lt} \leq r - \rho \leq 0 \cdot e^{-Mt} = 0,$$

此即 $r = \rho = u$.

还要指出,这里的推论4在 $L = 0$ 的特殊情况,文[1]中已得到过,即其中的推论1.2.1.

最后,对于抽象半序空间里的一般算子方程解的存在性和唯一性,在文[3]里也应用过条件(8)和上、下解的条件,得到过一些结果.不过那里所述的线性部分序空间不包含连续函数空间在内.下面证明,只要把文[3]中诸定理的证明过程变动一下,该文所有定理在包含连续函数空间在内的更广的一类线性空间中仍然成立.

假定 \mathscr{X} 是一个实线性系统(空间),其上有一满足反身性、反对称性和递推性的部分序 \leq ,这个部分序使得变换 $x \rightarrow x + a$ 和 $x \rightarrow ax (a > 0)$ 在 \mathscr{X} 中诱导一序自同构.文[3]假定 \mathscr{X} 中每个递增有界序列要有一个最小上界,对函数空间 L_p 一类的空间是适用的,但连续函数空间 C 不具有这个性质.将这个假定减弱为 \mathscr{X} 中每个递增有界的基本列要有一个最小上界.所谓 \mathscr{X} 中的递增基本列是指:对于递增序列 $\{x_n\}$,存在一个元素 $z \in \mathscr{X}$,使得对于任给的 $\varepsilon > 0$,都可以找到 N ,当 $n \geq N$ 时,对任何自然数 p 有

$$0 \leq x_{n+p} - x_n \leq \varepsilon z.$$

设 G 是欧氏空间中的有界闭集, G 上的连续函数空间 $C(G)$ 显然满足上述的假定.因为每个递增有界基本列是 $C(G)$ 中的基本列(按范数意义),从而一致收敛到它们的上确界函数.

我们以文[3]中定理1为例加以证明,其它定理可类似证得.

定理3 假设 \mathcal{R} 中有两个初始元 $x_0, y_0 (x_0 \leq y_0)$, 满足初始条件

$$Ax_0 \geq x_0, \quad Ay_0 \leq y_0.$$

如果存在两个数 $N, M (-\infty < N < M < 1)$ 使得对任何 $x, y (x_0 \leq x \leq y \leq y_0)$ 有

$$N(y-x) \leq Ay - Ax \leq M(y-x),$$

那末, 方程 $Ax = x$ 在区间 $[x_0, y_0]$ 上有唯一解 x^* , 而且对于叠代

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{1-N} (Ax_{n-1} - Nx_{n-1}), \\ y_n = \frac{1}{1-N} (Ay_{n-1} - Ny_{n-1}), \end{cases} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

有
和

$$\begin{cases} x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq x^* \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq y_0, \\ 0 \leq x^* - x_n \leq a^n (y_0 - x_0), \\ 0 \leq y_n - y^* \leq a^n (y_0 - x_0), \end{cases}$$

其中 $a = (M-N)/(1-N)$ 是小于1的正数.

证明 依照文[3]中定理1的证明, 有

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq y_0,$$

和
由这两式进而对任何 p 有

$$0 \leq x_{n+p} - x_n \leq y_n - x_n \leq a^n (y_0 - x_0).$$

这就说明单调递增有界序列 $\{x_n\}$ 是基本列, 依设在 \mathcal{R} 中有最小上界

$$x^* = \bigvee \{x_n\}.$$

同理, 也存在

$$y^* = \bigwedge \{y_n\}.$$

余下的证明完全可以搬用文[3]中定理1的证明, 而不必改动. 定理证完.

参 考 文 献

- [1] Ladde, G. S., Lakshmikantham, V. and Vatsala, A. S., *Monoitone Iterative Techniqnes for Nonlinear Differential Equations*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, (1985).
- [2] 尤秉礼, 常微分方程补充教程, 人民教育出版社, (1982).
- [3] 张上泰, 条件 σ -完全的部分序线性系统中方程解的存在性和唯一性, 数学学报, 27, (1984), 257-263.
- [4] Lakshmikantham, V., Leela, S. and Vatsala, A. S., Method of Quasi Upper and Lower Solutions in Abstract Cones, *J. Nonlinear Analysis*, 6(1982), 833-838.
- [5] 张上泰, 关于数值数学的一个典型问题, 数学学报, 22(1979)667-674.
- [6] 张上泰, 一阶微分方程的渐近平稳和周期边值问题, 系统科学与数学, 8, 3(1988), 274-280.

Monotone Iterative Technique for Initial Value Problems in First Order Differential Equations

Zhang Shangtai

(*Department of Management Information Science*)

Abstract With the purpose improving the results of literatures [1] and [3], the author considers the initial value problem in differential equation of the first order. Under one-sided Lipschitz condition, the author gives constructive proof of the existence and demonstrates the uniqueness of the solution.

Key word differential equation, monotone iterative technique, existence, solution