第11卷 第2期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol.11 No.2
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1990年4月　　(NATURAL SCIENCE)　　Apr. 1990

# 线性代数方程组反问题的对称矩阵解

朱尔圆

（应用数学系）

**摘　　要**

本文给出线性代数方程组反问题的对称矩阵解，及其通解表达式，并给出计算实例.

**关键词**　线性代数方程组，对称矩阵，特解，通解

## 一、引　　言

1982年，李森林教授在文[1]中提出了一个关于线性代数方程组的反问题：已知$x$，$b$是非零$n$维向量，$x^Tb>0$．则一定存在一个对称正定矩阵$A$，满足方程组

$$Ax=b. \tag{1}$$

且得到式(1)的一个特解．此后，文[2]、[3]中分别给出了满足式(1)的对称正定矩阵$A$的几种构造方法，导出了通解表达式．文[4]讨论了任意$x$，$b\in R^n$，存在矩阵$A$，满足式(1)．

本文证明了对任意非零$n$维向量$x$，$b\in R^n$，可构造实对称矩阵$A$，满足方程(1)，并导出其通解表达式，给出计算实例．此外，对满足(1)的一般矩阵和正交矩阵作出说明．

## 二、Ab=0 反问题的对称矩阵解

记$S=\{A\mid A$是$n$阶实对称矩阵$\}$．

问题1　已知$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T\in R^n$，求$A\in S$，使满足

$$Ax=0. \tag{2}$$

$A$称为齐次线性方程组(2)的反问题对称矩阵解，或称$A$是(2)的对称矩阵解．

解　若$x=0$，任意$A\in S$，均为(2)的对称矩阵解．若$x\neq0$，设$x_k\neq0$．记

$$e_k=(0,\ \cdots,\ 0,\ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{第}K\text{个}}}{1},\ 0,\ \cdots,\ 0)^T,$$

本文1989年8月7日收到．

$$U=\frac{1}{\rho}(x+\mathrm{sign}(x_k)\|x\|e_k),\tag{3}$$

其中

$$\rho=\sqrt{2}(\|x\|^2+|x_k|\|x\|)^{1/2},$$

$$\mathrm{sign}(x_k)=\begin{cases}1 & x_k>0,\\ -1 & x_k<0,\\ 0 & x_k=0,\end{cases}$$

$$U^TU=\frac{1}{\rho^2}(x+\mathrm{sign}(x_k)\|x\|e_k)^T(x+\mathrm{sign}(x_k)\|x\|e_k)$$
$$=1.$$

令

$$Q=I-2UU^T\ (I\text{是单位矩阵}),\tag{4}$$
$$Q^T=(I-2UU^T)^T=I-2UU^T=Q,$$
$$Q^TQ=QQ=(I-2UU^T)(I-2UU^T)$$
$$=I-4UU^T+4UU^TUU^T=I,$$

故Q为对称正交矩阵。

$$Qx=(I-2UU^T)x$$
$$=x-\frac{2}{\rho}(x+\mathrm{sign}(x_k)\|x\|e_k)\cdot\frac{1}{\rho}(x+\mathrm{sign}(x_k)\|x\|e_k)^T\cdot x$$
$$=-\mathrm{sign}(x_k)\|x\|e_k.$$

记

$$\beta=-\mathrm{sign}(x_k)\|x\|,\tag{5}$$
$$\beta\neq0,\qquad Qx=\beta e_k.$$

或

$$x=\beta Qe_k.\tag{6}$$

（2）等价于

$$QAQe_k=0.\tag{7}$$

记

$$C=QAQ.\tag{8}$$

（2）式等价于

$$Ce_k=0.$$

只需取第$k$列以及第$k$行上一切元素为零的任一对称矩阵为C，取$A=QCQ$，代入（2）右端

$$Ax=QCQ\beta Qe_k=0.\tag{9}$$

可见，A是（2）的对称矩阵解。

问题2　求（2）的对称矩阵解A的通解式。

**解**　记$s_1=\{C\,|\,Ce_k=0,\ C\in s\}$

则$s_1$是$s$的线性子空间，维数$t=n(n-1)/2$。记

$$M_1=\{A\,|\,Ax=0,\ A\in s\},$$

$M_1$称为（2）的对称矩阵解集合，显然，$M_1$亦为$s$的线性子空间。

**引理**　$\mathbf{A}\in M_1 \Leftarrow\Rightarrow \mathbf{A}=\mathbf{QCQ}$，$C\in s_1$。

**证明**　（9）是其充分条件。现在，设$\mathbf{A}\in M_1$，即$\mathbf{Ax}=0$，此式等价于$\mathbf{QAQe}_k=0$，令$\mathbf{C}=\mathbf{QAQ}$　就有$\mathbf{C}\in s_1$，且$\mathbf{A}=\mathbf{QCQ}$。（证毕）

今取对称矩阵$\mathbf{C}_{ij}\in s_1$，形状为

$$
\begin{array}{cl}
\begin{array}{cc} i\text{列} & j\text{列} \end{array} & \\
\left(\begin{array}{cc} & 1 \\ & \\ 1 & \end{array}\right) & \begin{array}{l} i\text{行} \\ \\ j\text{行} \end{array}
\end{array}
$$

即$\mathbf{C}_{ij}$的第$i$行第$j$列和第$j$行第$i$列元素为1，其余元素均为零。

矩阵序列$\{\mathbf{C}_{ij}\}$，$1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$，$i$，$j\neq k$ 线性无关。对任意$\mathbf{C}=(k_{ij})\in s_1$ 均有

$$\mathbf{C}=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ i,\ j\neq k}} K_{ij}\mathbf{C}_{ij},$$

故

$$\{\mathbf{C}_{ij}\},\qquad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n,\qquad i,j\neq k$$

是$s_1$的基。今取

$$\mathbf{A}_{ij}=\mathbf{QC}_{ij}\mathbf{Q},\qquad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n,\qquad i,j\neq k.$$

由于

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ i,\ j\neq k}} a_{ij}\mathbf{A}_{ij}=\mathbf{Q}\Big(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ i,\ j\neq k}} a_{ij}\mathbf{C}_{ij}\Big)\mathbf{Q},$$

故序列

$$\{\mathbf{A}_{ij}\},\qquad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n,\qquad i,j\neq k$$

是$M_1$中的线性无关向量，且对任意$\mathbf{A}\in M_1$，由引理知

$$\mathbf{A}=\mathbf{QCQ}=\mathbf{Q}\Big(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ i,\ j\neq k}} K_{ij}\mathbf{C}_{ij}\Big)\mathbf{Q}=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ i,\ j\neq k}} K_{ij}\mathbf{A}_{ij}.$$

故

$$\{\mathbf{A}_{ij}\},\qquad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n,\qquad i,j\neq k$$

是$M_1$的基。以上讨论，可以得到

**定理1**　（i）$\mathbf{Ax}=0$的对称矩阵解集合为线性空间，其维数$t=n(n-1)/2$。

（ii）$\mathbf{Ax}=0$的对称矩阵解$\mathbf{A}$的通解表达式为

$$\mathbf{A}=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ i,\ j\neq k}} K_{ij}\mathbf{A}_{ij}=\mathbf{Q}\Big(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ i,\ j\neq k}} K_{ij}\mathbf{C}_{ij}\Big)\mathbf{Q}. \tag{10}$$

## 三、Ax=b反问题的对称矩阵解结构

问题3 已知$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T\in R^n$和$b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T\in R^n$，$b\neq 0$，求$A\in S$，使满足

$$Ax=b, \tag{11}$$

A称为非齐方程组（11）的反问题的对称矩阵解，或称A为（11）的对称矩阵解。

解 由于$b\neq 0$，故$x\neq 0$，设$x_k\neq 0$，由式（6）知式（11）等价于

$$QAQe_k=\beta^{-1}Qb. \tag{12}$$

记

$$C_0=QAQ$$

和

$$\beta^{-1}Qb=(C_{1k}, C_{2k}, \cdots, C_{nk})^T,$$

（12）变成

$$C_0e_k=(C_{1k}, C_{2k}, \cdots, C_{nk})^T.$$

任取对称矩阵$C_0$，只使其第$k$列为$(C_{1k}, C_{2k}, \cdots, C_{nk})^T$，取$A_0=QC_0Q$，满足

$$A_0x=b.$$

故$A_0$是（11）的对称矩阵解，或称$A_0$是（11）的一个对称矩阵特解。

问题4 求（11）的对称矩阵解A的通解式。

解 由式（11）确定的齐次方程组$Ax=0$称为（11）的导出组。导出组对称矩阵解由问题1，2已完全解决。

**定理2** A为式（11）的对称矩阵解$\Leftarrow\Rightarrow A=A_0+B$。其中$A_0$是（11）的对称矩阵特解，B是式（11）的导出组的对称矩阵解。

**证明** 设A为（11）的对称矩阵解，则

$$(A-A_0)x=0.$$

记$A-A_0=B$，B就是（11）的导出组的对称矩阵解，从而$A=A_0+B$。

反之，由于$(A_0+B)x=b$故$A=A_0+B$为（11）的对称矩阵解。（证毕）

由问题1，2，3及定理2，立即得

**定理3** $Ax=b$的对称矩阵解A的通解式为

$$A=A_0+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ i,\ j\neq k}}K_{ij}A_{ij}=A_0+Q\Big(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ i,\ j\neq k}}K_{ij}C_{ij}\Big)Q \tag{13}$$

其中$A_0$是（11）的对称矩阵特解。

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ i,\ j\neq k}}K_{ij}A_{ij}=Q\Big(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ i,\ j\neq k}}K_{ij}C_{ij}\Big)Q$$

是（11）的导出组的对称矩阵解的通解式。

下面考察（11）的反问题的对称矩阵解集合之性质。

记（11）的对称矩阵解集合为$M_2=\{A\,|\,Ax=b\ \ b\neq 0,\ A\in S\}$，记（11）的导出组$Ax=$

0的对称矩阵解空间$M_1$的基为$B_1$，$B_2$，…，$B_t(t=\frac{n(n-1)}{2})$，$A_0$是(11)的对称矩阵特解，则

**性质1**　$A_0$，$A_0+B_1$，$A_0+B_2$，…，$A_0+B_t$ 为$M_2$中的线性无关向量。

**证明**　若

$$a_0A_0+a_1(A_0+B_1)+\cdots+a_t(A_0+B_t)=0$$

得

$$(a_0+a_1+\cdots+a_t)A_0+a_1B_1+\cdots+a_tB_t=0,$$

而$A_0\bar{\in}M_1$，故推出

$$a_0=a_1=\cdots=a_t=0。\qquad（证毕）$$

**性质2**　若$\mathbf{A}_0$，$\mathbf{A}_1$，…，$\mathbf{A}_t(t=\frac{n(n-1)}{2})$为（11）的$t+1$个线性无关的对称矩阵解，则对称矩阵$\mathbf{A}$为（11）的对称矩阵解的充分必要条件是

$$\mathbf{A}=a_0\mathbf{A}_0+a_1\mathbf{A}_1+\cdots+a_t\mathbf{A}_t,$$

其中

$$a_0+a_1+\cdots+a_t=1.$$

**证明**　当$a_0+a_1+\cdots+a_t=1$时，

$$\begin{aligned}&(a_0\mathbf{A}_0+a_1\mathbf{A}_1+\cdots+a_t\mathbf{A}_t)\mathbf{x}\\&=(a_0+a_1+\cdots+a_t)\mathbf{b}=\mathbf{b}.\end{aligned}$$

反之，若$\mathbf{A}$为（11）的对称矩阵解，显然，$\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_0$，$\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_0$，…，$\mathbf{A}_t-\mathbf{A}_0$是（11）的导出组的对称矩阵解空间的基，故$\mathbf{A}$写成

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_0+a_1(\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_0)+\cdots+a_t(\mathbf{A}_t-\mathbf{A}_0),$$

即

$$\mathbf{A}=(1-a_1-\cdots-a_t)\mathbf{A}_0+a_1\mathbf{A}_1+\cdots+a_t\mathbf{A}_t.$$

从而

$$\mathbf{A}=a_0\mathbf{A}_0+a_1\mathbf{A}_1+\cdots+a_t\mathbf{A}_t,$$

其中

$$a_0+a_1+\cdots+a_t=1.\qquad（证毕）$$

## 四、计 算 实 例

以$n=4$的例子，给出按以上各步进行计算所得$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的对称矩阵特解。设已知

$$\mathbf{x}=(-1,\ 4,\ \sqrt{7},\ -5)^T,\qquad \mathbf{b}=(2,\ 3,\ -1,\ 4)^T$$

求对称矩阵$\mathbf{A}$，使满足$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$。

1.　计算$\rho$。$\rho=\sqrt{2}(\|x\|^2+|x_1|\|x\|)^{1/2}$，其中$\|x\|=7$，$x_1=-1\neq0$，

$$\rho=\sqrt{2}(7^2+7)^{1/2}=\sqrt{112}.$$

2．计算 $\mathbf{u}$。$\mathbf{u}=\frac{1}{\rho}(\mathbf{x}+\mathrm{sign}(x_1)\|x\|\mathbf{e}_1)$，其中$\mathbf{e}_1=(1,\ 0,\ 0,\ 0)^T$，

$$u=\frac{1}{\sqrt{112}}(-1,\ 4,\ \sqrt{7},\ \ )^T-7(1,\ 0,\ 0,\ 0)^T$$

$$=\frac{1}{\sqrt{112}}(-8,\ 4,\ \sqrt{7},\ -5)^T.$$

3．计算$Q$．$Q=I-2uu^T$，

$$Q=I-\frac{1}{\sqrt{112}}(-8,\ 4,\ \sqrt{7},\ -5)^T(-8,\ 4,\ \sqrt{7},\ -5)$$

$$=\frac{1}{56}\begin{pmatrix}-8 & 32 & 8\sqrt{7} & -40\\ 32 & 40 & -4\sqrt{7} & 20\\ 8\sqrt{7} & -4\sqrt{7} & 49 & 5\sqrt{7}\\ -40 & 20 & 5\sqrt{7} & 31\end{pmatrix}.$$

4．计算$C_0$．$C_0$的第1列为$\beta^{-1}Qb$，其中$\beta=-sign(x_1)\|x\|=7$，

$$\beta^{-1}Qb=\frac{1}{56\times 7}(-80-8\sqrt{7},\ 264+4\sqrt{7},\ -49+24\sqrt{7},\ 104-5\sqrt{7})^T,$$

$$C_0=\frac{1}{56\times 7}\begin{pmatrix}-80-8\sqrt{7} & 264+4\sqrt{7} & -49+24\sqrt{7} & 104-5\sqrt{7}\\ 264+4\sqrt{7} & 0 & 0 & 0\\ -49+24\sqrt{7} & 0 & 0 & 0\\ 104-5\sqrt{7} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

5．计算$A_0$．$A_0=QC_0Q$，

$$A_0=\frac{1}{56^3\times 7}\begin{pmatrix}-8 & 32 & 8\sqrt{7} & -40\\ 32 & 40 & -4\sqrt{7} & 20\\ 8\sqrt{7} & -4\sqrt{7} & 49 & 5\sqrt{7}\\ -40 & 20 & 5\sqrt{7} & 31\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}-80-8\sqrt{7} & 264+4\sqrt{7} & -49+24\sqrt{7} & 104-5\sqrt{7}\\ 264+4\sqrt{7} & 0 & 0 & 0\\ -49+24\sqrt{7} & 0 & 0 & 0\\ 104-5\sqrt{7} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}-8 & 32 & 8\sqrt{7} & -40\\ 32 & 40 & -4\sqrt{7} & 20\\ 8\sqrt{7} & -4\sqrt{7} & 49 & 5\sqrt{7}\\ -40 & 20 & 5\sqrt{7} & 31\end{pmatrix},$$

$$A_0=\frac{1}{56^3\times 7}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} -95232+512\sqrt{7} & 104960-2048\sqrt{7} & 21504+45056\sqrt{7} & -325632+2560\sqrt{7} \\ 104960-2048\sqrt{7} & 684032+8192\sqrt{7} & -86016+95744\sqrt{7} & -77312-10240\sqrt{7} \\ 21504+45056\sqrt{7} & -86016+95744\sqrt{7} & 35840-46592\sqrt{7} & 107520+74752\sqrt{7} \\ -325632+2560\sqrt{7} & -77312-10240\sqrt{7} & 107520+74752\sqrt{7} & -875520+12800\sqrt{7} \end{bmatrix}$$

6．验算结果

$$A_0x=(2,\ 3,\ -1,\ 4)^T.$$

## 五、注　　记

对矩阵$A$，取消其对称的要求，求$Ax=b$的反问题解叙述如下：

$Ax=0$的反问题解空间$s_2=\{A\,|\,Ax=0\}$的维数是$n(n-1)$。记$E_{ij}$为第$i$行第$j$列元素为1，其余元素为零的$n$阶矩阵，矩阵序列

$\{A_{ij}=QE_{ij}Q\}$ $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$；$j=1,\ \cdots,\ k-1,\ k+1,\ \cdots,\ n$（$x$的第$k$个分量不等于零），为$s_2$的基。

设$C_0$为第$k$列元素是$\beta^{-1}Qb$，其余元素都是零的$n$阶矩阵，则$A_0=QC_0Q$是$Ax=b$反问题的特解。$Ax=b$的反问题的通解$A$为

$$A=A_0+B,$$

其中$A_0$是$Ax=b$反问题的特解，$B$是其导出组$Ax=0$的反问题解。

2．若$\|x\|=\|b\|$，求正交矩阵$A$，满足方程组$Ax=b$，叙述如下：

不失一般性，记$\|x\|=\|b\|=1$。取$C$的第$k$（$x$的第$k$个分量$x_k\neq0$）列是

$$\alpha_k=\beta^{-1}Qb$$

$$\alpha_K^T\alpha_k=(\beta^{-1}Qb)^T(\beta^{-1}Qb)=1$$

在$R^n$中取$\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{k-1},\ \alpha_{k+1},\ \cdots,\ \alpha_n$　使

$$\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{k-1},\ \alpha_k,\ \alpha_{k+1},\ \cdots,\ \alpha_n$$

为$R^n$的标准正交基，取

$$C=(\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_{k+1}\cdots\alpha_n),$$

$C$为正交矩阵。取$A=QCQ$亦为正交矩阵，且满足

$$Ax=b.$$

## 参　考　文　献

〔1〕李森林，几类直接控制系统绝对稳定的充分必要条件．科学通报，10（1982）．

〔2〕张磊、唐隆基，关于线性代数方程$Ax=b$的一类反问题．数学实践与认识，1（1984）．

〔3〕郑慧娆，计算正定方程组的反问题特解的正交相似法．数学杂志，2（1989）．

〔4〕李绍疆，若干矩阵反问题．中国科技大学学报，2（1984）．

# A Symmetric Matrix Solution to the Inverse Problem of the System of Linear Algebraic Equations

Zhu Eryuan

**Abstract**

To the inverse problem of the system of linear algebraic equations, ti· author gives a symmetric matrix solution and the expression of its general solu tion. A numerical example is given finally for illustration.

**Key words** system of linear algebraic equations, symmetric matrix, particular solution, general solution