第11卷 第2期
华侨大学学报自然科学版
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)
Vol.11 No.2
1990年4月
Apr. 1990

广义Euler数之一同余式的进一步讨论

王 志 雄

（应用数学系）

摘 要

本文给出广义Euler数当指标为素数 $p>5$ 时所应满足的一个同余式，猜测它是指标 $p>5$ 为素数的充分必要条件．并对猜测的若干特殊情况，获得一些结果．

关键词 欧拉数，同余式，素数，递归序列，组合分析

一、引 言

广义 Euler 数 $e_s^{(k)}$ ($s\geqslant 0$, $k\geqslant 1$) 依递推式

$$\begin{cases} e_0^{(k)}=1 \quad (k\geqslant 1), \\ \sum_{s=0}^{n}\binom{nk}{sk}e_s^{(k)}=0 \quad (n\geqslant 1,\ k\geqslant 1) \end{cases} \tag{1}$$

定义．

设p为大于 3 的素数，则

$$e_n^{(p)}\equiv(-1)^n(\bmod p^3)^{[1]}. \tag{2}$$

故$a_p=\frac{1}{p^3}\left[\binom{2p}{p}-2\right]$为整数．本文将证明

定理 1 若p是大于 5 的素数，则

$$b_p=\frac{e_4^{(p)}-\left[1+a_p\binom{4}{2}p^3\right]}{p^5}$$

是整数．

定理 2 若p是大于 5 的素数，则对一切$s(s\geqslant 0)$，

$$e_s^{(p)}\equiv(-1)^s\left[1+a_p\binom{s}{2}p^3+b_p\binom{s}{4}p^5\right](\bmod p^6). \tag{3}$$

这样，用完全不同的方法，证明并推广了文[4]的猜想4.1(ii)，(iii)．或许，式(3)在一定程度上描述了素数的特征，即有

猜想：若$p>5$，则p为素数的充分必要条件是式(3)，对一切$s(s\geqslant 0)$成立．

本文1988年9月9日收到．

实际上，由定理2，上述猜想仅必要性存疑。本文讨论一些特殊情况，得到

定理3　设$p>3$，若

（i）p为偶数，或者

（ii）p为两个奇素数之积，且其一素因子为3，5，7，11或13，则式(2)不恒成立。从而，式(3)不能对一切$s(s\geq 0)$成立。

二、预备引理

引理1　当 $0\leqslant j\leqslant q$时，

$$\frac{1}{4^j}\sum_{t=0}^{j}\binom{2q+1}{2t+1}\binom{q-t}{j-t}=\frac{2q+1}{2j+1}\binom{q+j}{2j} \tag{4}$$

是整数，且当$(2q+1)$是素数，$0\leqslant j<q$时，它能被$(2q+1)$整除。

证明　式(4)即文[2]附录之式(49)，其余结论显然。

引理2　设$p=2q+1$，则$(2\sin(\pi r/p))^2(r=1, 2, \cdots, q)$是$q$次整系数代数方程

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}\frac{p}{2j+1}\binom{q+j}{2j}y^j=0 \tag{5}$$

的q个不同的根，方程(5)的最高次项系数为1。

证明　因为$\pi r/p$是$\sin px/\sin x=0$，即

$$\sum_{t=0}^{q}(-1)^t\binom{p}{2t+1}\cos^{2q-2t}x\sin^{2t}x=0$$

的根，故$(2\sin(\pi r/p))^2$是

$$\begin{aligned}&\sum_{t=0}^{q}(-1)^t\binom{p}{2t+1}\left(1-\frac{y}{4}\right)^{q-t}\left(\frac{y}{4}\right)^t\\&=\sum_{j=0}^{q}(-1)^jy^j\sum_{t=0}^{j}\frac{1}{4^j}\binom{p}{2t+1}\binom{q-t}{j-t}\\&=\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\frac{p}{2j+1}\binom{q+j}{2j}y^j=0\end{aligned}$$

的根，其余结论显然。

引理3　对一切奇数k和$p=2q+1$及整数$m(m\geqslant 0)$，

$$B_m^{(k)}=2\sum_{r=1}^{q}(-1)^r\left(2\sin\frac{\pi r}{p}\right)^{2m}\cos\frac{\pi rk}{p} \tag{6}$$

恒为整数，当$m>0$时，$p\mid B_m^{(k)}$。

证明　因为

$$B_0^{(k)}=\begin{cases}2q, & \text{当}p\mid k,\\ -1, & \text{其余},\end{cases}$$

$$B_{m+1}^{(k)}=-B_m^{(k-2)}+2B_m^{(k)}-B_m^{(k+2)},\ (m\geqslant 0), \tag{7}$$

故对一切$m\geqslant 0$，$B_m^{(k)}$恒为整数。

在式(7)中取$m=0$，当(i)$p\mid k$；(ii)$p\mid(k+2)$或$p\mid(k-2)$；(iii)$(p,k(k+2)(k-2))=$

$=1$时，$B_1^{(k)}$分别等于$2p$，$-p$，0，即对一切奇数k，$p\mid B_1^{(k)}$。由递推式(7)得$p\mid B_m^{(k)}$（$m>0$）。证毕。

由引理 2，$B_m^{(k)}$满足递推式

$$B_{n+q}^{(k)}=\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^{q-j-1}\frac{p}{2j+1}\binom{q+j}{2j}B_{n+j}^{(k)} \tag{8}$$

（文[3]，定理6.2.2)。利用完全归纳法，有

引理 4　当$p=2q+1$是素数，k为奇数，$n\geqslant dq+1$时，$p^{d+1}\mid B_n^{(k)}$。

由文[4]引理4.1.2(i)，有

$$\sum_{j=0}^{[m/p]}\binom{m}{pj}(-1)^{pj}=\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p-1}(1-\omega_p{}^r)^m, \tag{6}$$

其中，$\omega_p=e^{2\pi i/p}$，分别取$m=pn$，$pn-1$，$pn-2$，$pn-3$，$pn-4$，得

引理 5　若p为大于 3 的奇数，则

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{pn}{pj}(-1)^j=\begin{cases}0, & 2\nmid n,\\ (-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{1}{p}B_{pn/2}^{(p)}, & 2\mid n;\end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{pn-1}{pj}(-1)^j=\begin{cases}(-1)^{\frac{pn-1}{2}}\dfrac{1}{p}B_{pn-1/2}^{(1)}, & 2\nmid n,\\ (-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{1}{2p}B_{pn/2}^{(p)}, & 2\mid n;\end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{pn-2}{pj}(-1)^j=\begin{cases}(-1)^{\frac{pn-1}{2}}\dfrac{1}{p}B_{pn-1/2}^{(1)}, & 2\nmid n,\\ (-1)^{\frac{n-2}{2}}\dfrac{1}{p}\left(B_{pn-2/2}^{(p)}-\dfrac{1}{2}B_{pn/2}^{(p)}\right), & 2\mid n;\end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{pn-3}{pj}(-1)^j=\begin{cases}(-1)^{\frac{pn+1}{2}}\dfrac{1}{p}B_{pn-3/2}^{(3)}, & 2\nmid n,\\ (-1)^{\frac{n-2}{2}}\dfrac{1}{2p}\left(3B_{pn-2/2}^{(p)}-B_{pn/2}^{(p)}\right), & 2\mid n;\end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{pn-4}{pj}(-1)^j=\begin{cases}(-1)^{\frac{pn+1}{2}}\dfrac{1}{p}\left(B_{pn-3/2}^{(1)}+B_{pn-3/2}^{(3)}\right), & 2\nmid n,\\ (-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{1}{p}\left(B_{pn-4/2}^{(p)}-2B_{pn-2/2}^{(p)}+\dfrac{1}{2}B_{pn/2}^{(p)}\right), & 2\mid n.\end{cases}$$

引理 6

$$\binom{np}{sp}\binom{s}{2}=\frac{n}{2p}\left[(np-1)\binom{np-2}{(n-s)p}+(1-p)\binom{np-1}{(n-s)p}\right],$$

$$\binom{np}{sp}\binom{s}{4} = \frac{n}{24p^3}\Big[(np-1)(np-2)(np-3)\binom{np-4}{(n-s)p} + 6(1-p)(np-1)(np-2)\binom{np-3}{(n-s)p}$$

$$+(1-p)(7-11p)(np-1)\binom{np-2}{(n-s)p} + (1-p)(1-2p)(1-3p)\binom{np-1}{(n-s)p}\Big];$$

证明　直接计算可得。

设p为素数，若$p\nmid i$，用$1/i$表示满足

$$ii^* \equiv 1 \pmod p, \qquad 1 \leqslant i^* \leqslant p-1$$

的唯一整数i^*。显然，$1/i$随i取遍1，2，…，$p-1$（次序可能不同），利用自然数等幂和公式有

引理 7　若p为素数，则

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod p \qquad (p>2),$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(p-1)^2} \equiv 0 \pmod p \qquad (p>3),$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{(p-1)^4} \equiv 0 \pmod p \qquad (p>5).$$

三、定理 1 的证明

令

$$A_i = \frac{1}{p^3}\left[\binom{3p}{i} - 3\binom{2p}{i} + 3\binom{p}{i}\right],$$

$$B_i = \frac{1}{p^2}\left[\binom{3p}{i} - 2\binom{2p}{i} + \binom{p}{i}\right],$$

则

$$iA_i + (i+1)A_{i+1} = 3B_i, \qquad A_1 = A_2 = 0, \tag{10}$$

$$iB_i + (i+1)B_{i+1} = \frac{1}{p}\left[3\binom{3p}{i} - 4\binom{2p}{i} + \binom{p}{i}\right], \qquad B_1 = 0. \tag{11}$$

因为当$j=1$，2，3，$1 \leqslant i \leqslant p-1$时，

$$\frac{1}{p}\binom{jp}{i} = j\frac{(jp-1)\cdots(jp-i+1)}{i!} \equiv (-1)^{i-1}\frac{j}{i} \pmod p,$$

故由式(11)得：当$1 \leqslant i \leqslant p-1$时，

$$iB_i + (i+1)B_{i+1} \equiv (-1)^{i-1}\frac{2}{i} \pmod p, \qquad B_1 = 0, \tag{12}$$

由式(12)解得

$$B_1 = 0,$$

$$B_i \equiv (-1)^i\frac{2}{i}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i-1}\right) \pmod p \qquad (2 \leqslant i \leqslant p-1),$$

代入式(10)，并解这递推式得

$$A_1 = A_2 = 0,$$

$$A_i \equiv (-1)^{i-1}\frac{6}{i}\sum_{j=2}^{i-1}\frac{1}{j}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{j-1}\right),\ (3\leqslant i\leqslant p-1).$$

令$u_j=\binom{jp}{p}$，($j=2,3,4$)。由Vandermonde卷积公式得

$$u_2-2=\binom{p}{1}^2+\binom{p}{2}^2+\cdots+\binom{p}{p-1}^2,$$

$$u_3-u_2=\binom{p}{1}\binom{2p}{1}+\binom{p}{2}\binom{2p}{2}+\cdots+\binom{p}{p-1}\binom{2p}{p-1}+1,$$

$$u_4-u_3=\binom{p}{1}\binom{3p}{1}+\binom{p}{2}\binom{3p}{2}+\cdots+\binom{p}{p-1}\binom{3p}{p-1}+1,$$

利用引理 7 诸公式，得

$$\frac{u_4-4u_3+6u_2-4}{p^4}=\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{p}\binom{p}{i}A_i$$

$$\equiv 6\sum_{i=3}^{p-1}\frac{1}{i^2}\sum_{j=2}^{i-1}\frac{1}{j}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{j-1}\right)(\bmod p)$$

$$\equiv 3\sum_{i=3}^{p-1}\frac{1}{i^2}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i-1}\right)^2-\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(i-1)^2}\right)\right]$$

$$\equiv 3\sum_{i=3}^{p-1}\frac{1}{i^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i-1}\right)^2-\frac{3}{2}\left\{\left[1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(p-1)^2}\right]^2\right.$$

$$\left.-\left[1+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{(p-1)^4}\right]-\frac{1}{2}\right\}$$

$$\equiv 3\sum_{i=2}^{p-1}\frac{1}{i^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i-1}\right)^2$$

$$\equiv\frac{3}{2}\sum_{i=2}^{p-2}\left[\frac{1}{i^2}\left(1+\cdots+\frac{1}{i-1}\right)^2+\frac{1}{(p-i)^2}\left(1+\cdots+\frac{1}{p-i-1}\right)^2\right]$$

$$+\frac{3}{(p-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-2}\right)^2$$

$$\equiv\frac{3}{2}\sum_{i=2}^{p-2}\frac{1}{i^2}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i-1}\right)^2+\left(\frac{1}{i+1}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right)^2\right]+3$$

$$\equiv\frac{3}{2}\sum_{i=2}^{p-2}\frac{1}{i^2}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right)^2-\frac{1}{i^2}\right.$$

$$\left.-2\cdot\frac{1}{i}\left(1+\cdots+\frac{1}{i-1}+\frac{1}{i+1}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right)\right]+3$$

$$\equiv\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i^4}\equiv 0(\bmod p). \tag{13}$$

另一方面，由递推式(1)得

$$e_4^{(p)}-\left[1+a_p\tbinom{4}{2}p^3\right]$$
$$=10-6u_2+u_2u_3u_4-3u_3u_4+2u_4+u_3u_4/u_2$$
$$=(1/u_2)(10u_2-6u_2^2+u_2^2u_3u_4-3u_2u_3u_4+2u_2u_4+u_3u_4),$$

由文[1]，引理A，

$$u_3u_4=(u_3-3)(u_4-4)+4u_3+3u_4-12\equiv 4u_3+3u_4-12(\bmod p^6),$$

同理，

$$u_2u_4\equiv 4u_2+2u_4-8(\bmod p^6),$$

$$u_2u_3u_4\equiv 12u_2+8u_3+6u_4-48(\bmod p^6),$$

$$u_2^2u_3u_4\equiv 48u_2+16u_3+12u_4-144(\bmod p^6),$$

$$u_2^2\equiv 4u_2-4(\bmod p^6).$$

故由(13)得

$$\frac{e_4^{(p)}-[1+a_p\binom{4}{2}p^3]}{p^4}=\frac{1}{u_2}\cdot\frac{u_4-4u_3+6u_2-4}{p^4}\equiv 0(\bmod p.$$

定理 1 证毕。

四、定理 2 的证明

由递推式(1)及文[1]之引理A，得

$$e_3^{(p)}+[1+a_p\binom{3}{2}p^3]=-u_2u_3+2u_3+3u_2-6$$
$$\equiv-(u_2-2)(u_3-3)\equiv 0(\bmod p^6).$$

故由定理 1，式(3)当$s\leqslant 4$成立。

设式(3)当$s<n(n\geqslant 5)$时成立，则

$$0=\sum_{s=0}^{n}\binom{np}{sp}e_s^{(p)}$$

$$=\sum_{s=0}^{n}\binom{np}{sp}\left\{e_s^{(p)}-(-1)^s[1+a_p\binom{s}{2}p^3+b_p\binom{s}{4}p^5]\right\}$$

$$+\sum_{s=0}^{n}\binom{np}{sp}(-1)^s[1+a_p\binom{s}{2}p^3+b_p\binom{s}{4}p^5]$$

$$\equiv e_n^{(p)}-(-1)^n[1+a_p\binom{n}{2}p^3+b_p\binom{n}{4}p^5]$$

$$+\sum_{s=0}^{n}\binom{np}{sp}(-1)^s[1+a_p\binom{s}{2}p^3+b_p\binom{s}{4}p^5](\bmod p^6).$$

当$n\geqslant 5$为奇数时，由引理 5，6 得

$$e_n^{(p)}-(-1)^n[1+a_p\binom{n}{2}p^3+b_p\binom{n}{4}p^5]$$

$$\equiv-\frac{np}{2}a_p[(np-1)(-1)^{\frac{np-1}{2}}B^{(1)}_{np-1/2}+(1-p)(-1)^{\frac{np-1}{2}}B^{(1)}_{np-1/2}$$

$$-\frac{np}{24}b_p[(np-1)(np-2)(np-3)(-1)^{\frac{np+1}{2}}(B^{(1)}_{np-3/2}+B^{(3)}_{np-3/2})$$

$$+6(1-p)(np-1)(np-2)(-1)^{\frac{np+1}{2}}B^{(3)}_{np-3/2}+(1-p)(7-11p)(np-1)$$

$$\cdot(-1)^{\frac{np-1}{2}}B^{(1)}_{np-1/2}+(1-p)(1-2p)(1-3p)(-1)^{\frac{np-1}{2}}B^{(1)}_{np-1/2}],$$

因 $\frac{np-1}{2}>\frac{np-3}{2}\geqslant\frac{5p-3}{2}=5q+1$，由引理4得，式(3)当$n\geqslant 5$为奇数时成立。

同理可证，式(3)当$n\geqslant 6$为偶数时也成立。定理2证毕。

五、定理3的证明

(i)当p为偶数时，设p的二进制展开为

$$p=a_0+a_1\cdot 2+a_2\cdot 2^2+\cdots+a_k\cdot 2^k,$$

$$(a_k=1,\ a_0=0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{k-1}\text{等于0或1}),$$

则$\binom{2p}{p}=\frac{(2p)!}{(p!)^2}$含2的幂恰为

$$\sum_{i=1}^{k+1}\left[\frac{2p}{2^i}\right]-2\left[\frac{p}{2^i}\right]=a_0+a_1+\cdots+a_k.$$

故当a_0，a_1，…，a_k中至少有两个数非零时，$\binom{2p}{p}$能被2^2整除，从而，$e_2^{(p)}-1=\binom{2p}{p}-2$不能被$2^2$整除，更不能被$p^3$整除，即(2)当$n=2$不成立。

当a_0，a_1，…，a_k中恰有一个数非零，即$p=2^k$，则由文[1]的式(1.7)，有

$$e_2^{(2^k)}-1\equiv 4(\bmod 16),$$

故$e_2^{(p)}-1$不能被2^3整除，从而，式(2)当$n=2$时也不成立。

(ii)当p是两个奇素数之积，且其一素因子为5时，设$p=5q$，由文[1]之引理A，有

$$e_2^{(p)}-1=\binom{10q}{5q}-2\equiv\binom{10}{5}-2(\bmod q^2),$$

即$q^2\mid 250$，故$q=5$。但是

$$e_2^{(25)}-1=\binom{50}{25}-2\equiv 250(\bmod 5^6),$$

故得式(2)当$p=5q$(q为奇素数)时，对$n=2$不成立。对p之其一素因子为3，7，11或13的情况，类似可证。定理3证毕。

参　考　文　献

〔1〕Gessel, I. M., Some Congruences for generalized Euler Numbers, *Can. J. Math.*, 35, 4(1983), 687—709.

〔2〕徐利治、蒋茂林、朱自强，计算组合数学，上海科学技术出版社，(1983).

〔3〕Brualdi, R. A., *Introductory Comtinatorics*, Elsevier North-Holland Inc., (1977), (中译本：李盘林、王天明译，华中工学院出版社，1978).

〔4〕Leeming, D. J. and Macleod, R. A., Some Properties of Generalized Euler Numbers, *Can. J. Math.*, 33, 3(1981), 606—617.

Further Discussion on a Congruence Expression of Generalized Euler's Numbers

Wang Zhixiong

Abstract

This paper gives a congruence expression that should be satisfied by generalized Euler's numbers $e_n^{(p)}$, where p being a prime and $p>5$. The congruence expression is conjectured to be hold if and only if p being a prime and $p>5$. Some results are obtained from two specific cases of the conjecture.

Key words Euler number, congruence, prime number, recurrence sequence, combinatorial analysis