第11卷 第2期
1990年4月

华侨大学学报自然科学版
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)

Vol.11 No.2
Apr. 1990

恒定应力加速寿命试验指数部件可靠性的Bayes估计

吴 绍 敏

（应用数学系）

摘 要

本文介绍在恒定应力加速寿命试验下，指数部件可靠性的Bayes估计．可略去如下假设：失效分布的参数和使用的应力之间有一已知的函数关系，仅利用不同应力水平下测试的数据，即可给出正常应力下指数部件可靠性指标的表达式．最后给出一个例子．

关键词 恒定应力，加速寿命试验，指数部件，Bayes估计，可靠性

一、引 言

恒加应力测试模型，是产品测试常用且重要的方法．如何利用各不同应力水平下测试的数据去估计正常应力下产品的可靠性指标，是许多学者重视研究的课题．但经典的方法受三个假设的约束，特别是第三个假设，一般说来不太合理．本文应用Bayes分析方法可以摆脱这一假设．

设正常压力水平为S_m，再选一些比正常应力S_m较高的应力水平$S_i(i=1,m-1)$，且有

$$S_1>S_2>\cdots>S_{m-1}>S_m, \tag{1}$$

对每个水平应力S_i，可投入n_i个部件作测试，r_i为失效数，t_{i1}，t_{i2}，…，t_{ir_i}为失效时间，$t^*_{ir_i+1}$，$t^*_{ir_i+2}$，…，$t^*_{in_i}$为没有失效时间，$T_i=\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}+\sum_{j=r_i+1}^{n_i}t^*_{ij}$为测试总时间，当定数截尾测试时，$r_i$固定，$T_i$为r,v。当定时截尾测试时，$r_i$是r,v。$T_i$是总时间。

设部件寿命X服从指数分布$f(t|\lambda)=\lambda e^{-\lambda t}$，$\lambda>0$，$t>0$，在各个应力水平下投试的部件是同类型的，其分布函数类型不变，只因应力水平不同，表现出失效率不同．记在水平

本文1989年1月18日收到．

$S_i(i=\overline{1.m})$下测试时，部件的失效率为$\lambda_i(i=\overline{1.m})$，且有

$$\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_m, \tag{2}$$

$\lambda\triangleq(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$，$r\triangleq(r_1,r_2,\cdots,r_m)$，$T\triangleq(T_1,T_2,\cdots,T_m)$，则联合似然函数为

$$L(\lambda,r,T)\alpha\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{r_i}e^{-\lambda_i T_i}. \tag{3}$$

若视λ为r,v。其分布为$\pi(\lambda)$，各水平的参数λ_i的分布为$\pi(\lambda_i)$，假定$\pi(\lambda_i)$的函数类型相同，其中所含的未知参数不同。

本文的目的，是利用各个应力水平下测试获得的客观信息（数据），结合验前的主观信息（往昔经验积累），应用Bayes分析法，对正常应力水平S_m下部件的可靠性指标作出估计。

为使验前分布的选择有更大的灵活性，作变换$R\triangleq R(t_M)=e^{-\lambda t_M}$，$t_M$为任务时间（或参考时间），因视$\lambda$为$r,v$，故$R$也是$r,v$，且有分布密度$\pi(R)=\pi_\lambda(-1/t_M\ln R)(1/t_M R)$，那么式（2）对应于

$$0<R_1<R_2<\cdots<R_m<1, \tag{4}$$

$\pi(\lambda_i)$对应于$\pi(R_i)(i=\overline{1,m})$，$(R_1,R_2,\cdots,R_m)$为一组顺序统计重，记$R=(R_1,R_2,\cdots,R_m)$，其密度为

$$\pi(R)=\begin{cases} c\prod_{i=1}^{m}\pi(R_i) & \text{当}0<R_1<R_2<\cdots<R_m<1, \\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

其对应于式（3）的似然函数为

$$L(R,r,T)\propto\prod_{i=1}^{m}(-\ln R_i)^{r_i}R_i^{T_i/t_M}=\prod_{i=1}^{m}(-\ln R_i)^{r_i}R_i^{\eta_i}\quad(\eta_i=T_i/t_M). \tag{5}$$

那么，后验联合分布密度为

$$g(R|r,T)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(-\ln R_i)^{r_i}R_i^{\eta_i}\pi(R_i)}{\int_{D_m}\prod_{i=1}^{m}(-\ln R_i)^{r_i}R_i^{\eta_i}\pi(R_i)dR}, \tag{6}$$

其中$D_m=\{R:\ 0<R<R_1<R_2\cdots<R_m<1\}$.

Bayes分析方法困难在于验前分布的选择，验前分布虽然可以根据以前累积的经验来选择，但多少带有主观片面性。因此，验前分布选择恰当与否直接影响分析的效果，为了尽量减少主观带来的影响，可选择带有未知参数的验前分布，然后利用测试得来的数据，将未知参数估计出来。

二、R_m的Bayes估计

下面分别讨论在不同的验前分布下对R_m作出估计。

1. 负对数Gamma验前分布

因若 λ 具有验前 Gamma 分布 $\Gamma(\lambda,\alpha,\beta)=\beta^{\alpha}/\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda\beta}$，$\alpha,\beta,\lambda>0$，则 $R\triangleq e^{-\lambda t_M}$ 具有验前负对数 Gamma 分布密度 $\Pi(R,\alpha,\beta)=\beta^{\alpha}/\Gamma(\alpha)t_M^{-\alpha}(-\ln R)^{\alpha-1}R^{\beta/t_M-1}$，$0<R<1$。

定理 1　假设 R_i 具有负对数 Gamma 验前分布

$$\pi(R_i|\alpha_i\beta_i)=\frac{\beta_i^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)}t_M^{\alpha_i}(-\ln R_i)^{\alpha_i-1}R_i^{u_i-1},\qquad u_i=\beta_i/t_M,\ \beta_i>0,$$

α_i 为正整数，$0<R_i<1$　$(i=\overline{1,m})$，则

$$g(R_m|r,T)=W_m^{-1}\sum_{j_1=0}^{g_1-1}\sum_{j_2=0}^{g_{(2)}-1}\cdots\sum_{j_{m-1}=0}^{g_{(m-1)}-1}W(j_1,j_2,\cdots,j_{m-1})\mathscr{L}\Gamma(R_m|g_{(m)},h_{(m)}),\tag{7}$$

在二次损失下

$$\hat{R}_m=W_M^{-1}\sum_{j_1=0}^{g_1-1}\sum_{j_2=0}^{g_{(2)}-1}\cdots\sum_{j_{m-1}=0}^{g_{(m-1)}-1}W(j_1,j_2,\cdots j_{m-1})\left(\frac{h_{(m)}}{h_{(m)}+1}\right)^{g_{(m)}},\tag{8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&u_i=\beta_i/t_M,\quad \eta_i=T_i/t_M,\quad g_i=r_i+\alpha_i,\quad h_i=u_i+\eta_i\quad (i=\overline{1,m}),\\
&g_{(2)}=g_2+j_1,\ g_{(i)}=g_i+j_{i-1}\ (i=\overline{3,m}),\ h_{(1)}=h_1,\ h_{(i)}=h_{(i-1)}+h_i\ (i=\overline{2,m}),\\
&C_{ji}=\frac{h_{(i)}^{j_i}\Gamma(g_{(i+1)})}{h_{(i+1)}^{g_{(i+1)}}\Gamma(j_i+1)}\quad (i=\overline{1,m-1}),\\
&W(j_1,j_2,\cdots,j_{m-1})=\prod_{i=1}^{m-1}C_{j_i},\\
&W_m=\sum_{j_1=0}^{g_1-1}\sum_{j_2=0}^{g_{(2)}-1}\cdots\sum_{j_{m-1}=0}^{g_{(m-1)}-1}W(j_1,j_2,\cdots,j_{m-1}).
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

证明　先证 $m=3$ 时成立。由式 (6) 得

$$g)r_3|r,T)=\frac{1}{W'_3}\Big\{(-\ln R_3)^{g_3-1}R_3^{h_3-1}\int_0^{R_3}(-\ln R_2)^{g_2-1}R^{h_2-1}dR_2$$

$$\cdot\int_0^{R_2}(-\ln R_1)^{g_1-1}R_1^{h_1-1}dR_1\Big\},\tag{10}$$

重复应用变换 $y=-h\ln R$ 和恒等式

$$\int_x^{+\infty}u^{z-1}e^{-u}du=\Gamma(z)\sum_{j=0}^{z-1}\frac{x^j}{j!}e^{-x},\qquad z\text{ 为正整数},\tag{11}$$

可得式 (10) 的

$$\text{分子}=(-\ln R_3)^{g_3-1}R_3^{h_3-1}\int_0^{R_3}(-\ln R_2)^{g_2-1}R_2^{h_2-1}h_1^{-g_1}\Gamma(g_1)$$

$$\cdot\Big\{\sum_{j_1=0}^{g_1-1}\frac{h_1^{j}}{\Gamma(j_1+1)}(-\ln R_2)^{j_1}R_2^{h_1}\Big\}dR_2$$

$$=h_1^{-g_1}\Gamma(g_1)(-\ln R_3)^{g_3-1}R_3^{h_3-1}\sum_{j_1=0}^{g_1-1}\frac{h_1^{j_1}}{\Gamma(j_1+1)}\int_0^{R_3}(-\ln R_2)^{j_1+g_2-1}R_2^{h_1+h_2-1}dR_2$$

$$=h_1^{-g_1}\Gamma(g_1)\sum_{j_1=0}^{g_1-1}\frac{h_1^{j_1}\Gamma(g_{(2)})}{h_{(2)}^{g_{(2)}}\Gamma(j_1+1)}\sum_{j_2=0}^{g_{(2)}-1}\frac{h_{(2)}^{j_2}\Gamma(g_{(3)})}{h_{(3)}^{g_{(3)}}\Gamma(j_2+1)}\Big\{\frac{h_{(3)}^{g_{(3)}}}{\Gamma(g_{(3)})}(-\ln R_3)^{g_{(3)}-1}R_3^{h_{(3)}-1}\Big\}=$$

$$=h_1^{-g_1}\Gamma(g_1)\sum_{j_1=0}^{g_1-1}\sum_{j_2=0}^{g_{(2)}-1}W(j_1,j_2)\mathscr{L}\Gamma(R_3|g_{(3)},h_{(3)}),$$

对式（10）两边从0到1积分即得

$$W_3'=h_1^{-g_1}\Gamma(g_1)\sum_{j_1=0}^{g_1-1}\sum_{j_2=0}^{g_{(2)}-1}W(j_1,j_2)=h_1^{-g_1}\Gamma(g_1)W_3。$$

所以

$$g(R_3|r,T)=W_3^{-1}\sum_{j_1=0}^{g_1-1}\sum_{j_2=0}^{g_{(2)}-1}W(j_1,j_2)\mathscr{L}\Gamma(R_3|g_{(3)},h_{(3)}),$$

应用归纳法，可证得式（7）成立。因为在二次损失下，$\hat{R}_m=\int_0^1 R_m g(R_m|r,T)dR_m$，即得式（8）。

2．无信息验前分布

当对 R 的验前信息一无所知时，可取 R 的验前分布 $\pi(R)\doteq(-\ln R)^{-1}R^{-1}$，其对应的结论，恰好是定理1中当 $\alpha_i=0$、$\beta_i=0$（$i=\overline{1,m}$）的情况，$\hat{R}_m$ 表达式中不含未知参数 α_i,β_i，那么部件的可靠性指标全部可以计算出来。但必须特别指出的是，只有当 $r_i\neq 0(i=\overline{1,m})$ 时才是对的，若有某 $r_k=0$ 则结论就不对。

3．验前分布中未知参数 α_i 与 β_i 的估计

式（8）中含有未知参数 α_i 与 β_i，因而，$\hat{R}_m$ 仍然无法计算，必须利用各个应力水平 $S_i(i=\overline{1,m})$ 下测试得来的数据，对 α_i 与 β_i 作出估计。

因在应力水平 S_i（$i=\overline{1,m}$）下的似然函数为

$$L(\lambda_i,r_iT_i)\propto\lambda_i^{r_i}e^{-\lambda_iT_i}\qquad(i=\overline{1,m}),$$

换成 R_i 的似然函数为

$$L(R_i,r_iT_i)\propto(-\ln R_i)^{r_i}R_i^{\eta_i}\qquad(i=\overline{1,m}),$$

为了简便起见略去下标 i，即

$$L(R,r,T)\propto(-\ln R)^rR^\eta。$$

那么（r,T）的边际分布密度为

$$g(r,T)\propto\int_0^1 L(R,r,T)\pi(R,\alpha,\beta)dR=\int_0^1(-\ln R)^rR^\eta(-\ln R)^{\alpha-1}R^{\gamma-1}dR$$

$$=\Gamma(r+\alpha)(\eta+u)^{-(r+\alpha)}=t_M^{r+\alpha}\Gamma(\alpha+r)(T+\beta)^{-(r+\alpha)},$$

即

$$g(r,T)=c(T+\beta)^{-(r+\alpha)}。$$

如果是按定数截尾测试模型截尾数为 r，则由条件 $\int_0^\infty g(r,T)dT=1$，得

$$\frac{1}{c}=\int_0^\infty\frac{dT}{(T+\beta)^{\alpha+\beta}}=\beta^{-(r+\alpha-1)}\int_0^\infty\frac{dy}{(1+y)^{\alpha+\beta}}=\beta^{-(r+\alpha-1)}\int_0^\infty\frac{y^{1-1}dy}{(1+y)^{\alpha+\beta-1+1}}$$

$$=\beta^{-(r+\alpha-1)}\frac{\Gamma(1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}=\beta^{-(\alpha+r-1)}(\alpha+r-1)^{-1},$$

$=\{$

$$c=\beta^{(\alpha+r-1)}(\alpha+r-1),$$

所以

$$g(r,T)=\beta^{(\alpha+r-1)}(\alpha+\beta-1)(T+\beta)^{-(r+\alpha)}. \tag{12}$$

（ 1 ）极大似然估计：

利用极大似然估计的优点在于只要当前测试数据，其缺点是要判定式（ 12 ）极大值的存在唯一性，这是比较难的，况且这里又假设 α 是正整数，于是遇到混合整数非线性问题，不好解决。

（ 2 ）矩法估计：

因

$$ET=\beta^{(\alpha+r-1)}(\alpha+r-1)\int_0^\infty\frac{TdT}{(T+\beta)^{r+\alpha}}=\beta^{(\alpha+r-1)}(\alpha+r-1)\int_0^\infty\frac{\beta^2ydy}{\beta^{r+\alpha}(1+y)^{r+\alpha}}$$

$$=\beta(\alpha+r-1)\int_0^\infty\frac{y^{2-1}}{(1+y)^{\alpha+r-2+2}}=\beta(\alpha+r-1)\frac{\Gamma(2)\Gamma(r+\alpha-2)}{\Gamma(r+\alpha)}$$

$$=\beta(\alpha+r-1)\frac{\Gamma(r+\alpha-2)}{(r+\alpha-1)(r+\alpha-2)\Gamma(r+\alpha-2}=\frac{\beta}{r+\alpha-2}. \tag{13}$$

同理可得

$$ET^2=2\beta^2/(\alpha+r-2)(\alpha+r-3),\qquad 当\alpha\neq 2-r,\alpha\neq 3-r. \tag{14}$$

设以前做过 N 次测试，得数据 $T_1,T_2,\cdots,T_N$，矩法估计法有

$$\begin{cases} A=\bar{T}\doteq\beta/(r+\alpha-2), & (15)\\ B=1/N\sum\limits_{i=1}^{N}T_i^2\doteq 2\beta^2/(\alpha+r-2)(\alpha+r-3), & (16)\end{cases}$$

只要 $\alpha\neq 2-r,\alpha\neq 3-r$，从式（ 15 ）与（ 16 ）可解得

$$\hat{\alpha}=\frac{1}{(B/2A^2)-1}+3-r,\qquad \hat{\beta}=A(r+\hat{\alpha}-2).$$

此法优点是可得 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ 的明显表达式，缺点是要利用较多的历史数据，这在可靠性分析中有时不怎么容易得到。

4. Beta 验前分布

因 R 可能具有 Beta 分布，故应考虑这种情况。

定理 2　假设 R_i 具有验前 Beta 分布

$$\pi(R_i|a_i,b_i)=\frac{1}{B(a_i,b_i)}R_i^{a_i-1}(1-R_i)^{b_i-1},\quad a_i>0,b_i 为正整数\ 0<R_i<1(i=\overline{1,m}),$$

则

$$g(Rm|r,T)=W_m^{-1}\Big\{\sum_{k_1=0}^{b_1-1}\sum_{j_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{k_{m-1}=0}^{b_{m-1}-1}\sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}}W(k_1j,\cdots,k_{m-1}j_{m-1})$$

$$\cdot\sum_{k_m=0}^{b_m-1}\binom{b_m-1}{k_m}(-1)^{k_m}g_{(m)}^{-(r_{(m)}+1)}\mathscr{L}\Gamma(R_m|r_{(m)}+1,\ g_{(m)})\Big\}. \tag{17}$$

在二次损失下

$$\hat{R}_m=W_m^{-1}\Big\{\sum_{k_1=0}^{b_1-1}\sum_{j_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{k_{m-1}=0}^{b_{m-1}-1}\sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}}W(k_1j_1,\cdots,k_{m-1}j_{m-1})\cdot$$

$$\cdot\sum_{k_m=0}^{b_m-1}\binom{b_m-1}{k_m}(-1)^{k_m}(g_{(m)}+1)^{-(r_{(m)}+1)}\Big\}, \tag{18}$$

$v_i=a_i+\eta_i$, $\eta_i=T_i/t_M$, $r_{(i)}=r_{(i-1)}+j_{i-1}$, $r_{(1)}=r_1$, $(i=\overline{2,m})$,

$$g_{(i)}=\sum_{j=1}^{i}(v_j+k_j)\quad c_{k_ij_i}=\binom{b_i-1}{k_i}(-1)^{k_i}\frac{\Gamma(r_{(i+1)}+1)}{\Gamma(j_i+1)}g_{(i)}^{\,j_i-r_{(i)}-1},$$

$$W(k_1j_1,\cdots,k_{m-1}j_{m-1})=\prod_{i=1}^{m-1}c_{k_ij_i}, \tag{19}$$

$$W_m=\sum_{k_1=0}^{b_1-1}\sum_{j_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{k_{m-1}=0}^{b_{m-1}-1}\sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}}W(k_1j_1,\cdots,k_{m-1}j_{m-1})\sum_{k_m=0}^{b_m-1}\binom{b_m-1}{k_m}\cdot(-1)^{k_m}g_{(m)}^{-(r_{(m)}+1)}.$$

证明 先证 $m=3$ 时成立。因

$$g(R_3|r,T)=\frac{1}{W_3'}\Big\{(-\ln R_3)^{r_3}R_3^{v_3-1}(1-R_3)^{b_3-1}\int_0^{R_3}(-\ln R_2)^{r_2}R_2^{v_2-1}(1-R_2)^{b_2-1}dR_2\int_0^{R_2}(-\ln R_1)^{r_1}R_1^{v_1-1}(1-R_1)^{b_1-1}dR_1\Big\}, \tag{20}$$

由二项展式

$$(1-x)^{b-1}=\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^kx^k,$$

式（20）的分子中的

$$I_1\triangleq\int_0^{R_2}(-\ln R_1)^{r_1}R_1^{v_1-1}(1-R_1)^{b_1-1}dR_1=\sum_{k_1=0}^{b_1-1}\binom{b_1-1}{k_1}(-1)^{k_1}\int_0^{R_2}(-\ln R_1)^{r_1}R_1^{g_1-1}dR_1,$$

令 $y=-g_1\ln R_1$，则

$$\int_0^{R_2}(-\ln R_1)R_1^{g_1-1}dR_1=g_1^{-(r_1+1)}\int^{+\infty}y^{r_1}e^{-y}dy$$

$$=\Gamma(r_1+1)\sum_{j_1=0}^{r_1}\frac{g_1^{\,i_1-(r_1+l)}}{\Gamma(j_1+1)}(-\ln R_2)^{j_1}R_2^{g_2},$$

故有

$$I_1=\Gamma(r_1+1)\sum_{k_1=0}^{b_1-1}\sum_{j_1=0}^{r_1}\binom{b_1-1}{k_1}(-1)^{k_1}\frac{g_1^{\,j_1-(r_1+1)}}{\Gamma(j_1+1)}(-\ln R_2)^{j_1}R_2^{g_1},$$

$$I_2\triangleq\int_0^{R_3}(-\ln R_2)^{r_2}R_2^{v_2-1}(1-R_2)^{b_2-1}I_1dR_2=\Gamma(r_1+1)\sum_{k_1=0}^{b_1-1}\sum_{j_1=0}^{r_1}\binom{b_1-1}{k_1}(-1)^{k}$$

$$\cdot\frac{g_1^{\,j_1-(r_1+1)}}{\Gamma(j_1+1)}\sum_{k_2=0}^{b_2-1}\binom{b_2-1}{k_2}(-1)^{k_2}\int_0^{R_3}(-\ln R_2)^{r(2)}R_2^{g(2)-1}dR_2=\Gamma(r_1+1)$$

$$\cdot\sum_{k_1=0}^{b_1-1}\sum_{j_1=0}^{r_1}\binom{b_1-1}{k_1}(-1)^{k_1}\frac{\Gamma(r_{(2)}+1)}{\Gamma(j_1+1)}g_1^{\,j_1-(r_1+1)}\sum_{k_2=0}^{b_2-1}\sum_{j_2=0}^{r_{(2)}}\binom{b_2-1}{k_2}(-1)^{k_2}\cdot$$

$$\cdot\frac{g_{(2)}^{j_2-(r_{(2)}+1)}}{\Gamma(j_2+1)}(-\ln R_3)^{j_2}R_3^{g_{(3)}},$$

所以式(20)的

$$\text{分子}=(-\ln R_3)^{r_3}R_3^{v_3-1}(1-R_3)^{b_3-1}I_2=\Gamma(r_1+1)\sum_{k_1=0}^{b_1-1}\sum_{j_1=0}^{r_1}C_{k_1j_1}\sum_{k_2=0}^{b_2-1}\sum_{j_2=0}^{r_{(2)}}C_{k_2j_2}$$

$$\cdot\sum_{k_3=0}^{b_3-1}\binom{b_3-1}{k_3}(-1)^{k_3}g_{(3)}^{-(r_2+1)}\mathscr{L}\Gamma(R_3|r_{(3)}+1,g_{(3)}).$$

对式(20)两边从 0 到 1 积分得

$$W_3'=\Gamma(r_1+1)\sum_{k_1=0}^{b_1-1}\sum_{j_1=0}^{r_1}\sum_{k_2=0}^{b_2-1}\sum_{j_2=0}^{r_{(2)}}W(k_1j_1,k_2j_2)\sum_{k_3=0}^{b_3-1}$$

$$\cdot\binom{b_3+1}{k_3}(-1)^{k_3}g_{(3)}^{-(r_{(3)}+1)}=W_3\Gamma(r_1+1),$$

故

$$g(R_3|r,T)=W_3^{-1}\sum_{k_1=0}^{b_1-1}\sum_{j_1=0}^{r_1}\sum_{k_2=0}^{b_2-1}\sum_{j_2=0}^{r_{(2)}}W(k_1j_1,k_2j_2)\sum_{k_3=0}^{b_3-1}$$

$$\cdot\binom{b_3-1}{k_3}(-1)^{k_3}g_{(3)}^{-(r_{(3)}+1)}\mathscr{L}\Gamma(R_3|r_{(3)}+1,g_{(3)}),$$

$$\hat{R}_3=\int_0^1R_3g(R_3|r,T)dR=W\sum_{k_1=0}^{b_1-1}\sum_{j_1=0}^{r_1}\sum_{k_2=0}^{b_2-1}\sum_{j_2=0}^{r_{(2)}}W(k_1j_1,k_2j_2)$$

$$\cdot\sum_{k_3=0}^{b_3-1}\binom{b_3-1}{k_3}(-1)^{k_3}(g_{(3)}+1)^{-(r_{(3)}+1)}.$$

再应用归纳法即可完成定理的证明。

5. $U(0,1)$ 验前分布

在未获得验前信息时，往往可取 $U(0,1)$ 验前分布，将 R 看作在区间 $(0,1)$ 上均匀分布的，其对应的结论恰好是定理 2 中，当 $a_i=1,b_i=1,(i=1,m)$ 的特殊情况，此时 $\hat{R}_m$ 的表达式中不含未知参数 a_i,b_i，计算比较简单。

6. 参数 a_i 与 b_i 的估计

因式(18)中含有未知参数 a_i,b_i，所以计算不出 $\hat{R}_m$，必须将它们估计出来。

在应力水平 $s_i(i=1,m)$ 的似然函数为

$$L(R,r,T)\propto(\ln R)^rR^\eta,\qquad(\text{为简单计算略去下标 } i),$$

$$\pi(R|a,b)\propto R^{a-1}(1-R)^{b-1}.$$

假设按定数 r 的截尾测试，则 T 的边际密度为

$$g(r,T)\propto\int_0^1(-\ln R)^rR^{a+\eta-1}(1-R)^{b-1}dR=\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k\int_0^1(-\ln R)^rR^{a+\eta+k-1}dR$$

$$=\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k\Gamma(r+1)(a+\eta+k)^{-(r+1)}.$$

所以

$$g(r,T)=c\Gamma(r+1)\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k\left(a+\frac{T}{t_m}+k\right)^{-(r+1)}$$

$$=c\Gamma(r+1)\,t_M^{(r+1)}\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k(T+(a+k)t_M)^{-(r+1)}.$$

由$\int_0^\infty g(r,T)dT=1$。得

$$c\Gamma(r+1)\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k t_M^{r+1}\int_0^\infty\frac{dT}{(T+(a+k)t_M)^{r+1}}=1,$$

因

$$\int_0^\infty\frac{dT}{[T+(a+k)t_M]^{r+1}}=(a+k)^{-r}t_M^{-r}\int_0^\infty\frac{dy}{(1+y)^{r+1}}$$

$$=(a+k)^{-r}t_M^{-r}\frac{\Gamma(1)\Gamma(r)}{\Gamma(r+1)}=(a+k)^{-r}t_M^{-r}r^{-1},$$

故

$$c=\frac{1}{t_M\Gamma(r)}\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k(a+k)^{-r},$$

$$g(r,T)=\frac{rt_M^r\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k[T+(a+k)t_M]^{-(r+1)}}{\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k(a+k)^{-r}}.$$

显然，利用最大似然估计是困难的，只好利用矩法估计，应用前面的方法可求得

$$ET=\frac{t_M\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k(a+k)^{-r+1}}{(r-1)\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k(a+k)^{-r}},$$

$$ET^2=\frac{2t_M^2\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k(a+k)^{-r+2}}{(r-1)(r-2)\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k(a+k)^{-r}},\qquad r>2,$$

就是说在定权截尾测试时，必须定数在3个以上才能应用矩法估计，现假设在S_i水平上，作过N次截尾测得数据$T_1,T_2,\cdots,T_N$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}T_i\approx\dfrac{t_M\sum_{K=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k(a+k)^{-r+1}}{(r-1)\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k(a+k)^{-r}},\\[2ex]\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}T_i^2\approx\dfrac{2t_m^2\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k(a+k)^{-r+2}}{(r-1)(r-2)\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k(a+k)^{-r}},\end{cases}\tag{21}$$

解方程组（21），必须利用计算机，对$b=2,3,\cdots$求出满足式（21）的a，这是可以实现的。

特别应该指出的是在较低应力水平上（如 s_m）难得失效数据就是说没法得到 3 个部件的失效，那么在该水平上，可取 $a=1$，$b=1$ 作为无信息验前分布处理，仍然可以应用定理的结论计算。

应用定理 1，2 的结论，可得部件在正常应力水平下所有可靠性指标的估计：

（1）失效率：$\hat{\lambda}_m=(1/t^M)\ln\hat{R}_m$；

（2）平均寿命：$\hat{Q}_m=1/\hat{\lambda}_m$；

（3）任意时间 t 的可靠度：$\hat{R}(t)=\widehat{e^{-\lambda_M t}}$；

（4）可靠寿命：$\hat{t}(p)=-\hat{Q}_m\ln p$；

（5）由相同指数部件组成的一些简单系统的可靠度和平均寿命也可得到估计.

三、例　子

对某种部件进行恒定温度加速寿命测试，其目的是为了得到该部件在正常温度水平上（$s_3=50$℃）各种可靠性特征值，假定部件的寿命服从指数分布，并取较高的两个应力水平 $s_1=125$℃，$s_2=85$℃，在各个水平上均投试 3 个部件测试，结果如表 1.

表　1

应力水平（°C）	失效数	失效时间（h）	没失效时间（h）	测试总时间（h）
$s_1=125$	3	$t_{11}=121, t_{12}=126, t_{13}=128$		$T_1=375$
$s_2=85$	2	$t_{21}=262, t_{22}=600$	$t^*_{22}=600$	$T_2=1462$
$s_3=50$	0		$t^*_{31}=t^*_{32}=t^*_{33}=900$	$T_3=2700$

因无验前信息，$r_3=0$，不能取 $\pi(R)=(-\ln R)^{-1}R^{-1}$，只能取 $\pi(R)=U(0,1)$，利用定理 2 的结论，因 $a_i=1, b_i=1$ $(i=1,3)$，故 k_1,k_2,k_3 只能取0，故二重和变为一重和，即

$$\hat{R}_3=W_3^{-1}\sum_{j_1=0}^{r_1}\sum_{j_2=0}^{r_{(2)}}W(j_1,j_2)(g_{(3)}+1)^{-(r_{(3)}+1)},$$

取 $t_M=3000$，则

$$\eta_1=\pi/t_M=0.125,\quad \eta_2=T_2/t_M=0.4873,\quad \eta_3=T_3/t_M=0.9,\quad \nu_1=1+0.125=1.125,$$

$$\nu_2=1.4873,\quad \nu_3=1.9,\quad r_1=3,\quad r_{(2)}=r_2+j_2=2+j_1,\quad r_{(3)}=r_3+j_2=j_2,$$

$$g_{(1)}=\nu_1=1.125,\quad g_{(2)}=\nu_1+\nu_2=2.6123,\quad g_{(3)}=\nu_1+\nu_2+\nu_3=4.5123,$$

$$C_{j_1}=\frac{\Gamma(r_{(2)}+1)}{\Gamma(j_1+1)}g_{(1)}^{j_1-r_1-1}=\frac{\Gamma(2+j_1)}{\Gamma(j_1+1)}(1.125)^{j_1-4}=(1+j_1)(1.125)^{j_1-4},$$

$$C_{j_2}=\frac{\Gamma(r_{(3)}+1)}{\Gamma(j_2+1)}g_{(2)}^{j_2-r_{(2)}-1}=\frac{\Gamma(j_2+1)}{\Gamma(j^2+1)}(2.613)^{j_2-j_1-3}=(2.6123)^{j_2-j_1-3},$$

$$W(j_1,j_2)=c_{j_1}\cdot c_{j_2}=(1.125)^{-4}(2.6123)^{-3}(1+j_1)\left(\frac{1.125}{2.6123}\right)^{j_1}(2.6123)^{j_2}$$

$$=(0.0350)(1+j_1)(0.4307)^{j_1}(2.6123)^{j_2},$$

$$W_3=\sum_{j_1=0}^{3}\sum_{j_2=0}^{2+j}W(j_1,j_2)g_{(3)}^{-(r_{(3)}+1)}=(0.0350)\sum_{j_1=0}^{3}\sum_{j_2=0}^{2+j_1}(1+j_1)(0.4307)^{j_1}(2.6123)^{j_2}\cdot$$

$$\cdot(4.5123)^{-j_2-1}=(0.035)(4.5123)^{-1}\sum_{j_1=0}^{3}\sum_{j_2=0}^{2+j_1}(1+j_1)(0.4307)^{j_1}\left(\frac{2.6123}{4.512}\right)^{j_2}$$

$$=(7.7566\times10^{-3})\sum_{j_1=0}^{3}\sum_{j_2=0}^{2+j_1}(1+j_1)(0.4307)^{j_1}(0.5789)^{j_2}=0.0442,$$

$$I=\sum_{j_1=0}^{3}\sum_{j_2=0}^{2+j_1}W(j_1,j_2)(g_{(3)}+1)^{-(r_{(3)}+1)}$$

$$=(0.0350)\sum_{j_1=0}^{3}\sum_{j_2=0}^{2+j_1}(1+j_1)(0.4307)^{j_1}(2.6123)^{j_2}(5.5123)^{-j_2-1}$$

$$=(6.3494\times10^{-3})\sum_{j_1=0}^{3}\sum_{j_2=0}^{2+j_1}(1+j_1)(0.4307)^{j_1}(0.4739)^{j_2}=0.0310,$$

$$\hat{R}_3(3000)=I/W_3=0.7018,$$

$$\hat{\lambda}_3=(1/3000)(-\ln 0.7018)=1.1804\times10^{-4}\ \text{(失效率)},$$

$$\hat{Q}_3=1/\hat{\lambda}_3=8472\ \text{(平均寿命)},$$

$$\hat{R}_3(1000)=[\hat{R}(3000)]^{1000/3000}=0.8888\ \text{(时间 } t=1000 \text{ 时的可靠度)},$$

$$\hat{t}_3(0.95)=\hat{Q}_3(-\ln 0.95)=434\ \text{(可靠寿命)}.$$

由上例可见，这么少的数据应用经典方法是无法计算的，而应用本文的方法，至少可以摆脱第三个假设[1]的约束。同时还可不受水平数与投试部件数的限制，特别适用于小样本的计算，即使在正常应力水平下没有失效数据照样可以计算，但只能评定而无法预测。

经典方法受模型的约束且需要大样本（有时不易得到），但可以预测。

参　考　文　献

〔1〕茆诗松、王玲玲，可靠性统计，华东师范大学出版社，（1984）.
〔2〕Mratz, H.F.and waller, A. R., *Bayesian Reliability Analysis*, Jhon &sons, （1982）.

Bayes Estimate of Reliability of Exponential Units under Constant Stress Accelerating Life Testing

Wu Shaumin

Abstract

This paper deals with Bayes estimate of reliability of exponential units under constant stress accelerating life testing. The method can bs applied to leave out such an assumption: there exists a known functional relation between ths parameter of failure distribution and the applied stress; the expression of reliability of exponential units under normal stress can be given by use of merely the data tested under different stress level. An example is given finally.

Key words constant-stress, accelerated life test, exponential units, Bayes estimations, reliability