

典型对象的参数优化

洪尚任 王永初

(精密机械工程系)

摘 要

本文根据系统稳定的边界条件和三条系统规则,论述当不完全微分型PID调节器与单输入单输出线性系统的控制对象匹配时,系统结构参数整定的理论和算法,并给出通用程序及框图。最后,采用本文方法对例题进行计算。

关键词 PID调节器, 参数, 优化

一、引 言

在工业生产过程控制系统中,目前多数采用PID调节方式。这种调节方式具有相当广泛的适用性,因而能应用40多年至今不衰。但其控制系统结构参数的选择却仅在下列问题中有结果:(i)控制对象为

$$G(s) = \frac{K_0 e^{-\tau s}}{T_s s + 1} \quad (1)$$

(ii)调节器为理想的PID调节器

$$D(s) = K_p^* \left(1 + \frac{1}{T_i^* s} + T_d^* s \right), \quad (2)$$

其整定参数为

$$K_p^* = 1.2T/K_0\tau, \quad T_i^* = 2\tau, \quad T_d^* = (0.42 - 0.5)\tau.$$

实际的工业调节器不是式(2)所示的理想调节器,而是不完全微分型PID调节器,因后者比前者具有更好的控制效果。不完全微分的PID调节器的传递函数为

$$D(s) = K_p \left(\frac{T_d s + 1}{\frac{T_d}{r} s + 1} \right) \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right), \quad (3)$$

而且实际控制对象的特性要比式(1)复杂得多。为使问题更具有普遍意义,对于单输入单输出线性系统,其对象特性通常记为

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_p s^p}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} \quad (4)$$

式(3)所示调节器与式(4)所示控制对象配合,目前尚无有效的参数整定理论分析与计算

本文1989年2月22日收到。

方法。控制系统的最佳参数不是经严格的计算,而是凭实际投运过程的经验确定,具有很强的主观因素,无法做到参数的最佳选择。

针对这种现状,本文探索一种具有普遍意义即对于任意线性对象都可适用的整定参数的规则。

二、通用整定参数的原理和依据

通用整定参数规则是建立在衰减模型与衰减状态下系统稳定边界条件基础上,借助于控制系统已有结论的若干规则,求出控制系统结构参数的最优或准最优化的解。

1. 衰减模型的系统稳定边界条件

$D(s)$ 与 $G(s)$ 中的 s 利用 $s = (j - m)\omega$ 替代后变为 $D(m, \omega)$ 与 $G(m, \omega)$ 。 $D(m, \omega)$ 与 $G(m, \omega)$ 就是 D 与 G 的衰减频率特性。当 $D(m, \omega)$ 与 $G(m, \omega)$ 组成图1所示的控制系统时,系统中的

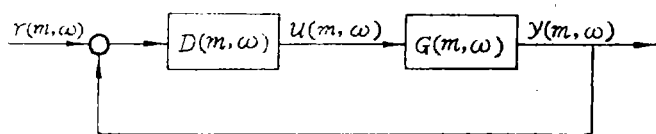


图1

信号 $u(m, \omega)$ 与 $y(m, \omega)$ 必然处于同一衰减率。当 $m = 0.221$ 时,控制系统对扰动响应控制的误差平方的积分和几乎最小,系统处于准最优化的工作状态。系统的衰减稳定边界条件为

$$D(m, \omega) \cdot G(m, \omega) = -1. \quad (5)$$

式(5)可分解为增益和相角两个条件,即

$$|D(m, \omega)| |G(m, \omega)| = 1, \quad (6a)$$

$$\angle D(m, \omega) + \angle G(m, \omega) = -180^\circ. \quad (6b)$$

2. 若干系统规则

规则1 实际工业PID调节器的传递函数可演变成一个准理想的PID调节器加一个一阶惯性滤波器:

$$\begin{aligned} D(s) &= K_p \left(\frac{T_d s + 1}{\frac{T_d}{r} + 1} \right) \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{T_d}{r} s + 1} \cdot K_p F \left(1 + \frac{1}{F T_i s} + \frac{T_d}{F} s \right), \end{aligned} \quad (7)$$

式中

$$F = 1 + T_d / T_i.$$

比较式(7)与式(2)可知

$$T_d^* = \frac{T_d}{F} = \frac{T_d}{1 + \frac{T_d}{T_i}} = \frac{1}{\frac{1}{T_d} + \frac{1}{T_i}}, \quad (8)$$

及

$$T_i^* = FT_i = T_i + T_d. \quad (9)$$

可见当 T_d 增加时, T_d^* 增加较之 T_i^* 增加更多,且保持 $T_i^* = 4T_d^*$ 的关系, T_i 与 T_d 应按下列条件选择:

$$T_d \leq T_i, \quad T_d \approx T_i,$$

为了避免调节过程的干涉振荡,一般不取 $T_i = T_d$,而取 T_d 比 T_i 略少.不失一般性,可设取

$$T_d = (0.95 - 0.99)T_i.$$

规则2 本规则引入控制系统的积分时间等于系统的操作周期,根据P. G. 欣斯基对工业对象的大量实验结果,在衰减振荡状态下的振荡周期约为PID调节器积分时间的(1/0.9)倍,即 $T_s = (1/0.9)T_i$,而 $\omega_s = 2\pi/T_s$ 为衰减过程的振荡角频率,它与等幅振荡状态下的振荡角频率 ω 有如下关系:

$$\omega_s = \omega \sqrt{1 - \xi^2}.$$

当 $\xi = 0$ 时(等幅振荡状态), $\omega_s = \omega$;当 $\xi = 0.25$ 时, $\omega_s = 0.9682\omega$,则有

$$T_i = 0.9T_s = (0.9/0.9682)T_\omega = 0.9296(2\pi/\omega).$$

规则3 本规则如前所述,是取 $m = 0.221$,即扰动状态下系统的准最优波动度.

三、结构参数的确定

根据衰减模型配合的两个边界条件[式(6a、b)]和三条系统规则,可以定出系统的结构参数.因为控制系统在设计前 $G(s)$ 是已知的, $D(s)$ 的结构参数是未知的,有三个待定参数 K_p 、 T_i 和 T_d ;当 $D(m, \omega)$ 与 $G(m, \omega)$ 配合时,又产生了两个待定参数 m 与 ω ,共有五个待定参数.据上所述并从数学观点看,问题是有唯一确定解的.

为了使分析问题简化,将 $D(m, \omega)$ 分解为两部分

$$\begin{aligned} D(m, \omega) &= K_p \left(\frac{T_d(j-m)\omega + 1}{T_d(j-m)\omega + 1} \right) \left(1 + \frac{1}{T_i(j-m)\omega} \right) \\ &= D_1(m, \omega) \cdot D_2(m, \omega). \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)中

$$D_1(m, \omega) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i(j-m)\omega} \right) = K_p \frac{(1 - mT_i\omega) + (T_i\omega)j}{(-mT_i\omega) + (T_i\omega)j}, \quad (11)$$

及

$$D_2(m, \omega) = \frac{T_d(j-m)\omega + 1}{T_d(j-m)\omega + 1} = \frac{(1 - mT_d\omega) + (T_d\omega)j}{(1 - \frac{mT_d\omega}{r}) + \frac{T_d\omega}{r}j}, \quad (12)$$

由式(11)得

$$|D_1(m, \omega)| = K_p \frac{\sqrt{(1 - mT_i\omega)^2 + (T_i\omega)^2}}{\sqrt{(-mT_i\omega)^2 + (T_i\omega)^2}}, \quad (13a)$$

及

$$\angle D_1(m, \omega) = \tan^{-1} \left(\frac{T_i\omega}{1 - mT_i\omega} \right) - \tan^{-1} \left(-\frac{1}{m} \right). \quad (13b)$$

根据规则2, $T_i = 0.9296(2\pi/\omega) = (5.8408/\omega)$;又按规则1,设 $T_d = 0.99T_i = (5.7824/\omega)$,

由此得

$$T_1\omega = 5.8408, \quad T_d\omega = 5.7824.$$

由规则 3 知, 可取 $m = 0.221$, 式(13)的计算结果为

$$|D_1(m, \omega)| = |D_1(0.221, \omega)| = 0.9776K_p, \quad (14a)$$

$$\angle D_1(m, \omega) = \angle D_1(0.221, \omega) = -9.6118^\circ. \quad (14b)$$

同理, 由式(12)得

$$|D_2(m, \omega)| = \frac{\sqrt{(1 - mT_d\omega)^2 + (T_d\omega)^2}}{\sqrt{(1 - \frac{mT_d}{r}\omega)^2 + (\frac{T_d}{r}\omega)^2}}, \quad (15a)$$

及

$$\angle D_2(m, \omega) = \tan^{-1}\left(\frac{T_d\omega}{1 - mT_d\omega}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{T_d\omega}{r - mT_d\omega}\right) \quad (15b)$$

式(15)中, r 为微分增益, 工业调节器常取三种标准值, 即 $r = 6, 10, 20$ (但在后面所述的通用程序中, 设置 $r_0 = 2$, 步长 $\Delta r = 1$, 一直算到 $r = 20$ 为止, 以便比较各种不同微分增益情况下的参数值), 如上依据三条系统规则, 由式(15)算得

$$|D_2(0.221, \omega)| = \begin{cases} 4.6526 & (r=6), \\ 5.5320 & (r=10), \\ 5.9088 & (r=20), \end{cases} \quad (16a)$$

及

$$\angle D_2(0.221, \omega) = \begin{cases} 41.9878^\circ & (r=6), \\ 59.2088^\circ & (r=10), \\ 75.5881^\circ & (r=20). \end{cases} \quad (16b)$$

再由式(10)算得

$$|D(0.221, \omega)| = \begin{cases} 4.5484 K_p & (r=6), \\ 5.4081 K_p & (r=10), \\ 5.7764 K_p & (r=20), \end{cases} \quad (17a)$$

及

$$\angle D(0.221, \omega) = \begin{cases} 32.3761^\circ & (r=6), \\ 49.5971^\circ & (r=10), \\ 65.9764^\circ & (r=20). \end{cases} \quad (17b)$$

由此, 在上述各种限制条件下, 控制系统按 $m = 0.221$ 的波动度衰减, 则要求被控制对象提供的增益和相迟角分别为

$$|G(0.221, \omega)| = \begin{cases} 0.2199/K_p & (r=6), \\ 0.1848/K_p & (r=10), \\ 0.1731/K_p & (r=20), \end{cases} \quad (18a)$$

及

$$\angle G(0.221, \omega) = \begin{cases} -212.3760^\circ & (r=6), \\ -229.5970^\circ & (r=10), \\ -245.9763^\circ & (r=20). \end{cases} \quad (18b)$$

四、有理分式模型系统的参数优化

随着对象模型辨识方法的发展,尤其是采用时间序列或递推在线分析与辨识的对象模型表现为有理分式形式.记对象特性为(4),式中, $n > p$. 现以 $s = (j-m)\omega$ 代入式(4)后得到衰减的频率特性为

$$G(m, \omega) = \frac{b_0 + b_1(j-m)\omega + b_2(j-m)^2\omega^2 + \cdots + b_p(j-m)^p\omega^p}{a_0 + a_1(j-m)\omega + a_2(j-m)^2\omega^2 + \cdots + a_n(j-m)^n\omega^n}. \quad (19)$$

显然式(19)的分子和分母均为复数,为方便记

$$b_i(j-m)^i\omega^i = B_i^* + j\tilde{B}_i, \quad (i=0-p), \quad (20a)$$

$$a_i(j-m)^i\omega^i = A_i^* + j\tilde{A}_i, \quad (i=0-n), \quad (20b)$$

上式中

$$B_0 = b_0, \quad \tilde{B}_0 = 0, \quad A_0 = a_0, \quad \tilde{A}_0 = 0. \quad (21)$$

照式(20)的记号,式(19)可改写为

$$G(m, \omega) = \frac{\sum_{i=0}^p B_i^* + j \sum_{i=0}^p \tilde{B}_i}{\sum_{i=0}^n A_i^* + j \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i}, \quad (22)$$

故有

$$|G(m, \omega)| = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=0}^p B_i^*\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^p \tilde{B}_i\right)^2}}{\sqrt{\left(\sum_{i=0}^n A_i^*\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^n \tilde{A}_i\right)^2}}, \quad (23a)$$

及

$$\angle G(m, \omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\sum_{i=0}^p \tilde{B}_i}{\sum_{i=0}^p B_i^*}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sum_{i=0}^n \tilde{A}_i}{\sum_{i=0}^n A_i^*}\right). \quad (23b)$$

式(23b)与式(18b)联立,需要求解超越方程,通常采用搜索或逼近的方法,并借助计算机求得近似解.求解时,首先遇到的关键问题是如何确定系数 A_i^* 、 \tilde{A}_i 、 B_i^* 及 \tilde{B}_i . 而为了求这些系数关键是如何计算 $(j-m)^i$ 的值. 记

$$(j-m)^i = C_i^* + j\tilde{C}_i, \quad (24)$$

则

$$B_i^* + j\tilde{B}_i = (C_i^* + j\tilde{C}_i)b_i\omega^i, \quad (25a)$$

$$A_i^* + j\tilde{A}_i = (C_i^* + j\tilde{C}_i)a_i\omega^i. \quad (25b)$$

上述问题转化为如何确定系数 C_i^* 及 \tilde{C}_i 的问题. 为此目的,这里采用如下的递推公式. 记

$$(j-m)^{i-1} = C_{i-1}^* + j\tilde{C}_{i-1},$$

则

$$(j-m)^i = (j-m)^{i-1} \cdot (j-m),$$

$$\begin{aligned}
 C_i^* + j\tilde{C}_i &= (C_{i-1}^* + j\tilde{C}_{i-1})(j-m) \\
 &= jC_{i-1}^* - \tilde{C}_{i-1} - mC_{i-1}^* - jm\tilde{C}_{i-1} \\
 &= -(\tilde{C}_{i-1} + mC_{i-1}^*) + j(C_{i-1}^* - m\tilde{C}_{i-1}).
 \end{aligned}$$

故得简便算式

$$C_i^* = -(\tilde{C}_{i-1} + mC_{i-1}^*), \quad (26a)$$

$$\tilde{C}_i = C_{i-1}^* - m\tilde{C}_{i-1}. \quad (26b)$$

当 $i=1$ 时, $C_1^* = -m, \tilde{C}_1 = 1$; 当 $i=2$ 时, $C_2^* = -(1-m^2) = m^2-1, \tilde{C}_2 = -m-m = -2m$. 余则以此类推, 根据前项计算后项, 十分简便.

利用递推公式(26), 也简化了计算 C_i^* 与 \tilde{C}_i 的程序, 计算框图如图2所示. 求出 C_i^* 与 \tilde{C}_i 值后, 便可依据式(25)算得 A_i^* 、 \tilde{A}_i 、 B_i^* 及 \tilde{B}_i 全部值.

式(25)中, a_i 及 b_i 为已知的, 但 ω 为待求量. 为了求得满足式(18b)条件的 ω 值. 本文先采用一维搜索法找到根 ω 的存在区间, 然后根据二分法精化 ω 的近似解, 其计算子程序框图如图3所示. 计算 ω 的子程序包括以下主要内容: (1)计算 B_i^* 及 $\tilde{B}_i, i=0, 1, 2, \dots, p$,

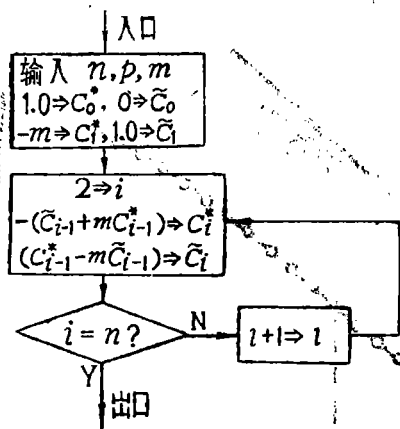


图2 计算 C_i 的子程序框图

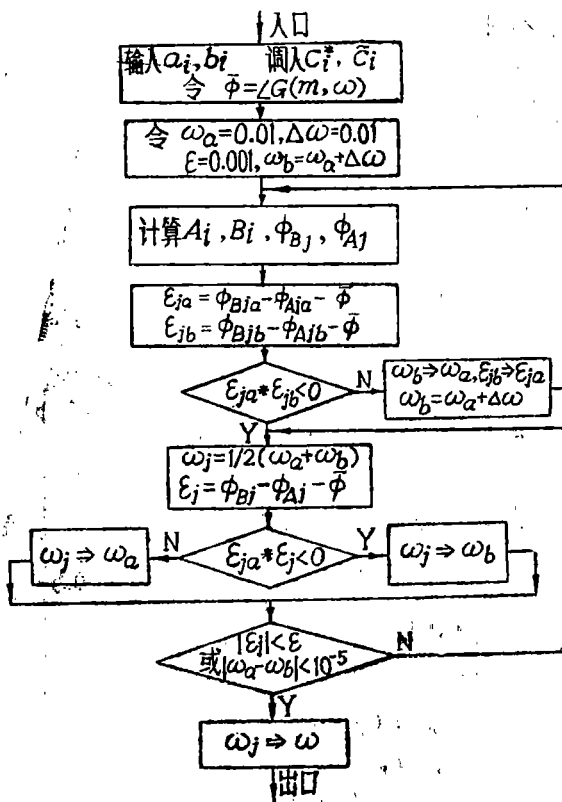


图3 计算 ω 的子程序框图

求 $\phi_{Bj} = \tan^{-1}(\Sigma \tilde{B}_i / \Sigma B_i)$, 其间可调用求 Σ 的子程序(详述), 并保存 $\sum_{i=0}^p B_i^*$ 和 $\sum_{i=0}^p \tilde{B}_i$ 的最

后值, 以备后用. (2) 计算 A_i^* 及 \bar{A}_i , $i=0, 1, 2, \dots, n$, 求 $\phi_{A_j} = \tan^{-1}(\Sigma \bar{A}_i / \Sigma A_i^*)$, 同上保存 $\sum_{i=0}^n A_i^*$ 和 $\sum_{i=0}^n \bar{A}_i$ 的最后值, 以备后用. (3) 计算 $\phi = \phi_{B_j} - \phi_{A_j}$, 并采用一维搜索法 (令初值 $\omega_0 = 0.01$, 搜索步长 $\Delta\omega = 0.01$) 找到满足方程 $\phi - \bar{\phi} = 0$ 的实根 ω 的存在区间 $[a, b]$, 然后根据二分法精化 ω 的解. $\bar{\phi}$ 是按照不同的微分增益 r 值所确定的过程应当提供的相角; ε 为一个任意小的正数, 是预先规定好的计算精度.

求出 ω 值后, 便可转去计算其它参数, 如 $|G(m, \omega)|$, K_p , T_i 及 T_d 等, 而后返回主程序并打印主要结果. 图 4 为计算其它参数子程序框图. 在调用子程序 (图 4) 之前, 需要预先算好系数 $GC (= K_p |G(m, \omega)|)$ 值并保存之.

五、算 例

已知 $G(s) = \frac{2(2s+1)}{(5s+1)^4}$, 求不完全微分型 PID 调节器的整定参数.

依题意知, $b_0 = 2$, $b_1 = 4$, $p = 1$; $a_0 = 1$, $a_1 = 20$, $a_2 = 150$, $a_3 = 500$, $a_4 = 625$, $n = 4$. 对于不同的 r 值, 各种参数值如表 1 所列. 全部计算在 IBM-PC 机上进行, 程序用 FORTRAN 语言编写 (略). 计算结果还表明, 在本算例中, 当 $r = 4$ 时, K_p 取得极小值 (0.4683), 如图 5 所示.

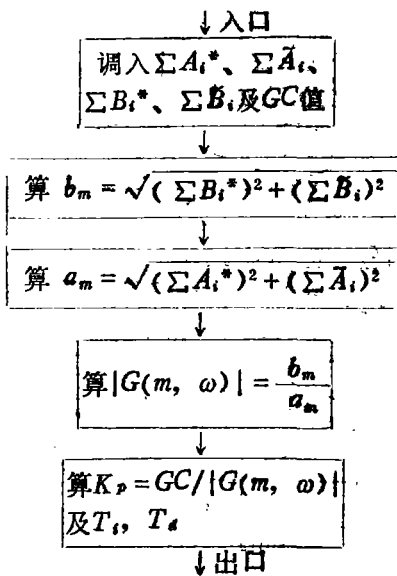


图 4 计算其它参数子程序框图

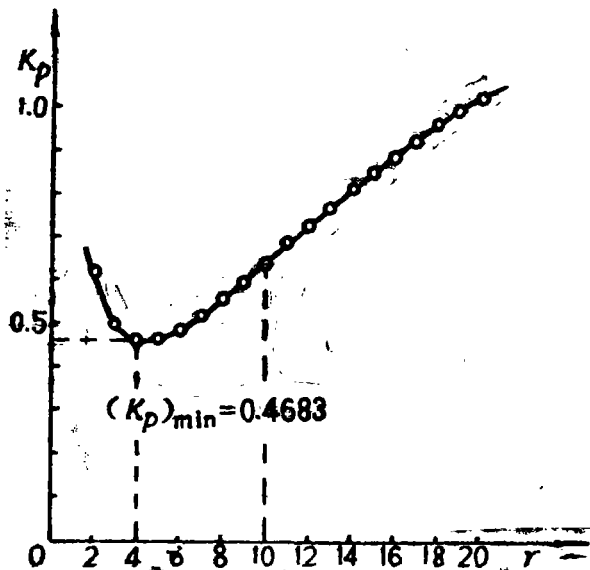


图 5 $r-K_p$ 曲线

表 1. PID 准优化参数

r	ω	K_p	t_i	t_d	$ g(s) $	$\angle g(s)$	ϕ
2	0.1928	0.6220	30.2896	29.9867	0.8277	-180.2584	-180.2581
3	0.2087	0.5026	27.9805	27.7007	0.7070	-189.7244	-189.7244
4	0.2247	0.4683	25.9918	25.7319	0.6028	-198.3494	-198.3489
5	0.2401	0.4701	24.3218	24.0786	0.5169	-205.9123	-205.9091
6	0.2546	0.4907	22.9389	22.7095	0.4480	-212.3775	-212.3762
7	0.2680	0.5222	21.7968	21.5788	0.3933	-217.8400	-217.8397
8	0.2801	0.5599	20.8505	20.6420	0.3498	-222.4379	-222.4376
9	0.2911	0.6011	20.6613	19.8607	0.3151	-226.3151	-226.3137
10	0.3011	0.6411	19.3980	19.2040	0.2871	-229.5977	-229.5972
11	0.3101	0.6877	18.8348	18.6464	0.2642	-232.3984	-232.3971
12	0.3183	0.7310	18.3528	18.1692	0.2454	-234.8024	-234.8021
13	0.3256	0.7737	17.9361	17.7568	0.2296	-236.8840	-236.8833
14	0.3324	0.8153	17.5730	17.3973	0.2163	-238.6979	-238.6974
15	0.3385	0.8556	17.2547	17.0821	0.2050	-240.2917	-240.2898
16	0.3441	0.8945	16.9736	16.8038	0.1953	-241.6970	-241.6966
17	0.3493	0.9320	16.7230	16.5558	0.1868	-242.9491	-242.9471
18	0.3540	0.9679	16.4995	16.3345	0.1794	-244.0650	-244.0649
19	0.3584	1.0025	16.2981	16.1351	0.1729	-245.0696	-245.0694
20	0.3624	1.0356	15.9549	15.9549	0.1672	-245.9766	-245.9765

参 考 文 献

- 〔1〕 欣斯基, F. G. (方崇智译), 自动控制系统, 化学工业出版社, (1982).
- 〔2〕 绪方胜彦(卢伯英等译), 现代控制工程, 科学出版社, (1980).
- 〔3〕 本杰明 C. 郭(张一中译), 自动控制系统, 水利电力出版社, (1983).
- 〔4〕 华中工学院编, 算法语言·计算方法, 人民教育出版社, (1978).
- 〔5〕 余俊、廖道训编, 最优化方法及其应用, 华中工学院出版社, (1984).
- 〔6〕 数学手册编写组, 数学手册, 人民教育出版社, (1979).
- 〔7〕 丘玉圃编著, FORTRAN程序设计, 科学出版社, (1982).

Parameter Optimization of a Typical Object

Hong Shangren Wang Yongchu

Abstract

In the light of boundary condition of stable system and three system rules, this paper discusses the theory and algorithms of parameter adjustment of system structure in such a case that the incomplete derivative PID controller matches the controlled member of single-input and single-output linear system. The universal program and flowchart as well as sample calculations are also given in this paper.

Key words PID regulators, parameter, optimization