

方块脉冲函数在一般型泛函 变分近似解法中的应用

林 建 华

(土木工程系)

摘 要

本文利用方块脉冲函数研究一般型泛函变分的近似解法,并将其应用于求解力学中的变分问题.数值算例表明这一新的方法具有计算简便、适应性强、精度较好的优点.

关键词 变分法, 脉冲, 数值计算

一、前 言

泛函变分的近似解法是变分学在实用上最重要的问题.长期以来,人们一直致力于寻求各种有效的近似解法,诸如欧拉差分法、李兹法、伽辽金法以及有限单元法等,由此推动了变分学研究的进展.

在以往力学变分问题的近似解法中,试函数的选取一般都假设是容许函数本身(如位移),而通过微分得到容许函数的导函数(如弯矩、应力或应变等).是否可将试函数的选取取为容许函数的导函数,求解后通过积分得到满足泛函极值的容许函数本身?文献[1]提出了采用沃尔什函数,文献[2]提出了利用等宽方形脉冲函数,分别从容许函数的导函数入手,研究了型如 $\int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t))dt$ 的最简单泛函的直接变分近似解法,取得了较好的结果.本文利用非等宽方块脉冲函数,研究了具有多个待定函数、具有 n 阶导数的一般型泛函^[3]

$$\Pi [y_1, y_2, \dots, y_N] = \int_{x_0}^{x_m} F[x; y_1, y_2, \dots, y_N; y'_1, y'_2, \dots, y'_N; y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_N^{(n)}] dx \quad (1)$$

的变分近似解法,并应用于求解力学中的变分问题.数值算例表明,采用方块脉冲函数法具有计算方便、适应性强、精度较好的优点,不失为一种简便而有效的求解直接变分问题的新方法.

本文1988年7月6日收到.

二、非等宽方块脉冲函数的定义和性质

1. 非等宽方块脉冲函数的定义

设在区间 $[x_0, x_m]$ 包含有 m 个不等宽的方块脉冲函数族, 其矩阵表达式定义为

$$G(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)]^T, \quad x \in [x_0, x_m], \quad (2)$$

其中第 k 个元素定义为

$$g_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_{k-1}, x_k], \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \quad (3)$$

2. 非等宽方块脉冲函数的性质

(1) 性质 1 (乘法公式): 对一切 $x \in [x_0, x_m]$, 非等宽方块脉冲函数族满足下面乘法公式

$$g_k(x)g_j(x) = \begin{cases} g_k(x), & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad (4)$$

$$G(x)G^T(x) = \text{diag}[g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)], \quad (5)$$

其中 $\text{diag}[\cdot]$ 表示对角矩阵.

(2) 性质 2 (正交性): 非等宽方块脉冲函数族是 $[x_0, x_m]$ 区间上的正交函数族:

$$\int_{x_0}^{x_m} g_k(x)g_j(x)dx = \begin{cases} x_k - x_{k-1}, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad (6)$$

$$\int_{x_0}^{x_m} G(x)G^T(x)dx = \text{diag}[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m] = C, \quad (7)$$

其中 $\bar{x}_k = x_k - x_{k-1}$.

(3) 性质 3 (积分公式): 非等宽方块脉冲函数的积分函数族可用非等宽方块脉冲函数本身近似展开, 其积分公式表示为

$$\int_{x_0}^x g_k(t)dt \cong (\bar{x}_k/2)g_k(x) + \bar{x}_k \sum_{i=k-1}^m g_i(x), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

$$\int_{x_0}^x G(t)dt \cong PG(x), \quad (9)$$

其中 P 为上三角 m 阶方阵:

$$P_{ij} = \begin{cases} \bar{x}_i, & j > i, \\ \frac{1}{2}\bar{x}_i, & j = i, \\ 0, & j < i. \end{cases} \quad (10)$$

三、函数按脉冲函数族展开及边界条件的近似表示

1. 函数按脉冲函数展开

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0, x_m]$ 上绝对可积, 别可用方块脉冲函数近似展开为

其中

$$f(x) \cong \sum_{k=1}^m a_k g_k(x) = A^T G(x), \quad (11)$$

其其 $A^T = [a_1, a_2, \dots, a_m]$, a_k 为 $f(x)$ 的第 k 个方块脉冲函数分量的系数。由正交性容易证明

$$a_k = \frac{1}{\bar{x}_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt. \quad (12)$$

特别地, 当 (i) 若 $f(x) = C$ (常数),

$$f(x) \cong C[1, 1, \dots, 1] G(x) = CE^T G(x); \quad (13)$$

(ii) 若 $f(x) = ax + b$,

$$f(x) \cong \left[\left(\frac{a}{2}(x_0 + x_1) + b \right), \left(\frac{a}{2}(x_1 + x_2) + b \right), \dots, \left(\frac{a}{2}(x_{m-1} + x_m) + b \right) \right] G(x) \\ = B^T G(x). \quad (14)$$

2. 待定函数及其各阶导函数的脉冲函数展开

设 $y^{(n)}(x)$ 在区间 $[x_0, x_m]$ 上绝对可积, 则可近似展开为

$$y^{(n)}(x) \cong \sum_{k=1}^m d_k g_k(x) = D^T G(x), \quad (15)$$

其中 $D^T = [d_1, d_2, \dots, d_m]$ 为待求的未知系数。利用式 (9), (13) 易推知 $y^{(n-1)}(x)$ 的表达式为

$$\left. \begin{aligned} y^{(n-1)}(x) &= \int_{x_0}^x y^{(n)}(t) dt + y^{(n-1)}(x_0) \\ &\cong D^T \int_{x_0}^x G(t) dt + y^{(n-1)}(x_0) E^T G(x) \\ &= [D^T P + y^{(n-1)}(x_0) E^T] G(x), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ y^{(n-i)}(x) &= \int_{x_0}^x y^{(n-i+1)}(t) dt + y^{(n-i)}(x_0) \\ &\cong [D^T P^i + y^{(n-1)}(x_0) E^T P^{i-1} + y^{(n-2)}(x_0) E^T P^{i-2} + \dots + y^{(n-i)}(x_0) E^T] G(x), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ y(x) &= [D^T P^n + y^{(n-1)}(x_0) E^T P^{n-1} + \dots + y(x_0) E^T] G(x). \end{aligned} \quad (18)$$

3. 边值的近似表达式

设函数 $y^i(x)$ ($i=0, 1, \dots, n$) 有端点值:

$$\left. \begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}, \\ y(x_m) &= y_m, \quad y'(x_m) = y'_m, \quad \dots, \quad y^{(n)}(x_m) = y_m^{(n)}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

若 $0 < i \leq n$, 利用式 (17) 可得用脉冲函数族近似表达的边界条件通式

$$y^{(n-i)}(x_m) - y^{(n-i)}(x_0) = y_m^{(n-i)} - y_0^{(n-i)} = \int_{x_0}^{x_m} y^{(n-i+1)}(t) dt \\ = [D^T P^{i-1} + y^{(n-1)}(x_0) E^T P^{i-2} + y^{(n-2)}(x_0) E^T P^{i-3} + \dots + y^{(n-i)}(x_0) E^T] G(x), \quad (20)$$

其中

$$T = \int_{x_0}^{x_m} G(t) dt = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]^T. \tag{21}$$

若 $i=0$, 当 m 取足够大时, 或在 x_0 附近脉冲宽度取足够小时, 可近似认为边界值 $y^{(n)}(x_0)$ 由过 $(\bar{x}_1/2, d_1)$, $(\bar{x}_2/2 + \bar{x}_1, d_2)$ 两点的直线外推到 $x=x_0$ 处得到 (图 1)

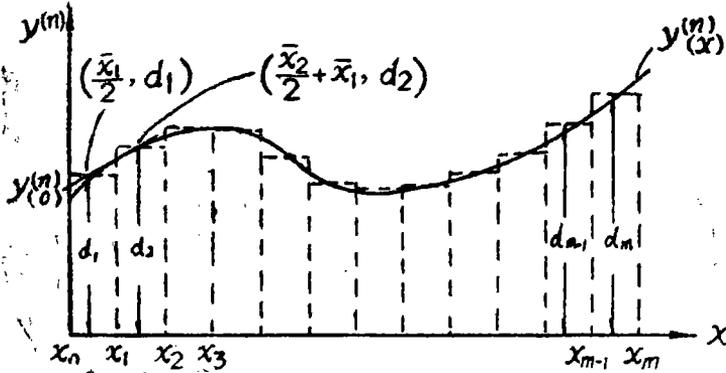


图 1

$$y^{(n)}(x_0) = \frac{2\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{\bar{x}_2 + \bar{x}_1} d_1 - \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2 + \bar{x}_1} d_2. \tag{22}$$

同理可得

$$y^{(n)}(x_m) = -\frac{\bar{x}_m}{\bar{x}_m + \bar{x}_{m-1}} d_{m-1} + \frac{2\bar{x}_m + \bar{x}_{m-1}}{\bar{x}_m + \bar{x}_{m-1}} d_m. \tag{23}$$

合并 (22)、(23) 两式可得

$$y^{(n)}(x_m) - y^{(n)}(x_0) = y_m^{(n)} - y_0^{(n)} = D^T S, \tag{24}$$

其中

$$S = \left[\frac{2\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}, -\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}, 0, \dots, 0, \frac{\bar{x}_m}{\bar{x}_{m-1} + \bar{x}_m}, -\frac{\bar{x}_{m-1} + 2\bar{x}_m}{\bar{x}_m + \bar{x}_{m-1}} \right]^T.$$

四、求解变分问题的方块脉冲函数法

考虑式 (1) 中所给出的一般型泛函极值问题。

设第 k 个待定函数的 n 阶导函数 $y_k^{(n)}(x)$, ($k=1, 2, \dots, N$) 可按脉冲函数族近似展开为 $y_k^{(n)}(x) = D_k^T G(x)$, 其中 D_k^T 为待求的方块脉冲函数系数矩阵。其余各阶导函数 $y_k^{(n-1)}(x)$ 可按式 (16) — (18) 列出。对于自变量的已知函数, 可按式 (11) — (14) 展开成系数确定的脉冲函数级数。

1. 将以上所得的 $y_k^{(n)}(x)$, $y_k^{(n-1)}(x)$, \dots , $y_k(x)$, ($k=1, 2, \dots, N$) 的近似表达式及已知函数的近似表达式代入式 (1) 泛函中, 利用式 (7)、(21) 把泛函 $\Pi[y_1, y_2, \dots, y_N]$ 的极值问题转化成如下多元函数的函数极值问题。

$$\begin{aligned} \Pi[y_1, y_2, \dots, y_N] &\cong \phi(d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1m}, d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2m}, \dots, d_{N1}, \\ &\quad d_{N2}, \dots, d_{Nm}, y_k^{(n-1)}(x_0), y_k^{(n-2)}(x_0), \dots, y_k(x_0)) \\ &= \phi(\mathbf{D}_k, \mathbf{Y}_k(x_0)), \quad k=1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (25)$$

3. 对于给定的边值条件, 可按式(20)~(24)列出如下一般形式的代数方程

$$\begin{aligned} \varphi_{jk}(d_{k1}, d_{k2}, \dots, d_{km}, y_k^{(n-1)}(x_0), y_k^{(n-2)}(x_0), \dots, y_k(x_0)) \\ = \varphi_{jk}(\mathbf{D}_k, \mathbf{Y}_k(x_0)), \quad k=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, l, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $(l \times N)$ 为边界条件所确定的方程个数。这样, 对泛函(1)求极值曲线 $y_k(x)$ 的问题, 最终可提为在约束条件式(26)下, 求式(25)的多元函数的条件极值问题。

4. 利用拉格朗日乘子法, 构造辅助函数为

$$F(\mathbf{D}_k, \mathbf{Y}_k(x_0), \lambda_{jk}) = \phi(\mathbf{D}_k, \mathbf{Y}_k(x_0)) + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^l \lambda_{jk} \varphi_{jk}(\mathbf{D}_k, \mathbf{Y}_k(x_0)). \quad (27)$$

为了计算方便, 可把已知的各阶导函数在 x_0 处的边值代入式(27)中, 使 $\mathbf{Y}_k(x_0)$ 中仅包含有未知(待求)的边值。设对第 k 个待定函数, 其各阶导函数在 x_0 处的边值已知有 t_k 个, 那么对 N 个待定函数则有 $M = \sum_{k=1}^N t_k$ 个在 x_0 处已知的边值。于是在辅助函数 F 中共包含有 $(N \times m + N \times n - M + N \times l)$ 个待定参数。其中 \mathbf{D}_k 有 $(N \times m)$ 个, $\mathbf{Y}_k(x_0)$ 有 $(N \times n - M)$ 个, λ_{jk} 有 $(N \times l)$ 个。根据多元函数取极值的必要条件有

$$\partial F / \partial \mathbf{D}_k = 0, \quad (28a)$$

$$\partial F / \partial \mathbf{Y}_k(x_0) = 0, \quad k=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, l, \quad (28b)$$

$$\partial F / \partial \lambda_{jk} = 0, \quad (28c)$$

其中式(28a)包含有 $(N \times m)$ 个方程, 式(28b)包含有 $(N \times n - M)$ 个方程, 式(28c)包含有 $(N \times l)$ 个方程。

5. 由式(28)联立解出 $\mathbf{D}_k = [d_{k1}, d_{k2}, \dots, d_{km}]^T$ ($k=1, 2, \dots, N$) 和未知的 $\mathbf{Y}_k(x_0) = [y_k^{(n-1)}(x_0), y_k^{(n-2)}(x_0), \dots, y_k(x_0)]$, 代入式(16)~(18), 最后求出极值曲线 $y_k(x)$ 及其各阶导函数 $y_k^{(n-i)}(x)$ 的近似解。

五、应 用

1. 梁的弯曲问题

(1) 不考虑剪切变形梁(工程梁)的弯曲:

对于均质的等截面梁, 受分布荷载 $q(x)$ (图2), 相应的势能泛函为

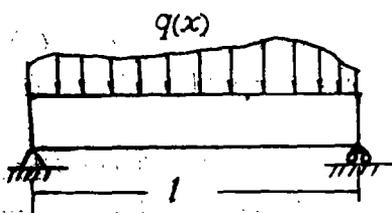


图 2

$$\Pi(w(x)) = \int_0^l \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - q(x)w \right] dx, \quad (29)$$

若两端铰支, 其几何边界条件给出

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0, \quad (30)$$

设

$$\begin{aligned} w'' &= [d_1, d_2, \dots, d_m] [g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)]^T \\ &= \mathbf{D}^T \mathbf{G}(x), \end{aligned} \quad (31)$$

有

$$w' = [D^T P + w'(0)E^T]G(x), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} w &= [D^T P^2 + w'(0)E^T P + w(0)E^T]G(x) \\ &= [D^T P^2 + w'(0)E^T P]G(x). \end{aligned} \quad (33)$$

$q(x)$ 可按式(11)展开有

$$q(x) = A^T G(x), \quad (34)$$

把式(31) — (34)代入式(29), 积分后得

$$\phi(D, w'(0)) = \frac{EI}{2} D^T \cdot C \cdot D - D^T \cdot P \cdot P \cdot C \cdot A - w'(0)E^T \cdot P \cdot C \cdot A, \quad (35)$$

将边界条件式(30)代入式(20)得

$$\varphi_1 = w(l) - w(0) = [D^T P + w'(0)E^T]T = 0, \quad (36)$$

引入拉氏乘子, 建立辅助函数

$$\begin{aligned} F(D, w'(0), \lambda_1) &= (EI/2)D^T C D - D^T P P C A - w'(0)E^T P C A \\ &\quad + \lambda_1 [D^T P + w'(0)E^T]T, \end{aligned} \quad (37)$$

由极值条件可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial D^T} &= EICD - P \cdot P \cdot C \cdot A + \lambda_1 P T = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial w'(0)} &= -E^T P \cdot C \cdot A + \lambda_1 E^T \cdot T = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= D^T \cdot P \cdot T + w'(0)E^T T = 0. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

联立求解式(38)可得未知数 $D, w'(0)$, 再代入式(33), 最后求得 $w(x), w'(x)$ 的近似解。

若材料是非均质的或截面形状不是均等的, 只要把 EI 看作是 x 的函数, 同时按式(11)展开, 上面的方法一样适用, 不会增加太大的困难。

表 1 给出了当 $q(x) = q_0, l = 1, m = 12$ 时, 本文数值解与精确解的比较。由于对称, 仅列出一半结果。

表 1 弯矩与挠度的数值解与精确解 ($\times 10^{-2} q_0 / EI$)

x	w'' 本文数值解	w'' 精确解	w 本文数值解	w 精确解
0.025	1.1500	1.2188	0.1025	0.1040
0.075	3.4500	3.4688	0.3047	0.3091
0.150	6.2500	6.3750	0.5908	0.5990
0.250	9.2500	9.3750	0.9136	0.9277
0.350	11.2500	11.3750	1.1458	1.1636
0.450	12.2500	12.3750	1.2638	1.2885

(2) 考虑横向剪切变形梁(铁木辛柯梁)的弯曲;

考虑横向剪切变形梁的势能泛函为^[4]

$$\Pi(w, \Psi) = \int_0^l \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 + \frac{kGA}{2} \left(\frac{dw}{dx} - \Psi \right)^2 - q(x)w \right] dx, \quad (39)$$

这是一个包含有两个待定函数的泛函。其中 Ψ 是剖面转角， A 是剖面截面积， k 是截面形状参数，对于矩形截面 $k = 10(1 + \nu)/(12 + 11\nu)$ ， ν 为泊松比。

几何边界条件给出

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0, \quad (40)$$

设

$$\Psi' = D_1^T G(x), \quad w' = D_2^T G(x), \quad q = A^T G(x), \quad (41)$$

则有

$$\Psi = D_1^T P \cdot G(x) + \Psi(0), \quad (42)$$

$$w = D_2^T P \cdot G(x) + w(0) = D_2^T P \cdot G(x). \quad (43)$$

把式(41) — (43)代入式(40)泛函中，积分后得

$$\begin{aligned} \phi(D_1, D_2, \Psi(0)) = & (EI/2) D_1^T C \cdot D_1 + (K/2) [D_2^T C \cdot D_2 - 2D_1^T P \cdot C \cdot D_2 \\ & - 2\Psi(0) D_2^T T + D_1^T P \cdot C \cdot P^T D_1 + 2\Psi(0) D_1^T P \cdot T + \Psi^2(0)] - D_2^T P \cdot C \cdot A, \end{aligned} \quad (44)$$

其中 $K = kGA$ 。利用式(20)，边界条件式(40)可表示为

$$\varphi_1 = w(l) - w(0) = D_2^T T = 0, \quad (45)$$

引入拉氏乘子，建立辅助函数有

$$F(D_1, D_2, \Psi(0), \lambda_1) = \phi(D_1, D_2, \Psi(0)) + \lambda_1 D_2^T \cdot T, \quad (45)$$

由极值条件可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial D_1^T} &= EICD_1 - KPCD_2 + KPCP^T D_1 + K\Psi(0)PT = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial D_2^T} &= KCD_2 - KCP^T D_1 - K\Psi(0)T - PCA + \lambda_1 T = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \Psi(0)} &= -KD_2^T T + K\Psi(0) + K(P T)^T D_1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= T^T D_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

联立求解式(47)可得 D_1 ， D_2 ， $\Psi(0)$ ，代入式(42)、(43)最后可得 $\Psi(x)$ ， $w(x)$ 值。表2给出了当 $q(x) = q_0$ ， $l = 1$ ， $m = 16$ ， $h = 0.8l$ ， $\nu = 0.3$ 时，本文数值解与精确解的比较。

表2 剖面转角与挠度的数值解与精确解 ($\times 10^{-2} q_0/EI$)

x	Ψ 数值解	Ψ 精确解	w 数值解	w 精确解
0.00625	4.1302	4.1657	0.1555	0.1565
0.01875	4.1225	4.1580	0.4631	0.4646
0.03750	4.0943	4.1324	0.9094	0.9142
0.07500	3.9859	4.0331	1.7496	1.7667
0.15000	3.5875	3.6604	3.2105	3.2778
0.25000	2.8125	2.8646	4.7911	4.8671
0.35000	1.7875	1.8188	5.8615	5.9434
0.45000	0.6125	0.6229	6.4017	6.4865

从本例可以看出，本文的方法计算简单，适应性强，对结构的形状、载荷分布情况没有限制。所得到的结果和理论解吻合较好。

2. 框架剪力墙结构的共同工作

图 3 所示的框架-剪力墙结构的计算模型，设框架中各横梁无限刚劲，剪力墙只考虑弯曲变形，框架与剪力墙沿楼层用刚性链杆相连接。若框架层数较多，各层高 h 相同，可近似将它看作沿高度截面不变的悬臂梁与弯曲变形的剪力墙并联（通过连续分布的刚性链杆）共同工作。设框架的层间侧移刚度为 k （图 3b），则作为剪切变形型的悬臂梁的剪切刚度为 kh 。

结构的总形变余能为框架和剪力墙形变余能之和^[5]

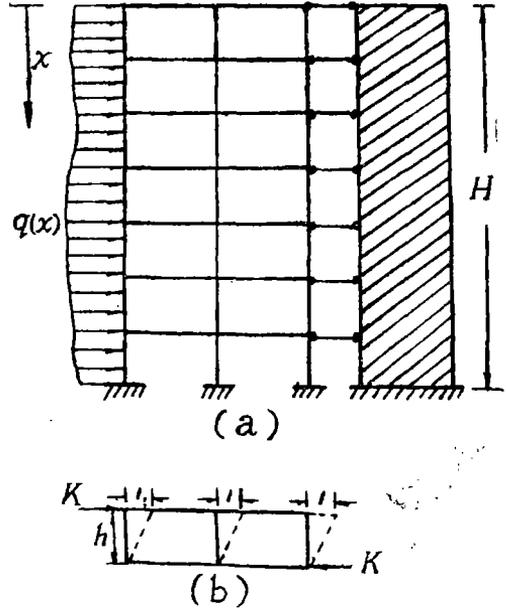


图 3

$$\Pi_c = \int_0^H \frac{M^2}{2EI} dx + \int_0^H \frac{(R - M')^2}{2kh} dx, \tag{48}$$

其中 $R(x) = \int_0^x q(x) dx$ 为距顶端 x 处楼层的总水平剪力，这一总剪力由框架和剪力墙共同承担。设

$$M'(x) = D^T G(x), \quad q(x) = A^T G(x), \tag{49}$$

积分上式并利用

$$M|_{x=0} = 0, \tag{50}$$

可得

$$M(x) = D^T P G(x), \tag{51}$$

$$R(x) = \int_0^x q(x) = A^T P G(x), \tag{52}$$

其中 A^T 为已知的系数矩阵。把式 (50) — (52) 代入式 (48)，积分后得

$$F(D) = \phi(D) = (1/2EI) D^T \cdot P \cdot C \cdot P^T D + (1/2kh) (A^T P C P^T A - 2D^T C P^T A + D^T C D). \tag{53}$$

极值条件给出

$$\frac{\partial F}{\partial D^T} = \frac{1}{EI} P \cdot C \cdot P^T D + \frac{1}{kh} C \cdot D - \frac{1}{kh} C \cdot P^T A = 0, \tag{54}$$

由式 (54) 解得

$$D = [(kh/EI) P \cdot C \cdot P^T + C]^{-1} C \cdot P^T \cdot A, \tag{55}$$

当取 $kh/EI = 1$, $m = 16$, $q = 1$, $H = 1$ 时，求得的 $M(x)$ 近似值与精确解

$$M(x) = ch(x) + \frac{1 - sh(1)}{ch(1)} sh(x) - 1 \tag{56}$$

的值列在表3中。由表中可以看出,除了在弯矩变号处误差较大之外,其余的均和精确解较好的吻合。这种误差的产生主要是因为正负方块脉冲突变的地方并不正好为零弯矩之点,当减少脉冲宽度(增大 m),这种误差的范围是可以减小的。

表3 剪力墙弯矩值的数值解和精确解

x	M 数值解	M 精确解	x	M 数值解	M 精确解
0.00625	-0.00067	-0.00069	0.55000	0.09063	0.08974
0.01875	-0.00195	-0.00194	0.65000	0.14093	0.14002
0.03750	-0.00350	-0.00354	0.75000	0.20268	0.20172
0.07500	-0.00545	-0.00567	0.85000	0.27648	0.27544
0.15000	-0.00467	-0.00575	0.92500	0.33891	0.33906
0.25000	0.00385	0.00285	0.96250	0.37319	0.37387
0.35000	0.02243	0.02150	0.98125	0.39112	0.39170
0.45000	0.05126	0.05036	0.99375	0.40340	0.40399

利用所求得的 $M(x)$ 、 $M'(x)$ 值,可以容易地求出框架的侧移量。

六、结 语

1. 方块脉冲函数具有优良的运算性质,利用它进行直接变分求解,计算方便,适应性强,未知数物理意义明确,具有较好的计算精度。
2. 与现有的近似方法不同,本方法是从容许函数的导函数入手,通过积分求得待求函数。方法新颖,效果较好,不失为一种新的有效的近似解法。
3. 由于采用不等宽方块脉冲函数,可以在边界附近或其它函数梯度变化较大的地方随意减小脉冲宽度,以提高计算精度。
4. 本方法还可以进一步推广到依赖于多个自变量的多元函数的泛函极值问题。

参 考 文 献

- 〔1〕 Chen, C.F. and Hsiao, C.H., Walsh series direct method for solving Variational, *J. Franklin Inst.*, 300, 4(1975).
- 〔2〕 徐宁寿,直接求解变分问题的方块脉冲函数法,北京工业大学学报, 4(1984).
- 〔3〕 钱伟长,变分法及有限元(上册),科学出版社,(1980).
- 〔4〕 Dym, C.L. and Shames, I.H., 固体力学变分法(中译本),中国铁道出版社,(1984).
- 〔5〕 丁学成,弹性力学中的变分方法,高等教育出版社,(1986).

The Application of Block-Pulse Functions in Approximate Solution of Variations with General Types of Functional

Lin Jianhua

Abstract

Variational problem with general types of functional is treated by block-pulse functions in this paper. Some problems in mechanics are chosen as examples to show the validity and efficiency of this new method for providing an approximate solution.

Key words variational method, pulse, numerical computation