第11卷 第1期　华侨大学学报自然科学版　Vol.11 No.1
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1990年10月　(NATURAL SCIENCE)　Jan. 1990

Cauchy应变公式的几何解释及其应用

陈　銑

(土木工程系)

摘　　要

本文通过对假想的单位球面上点的微小位移的分析，赋予由 Cauchy 应变公式给出的应变向量以明确的几何意义，从而使小变形应变张量中一向具有不同几何解释的正应变和剪应变分量具有统一的几何解释，並举例说明了它的有效应用.

关键词　向量，张量，应变分量

一、引　　言

在连续介质力学中，作为二阶对称张量的应力张量σ_{ij}和应变张量ε_{ij}，尽管其所代表的物理和几何含意截然不同，但其数学特性是完全一致的。因此，在应力范畴中进行的有关Mohr圆、Lame应力椭球、Cauchy应力二次曲面等的研究，在应变范畴中都有类同的结果[1-3]，在应力范畴中，熟知的Cauchy应力公式

$$\overset{\nu}{T}_i=\sigma_{ij}\nu_j \qquad i,\ j=1,\ 2,\ 3 \tag{1}$$

给出了一点处过该点以单位向量ν_i为法线方向的截面元上的应力向量$\overset{\nu}{T}_i$（本文均采用对哑标的求和约定）。在应变范畴中，对应的Cauchy应变公式

$$\overset{\nu}{E}_i=\varepsilon_{ij}\nu_j \tag{2}$$

给出的应变向量$\overset{\nu}{E}_i$却不受重视。现中外有关教科书也不曾对此Cauchy应变向量加以充分分析和应用，原因是$\overset{\nu}{E}_i$本身似不具有明确的几何意义。

本文通过对介质中一点邻域的无穷小球单元在纯形变映射中（不含刚性平移和刚性小转动）球面上点的位移的分析，赋予$\overset{\nu}{E}_i$以明确的几何意义；统一了小变形应变张量中正应变和剪应变分量的几何解释；借助若干简例，阐明这一观点的实际应用。

二、Cauchy应变向量的几何意义及对应变张量分量的统一几何解释

在笛长尔坐标系中，介质中一点P及以P为球心，$d\lambda$ 为半径的无限小球域在小变形后被

本文1988年9月29日收到.

映射到以P'为中心的一个邻域，这一映射可视为刚性映射和纯形变映射两部分的叠加。排除刚性平移的成分，该映射可由下式体现：

$$du_i = \varepsilon_{ij}dx_j + \Omega_{ij}dx_j, \tag{3}$$

其中

$$\varepsilon_{ij} = (1/2)(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{4}$$

$$\Omega_{ij} = (1/2)(u_{i,j} - u_{j,i}). \tag{5}$$

式（3）—（5）中，u_i为位移向量；ε_{ij}为应变张量；Ω_{ij}为反对称转动张量。让dx_i表示发自P点沿单位方向向量ν_i方向且其终点Q在球面上的向量

$$dx_i = d\lambda \nu_i,$$

显然，du_i代表了Q点在随球域刚性平移后所完成的位移$\overline{Q_1Q'}$（图1）。若记

$$du_i = d\lambda \overset{\nu}{D}_i,$$

则式（3）可改写为

$$d\lambda \overset{\nu}{D}_i = d\lambda \varepsilon_{ij}\nu_j + d\lambda \Omega_{ij}\nu_j,$$

即

$$\overset{\nu}{D}_i = \overset{\nu}{E}_i + \overset{\nu}{R}_i, \tag{6}$$

其中

$$\overset{\nu}{R}_i = \Omega_{ij}\nu_j. \tag{7}$$

为研究式（6）的几何意义，把以$d\lambda$为半径的无穷小球域放大，设想一以P'为球心、以1为半径的“单位球”（图1）。显然，$\overset{\nu}{D}_i$表示沿ν_i方向向单位球面上的点之位移向量，它由两部分组成：一部分由刚性小转动引起，由$\overset{\nu}{R}_i$表征：

$$\overset{\nu}{R}_i = \boldsymbol{\omega}^{(r)} \times \bar{\nu} = e_{ijk}\omega_j^{(r)}\nu_k, \tag{8}$$

其中

$$\omega_i^{(r)} = -(1/2)e_{ijk}\Omega_{jk} \tag{9}$$

为刚性小转动向量，e_{ijk}为置换张量；另一部分由纯形变引起，由$\overset{\nu}{E}_i$表征。可见，Cauchy应变向量$\overset{\nu}{E}_i$实际上具有明确的几何意义：它表示一点处沿ν_i方向上“单位球”面上的点在纯形变中的位移。必须强调指出，这半径为1的“单位球”，代表着半径为$d\lambda$的无限小球域；“球”面上点的纯形变位移$\overset{\nu}{E}_i$，代表着在无限小球面上沿ν_i方向上的邻点在纯形变中相对球心质点的真实位移，除以$d\lambda$（当$d\lambda\to 0$时）的极值。它完全描述了一点处在ν_i方向的纯形变状态。

$\overset{\nu}{E}_i$在球面法线上的分量

$$\overset{\nu}{E}{}_i^{(n)} = \overset{\nu}{E}_m \nu_m \nu_i = (\varepsilon_{mn}\nu_m\nu_n)\nu_i \tag{10}$$

及在球的切平面上的分量

$$\overset{\nu}{E}{}_i^{(t)} = \overset{\nu}{E}_i - \overset{\nu}{E}{}_i^{(n)}, \tag{11}$$

分别描述了一点处在ν_i方向上的正应变和剪应变。一点处在某方向上的剪应变在此获得了明确的定义。

考察“单位球”面上沿坐标正向的三个点的对应的Cauchy应变向量（图2）

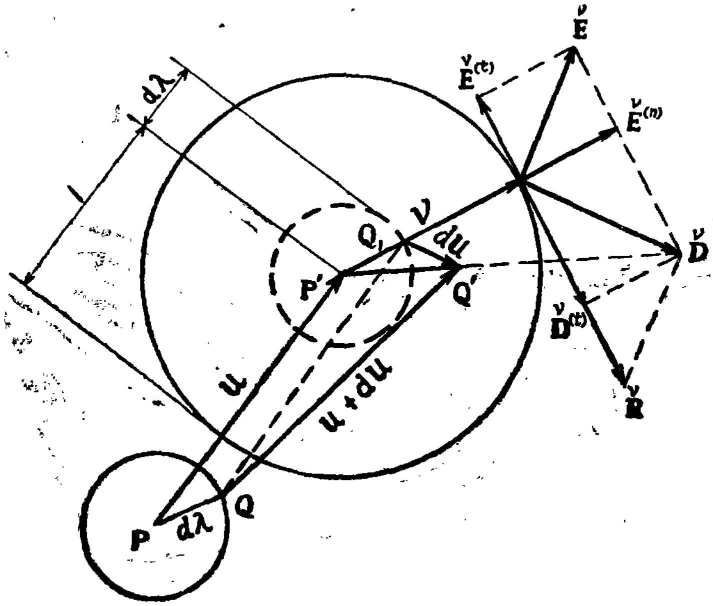

图 1

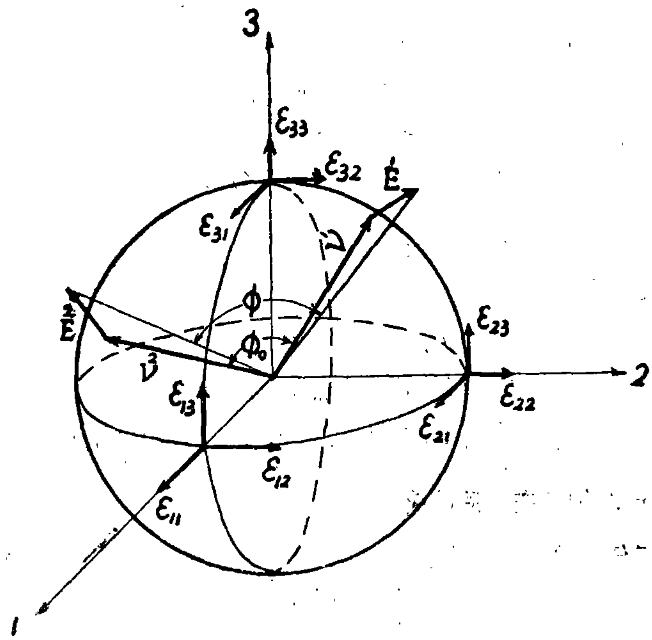

图 2

$$\overset{1}{E}_i=\varepsilon_{1i},\qquad \overset{2}{E}_i=\varepsilon_{2i},\qquad \overset{3}{E}_i=\varepsilon_{3i},\tag{12}$$

可以清楚地看到，应变分量可被直观地解释为这三个点在纯形变中的位移的分量。正应变和剪应变分量在此获得了统一的几何解释。值得指出，传统对正应变和剪应变分量的几何解释是不同的：正应变指线元变形后的伸缩率，而剪应变则指原正交的二线元在变形后夹角的改变量之半。这造成了对应变张量分量统一理解上的困难。本文的观点为理解和应用应变张量及Cauchy应变向量提供了新的更方便的途径。

三、应用举例

1．过一点任意方向线元的小转动

一点处任意ν_i方向上的线元小转动可直观地反映为单位球面上对应点的位移向量$\overset{\nu}{D}$在其切平面上的分量$\overset{\nu}{D}{}_i^{(t)}$（图1按平面问题示意）。由于由刚性小转动引起的位移$\overset{\nu}{R}_i$本身在切平面内，故

$$\overset{\nu}{D}{}_i^{(t)}=\overset{\nu}{E}{}_i^{(t)}+\overset{\nu}{R}_i.\tag{13}$$

让ϖ、$\varpi^{(d)}$和$\varpi^{(r)}$分别表示线元的总转动向量、由纯形变引起的小转动向量和刚性小转动向量，式（13）可改写为

$$\varpi\times\bar{\nu}=\varpi^{(d)}\times\bar{\nu}+\varpi^{(r)}\times\bar{\nu},\tag{14}$$

其中

$$\varpi^{(d)}\times\bar{\nu}=\overset{\nu}{E}{}_i^{(t)}=\overset{\nu}{E}_i-\overset{\nu}{E}{}_i^{(n)}.\tag{15}$$

用$\bar{\nu}$叉乘式（15）等式两边，不难证明

$$\varpi^{(d)}=\bar{\nu}\times\overset{\nu}{E}=e_{ijk}\nu_j\overset{\nu}{E}_k.\tag{16}$$

引用式（9），线元的总转动向量最终表达为

$$\omega_i=\omega_i^{(d)}+\omega_i^{(r)}=e_{ijk}\nu_j\overset{\nu}{E}_k-(1/2)e_{ijk}\Omega_{jk}$$

$$=e_{ijk}(\nu_j\overset{\nu}{E}_k-(1/2)\Omega_{jk});\tag{17}$$

对平面问题，上式简化为

$$\omega_3=\nu_1\overset{\nu}{E}_2-\nu_2\overset{\nu}{E}_1-\Omega_{12}.\tag{18}$$

借助式（2）、（4）、（5）可直接获得熟知的结果[3]：

$$\omega_3=\frac{\partial v}{\partial x}\nu_1{}^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\nu_1\nu_2-\frac{\partial u}{\partial y}\nu_2{}^2.\tag{19}$$

2．过一点两任意线元变形后的夹角

以$\overset{1}{V}$、$\overset{2}{V}$表示二任意单位方向向量，并以$\overset{1}{E}$、$\overset{2}{E}$表示在单位球面上两相应点在纯形变中的微小位移向量（图2）。设变形前二线元的夹角为ϕ_0，即

$$\cos\phi_0=\overset{1}{V}\cdot\overset{2}{V},$$

则变形后二线元夹角的余弦可直接表达为

$$\cos\phi=\frac{(\overset{1}{V}+\overset{1}{E})\cdot(\overset{2}{V}+\overset{2}{E})}{|\overset{1}{V}+\overset{1}{E}|\,|\overset{2}{V}+\overset{2}{E}|};\tag{21}$$

借助式（2）计算上式，並略去高阶小量可得

$$\cos\phi=\frac{\cos\phi_0+2\varepsilon_{ij}\overset{1}{\nu}_i\overset{2}{\nu}_j}{[(1+2\varepsilon_{ij}\overset{1}{\nu}_i\overset{1}{\nu}_j)(1+2\varepsilon_{ij}\overset{2}{\nu}_i\overset{2}{\nu}_j)]^{1/2}},\tag{22}$$

与一般教科书的分析方法比较，上述途径最为简明。

3．一点处的平均剪应变和平均正应变

文[1]以“球面任意取一点所对应的球半径和任意两个与其垂直并彼此垂直的半径方向之间的剪切角的平方和为常数”[1]这一事实，定义此平方和γ^2作为无限小球面上一点剪应变的度量，並定义

$$\bar{\gamma}=\lim_{s\to 0}\sqrt{\frac{1}{S}\int_s\gamma^2 ds}\tag{23}$$

为一点处的平均工程剪应变*，S为球面的面积。

按本文的观点，$\overset{\nu}{E}{}_i^{(t)}$描述了一点处在$\nu_i$方向上的剪应变，$\overset{\nu}{E}{}_i^{(t)}$在切平面内任意两个正交方向上的投影的平方和等于其模的平方。这正是前面所引文[1]提到的事实。$\overset{\nu}{E}{}_i^{(t)}$的模的平方将随$\nu_i$的改变而改变，对这个量在单位球面上求平均值並开方则得到一点处的平均剪应变

$$\bar{E}^{(t)}=\sqrt{\frac{1}{S}\int_s\overset{\nu}{E}{}_i^{(t)}\overset{\nu}{E}{}_i^{(t)}dS},\tag{24}$$

其中

$$\overset{\nu}{E}{}_i^{(t)}\overset{\nu}{E}{}_i^{(t)}=\overset{\nu}{E}_i\overset{\nu}{E}_i-(\overset{\nu}{E}_i\nu_i)^2,\tag{25}$$

$S=4\pi$，即单位球面的面积。不失一般性，选择与应变主轴重合的坐标系进行计算，

$$(\bar{E}^{(t)})^2=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[(\varepsilon_1^2\nu_1^2+\varepsilon_2^2\nu_2^2+\varepsilon_3^2\nu_3^2)-(\varepsilon_1\nu_1^2+\varepsilon_2\nu_2^2+\varepsilon_3\nu_3^2)^2]\sin\theta d\theta d\varphi,\tag{26}$$

其中

$$\nu_1=\sin\theta\cos\varphi,\tag{27a}$$

$$\nu_2=\sin\theta\sin\varphi,\tag{27b}$$

$$\nu_3=\cos\theta.\tag{27c}$$

经积分得

$$\bar{E}^{(t)}=(1/\sqrt{15})[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2]^{1/2}\tag{28}$$

与文[1]中的$\bar{\gamma}$值比较可知，一点处的平均剪应变为平均工程剪应变之半。

还可以完全类似地定义一点处的平均正应变

$$\bar{E}^{(n)}=\sqrt{\frac{1}{S}\int_s\overset{\nu}{E}{}_i^{(n)}\overset{\nu}{E}{}_i^{(n)}dS}$$

*文〔1〕中称为平均剪应变．

$$=(1/\sqrt{15})\left[2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)+(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2\right]^{1/2}, \tag{29}$$

在无体积应变的情况下，即$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0$，上式简化为

$$\bar{E}^{(n)}=\sqrt{2/15}\,(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)^{1/2}, \tag{30}$$

这时，以上定义的平均正应变将与主应变空间内的应变状态向量的模只相差一常数因子。

4．线弹性体的应变能密度

单位球面上的面力$\overset{\nu}{T}_i ds$在纯形变中的位移$\overset{\nu}{E}_i$上所做的功之半在整个球面上的积分，並除以单位球的体积V，即为一点处的应变能密度：

$$W=\frac{1}{V}\int_s \frac{1}{2}\overset{\nu}{T}_i\overset{\nu}{E}_i dS. \tag{31}$$

不失一般性，选择与应力、应变主轴重合的坐标系进行计算

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{V}\int_s \frac{1}{2}\sigma_{ij}\nu_j\varepsilon_{ik}\nu_k dS\\&=\frac{3}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1\nu_1^2+\sigma_2\varepsilon_2\nu_2^2+\sigma_3\varepsilon_3\nu_3^2)\sin\theta d\theta d\varphi\\&=\frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1+\sigma_2\varepsilon_3+\sigma_3\varepsilon_3).\end{aligned} \tag{32}$$

以上推导思路直接易于理解。

四、结　　论

旨在密切应变张量分析和应力张量分析的类比关系，本文重新考察了Cauchy应变公式，通过一点处假想的单位球面上点的位移的分析，赋予Canchy应变向量以明确的几何意义，並进而统一了应变张量中正应变和剪应变分量的几何解释。还就弹性力学中四个典型的问题，利用新观点加以重新探讨，阐明了Cauchy应变向量在几何分析中的有效应用。

参　考　文　献

〔1〕杜庆华、余寿文、姚振汉，弹性理论，科学出版社，（1986），

〔2〕Fung, Y.C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersy, (1965).

〔3〕铁摩辛柯、古地尔（徐芝纶、吴永禎译），弹性理论，人民教育出版社，（1964）.

A Geometric Interpretation of Cauchy's Strain Formula and Its Applications

Chen Guang

Abstract

By studying the displacement of points on the surface of an imaginary unit sphere, the strain vector defined by Cauchy's strain formula is given a clear geometric meaning. The geometric interpretations of the normal and shearing components of a strain tensor which used to be different are thereby unified. Its efficacious applications are exemplified.

Key words vector, tensor, components of strain