第11卷 第1期 华侨大学学报自然科学版 Vol.11 No.1
1990年1月 JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Jan. 1990

用虚功原理求解管道发生弹性失稳时高速流体的临界流速V_{cr}

杜耀星

（土木工程系）

摘要

本文利用虚功原理推导出管道在高速流体流经后，管道发生弹性失稳时流体的临界流速V_{cr}的计算公式。

关键词 虚功，弹性失稳，高速度，临界速度

一、引言

众所周知，一根细长杆，如果承受逐渐增大的轴向压力作用，当压力达到某一数值时，此压杆将会丧失稳定性。但是，管道在高速流体流经后，当流体的流速达到一定数值时，管道也会如同压杆一样，发生弹性失稳，这一事实未必尽人皆知，因而完全可能被一些设计者所忽视。

以两端铰支为例，它在自重（包括管道及流体的自重）作用下，将会发生一定挠曲，而高速流体流经具有一定曲率$1/\rho = d^2y/dx^2$的管道时，必将产生惯性力，每单位长度上管道所受到的惯性力以$q(x)$表示，它与流体的流速平方成正比，也与管道的曲率成正比，这时管道在$q(x)$作用下又进一步发生挠曲，随着管道曲率不断增大，也必将引起惯性力相继增大。完全可以想象到，当流体的流速达V_{cr}到某一数值时，管道也会如同压杆一样发生弹性失稳现象，高速流体这一流速称为临时流速V_{cr}。本文就是利用虚功原理推导出这种类型管道发生弹性失稳时临界流速V_{cr}的计算公式。

二、用虚功原理求解本问题的方法

在计算弹性稳定问题的临界荷载时，虽然可以用求解挠曲线微分方程的办法而得到精确解答。可是，对于比较复杂的弹性稳定问题，常常会遇到繁冗的演算，因而是极不方便的，有时甚至会遇到不可克服的困难。应用能量法求解虽然是一种近似解，但可以得到足够精度

本文1988年8月1日收到。

的解答，倘若预先假设的挠曲线方程$y=f(x)$是完全正确的话，则所求得的解就是精确解。

利用能量法求解弹性稳定问题，可以采用最小势能原理，也可以采用虚功原理等，对本问题我们采用了虚功原理来求解，现以两端铰支的管道为例来说明之。图1所示的两端铰支管道AB，假设由于某种原因（自重或其它原因）而发生一定挠曲，当流体流经具有一定曲率$1/\rho$的管道时，必将产生惯性力$q(x)$，这时管道在$q(x)$作用下又进一步发生挠曲，现在假设管道AB在挠曲线$y=f(x)$位置处于稳定平衡的临界状态，这时给予虚位移$\delta y(x)$，于是作用其上的外力就在虚位移上做了虚功，称为外力虚功δW_e；从另一方面看，当梁AB在$y=f(x)$位置处于稳定平衡的临界状态时，其主要内力有$M(x)$，它在虚位移$\delta y(x)$所引起的虚变形上也做了功，称为内力虚功δW_i，根据虚功原理必有如下关系：

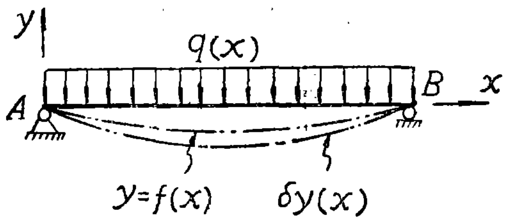

图1

$$\delta W_e=\delta W_i. \tag{1}$$

只要我们能分别计算出外力虚功和内力虚功，代入式（1）即可求得管道发生弹性失稳时，高速流体的临界流速V_{cr}。

三、惯性力集度$q(x)$的计算

设流体的容重为r，管道的内径为D_o，管道的曲率为$(1/\rho)=(d^2y/dx^2)$，在距A端为x处、用相距为dx的两个横截面截取一微段，如图2所示。

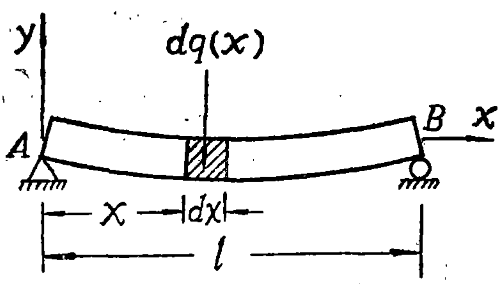

图 2

当流体的流速为V时，于是在dx微段内流体所引起的惯性力为

$$dq(x)=-\frac{\pi r}{4g}D_o^2dx\,V^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

式中，g为重力加速度，因而，单位管长上惯性力的集度$q(x)$为

$$q(x)=-\frac{\pi r}{4g}D_o^2V^2\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{2}$$

式中负号是因为$q(x)$与y的方向相反。

四、管道弹性失稳时的临界流速V_{cr}

设管道在高速流体流经后处于稳定平衡的临界状态时，管道轴线的挠度方程为

$$y(x)=A\sin(\pi x/l), \tag{3}$$

其中，A为管道跨度中点的挠度，称为位移参数；l为管道的跨长。

现在给予虚位移$\delta y(x)$，于是管道在惯性力$q(x)$作用下所作的外力虚功

$$\delta W_e=\int_0^l q(x)\delta y(x)dx,$$

其中

$$q(x)=-\frac{\pi r}{4g}D_o^2V^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\delta y(x)=\delta A\sin(\pi x/l),$$

则

$$\delta W_e=-\frac{\pi r}{4g}D_o^2V^2\int_0^l\delta A\frac{d^2y}{dx^2}\sin\frac{\pi x}{l}dx, \tag{4}$$

对应的内力虚功为

$$\delta W_i=\int_0^l M(x)\delta\lambda(x)dx,$$

其中

$$M(x)=EI\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\delta\lambda(x)=-(\pi/l)^2\delta A\sin(\pi x/l),$$

则

$$\delta W_i=-EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\int_0^l\delta A\frac{d^2y}{dx^2}\sin\frac{\pi x}{l}dx, \tag{5}$$

以式（4）、（5）代入式（1）可得

$$\frac{\pi r}{4g}D_o^2V_{cr}^2\int_0^l(\delta A)\frac{d^2y}{dx^2}\sin\frac{\pi x}{l}dx=EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\int_0^l(\delta A)\frac{d^2y}{dx^2}\sin\frac{\pi x}{l}dx,$$

整理后得

$$V_{cr}=(2/lD_o)\sqrt{\pi EIg/r}, \tag{6}$$

这就是两端铰支管道经高速流体流经后，发生弹性失稳时流体的临界流速的计算式。其中，E为管道材料的弹性模量；I为管道横截面对中性轴的惯性距。

五、讨　　论

以上是以两端铰支高速管道为例来推导弹性失稳时，高速流体临界流速V_{cr}的计算式，如果管道不是两端铰支，而是其它支承形式，只要将管道的挠曲线方程改用相应的形状函数即可。例如对于两端固定的管道，其挠曲线可取为

$$y(x)=(A/2)[1-\cos(2\pi x/l)], \tag{7}$$

式中A为跨中挠度，称为位移参数。

对于一端固定另一端自由的管道，其挠曲线可取三次多项式作为形状函数，即

$$y(x)=c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4, \tag{8}$$

至于其它支承形式的管道，总可以找到相应的挠曲线形状函数，或者用符合支承条件的三角级数表示。当挠曲线的形状函数选定后，就可以按前述原理推导出相应于不同支承情况的临界流速V_{cr}的计算式，此处不再赘述。

参 考 文 献

〔1〕S.铁梓柯，材料力学（高等理论及问题），科学出版社，（1965）.
〔2〕刘鸿文，高等材料力学，高等教育出版社，（1985）.
〔3〕金懿等，材料力学简明教程（下册），机械工业出版社，（1958）.
〔4〕E.J.赫恩，材料力学，人民教育出版社，（1981）.
〔5〕Cernica, J.N., *Strength of Materials*（Second edition），（1979）.
〔6〕B.H.费奥多谢夫，材料力学，高等教育出版社，（1965）.

Critical Velocity Calculation Based on Virtual Work Principle for a High Speed Fluid in a Pipeline of Elastic Instability

Du Yaoxing

Abstract

This paper darives, based on virtual work principle, a formula for calculating the critical velocity V_{cr} of a high speed fluid in a pipeline of elastic instability.

Key words virtual work, elasic instability, speed, critical velocity