

在各向异性介质中磁向量势的多极矩展开

王建成 陈桑年

(应用物理系)

摘 要

本文给出在线性各向异性介质中磁向量势 \vec{A} 的多极展开, 指出它的特点, 并由此导出相应的各级磁场, 为研究磁各向异性的磁场提供一个范例。

关键词 各向异性, 磁向量势, 多极矩, 展开

一、引 言

磁多极展开在近代物理的发展中占有重要地位, 是探寻原子和原子核内部带电粒子的运动情况、分析微观带电粒子相互作用的一个有力的研究手段。迄今为止, 有关资料都是在线性各向同性介质中展开。然而, 当有时在对分子和原子内部空间、点阵排列的各向异性、杂质分布的各向异性以及其它因素引起的各向异性不能不加以考虑时, 就要求有一个在线性各向异性介质中磁多极展开的普遍式。本文在文〔1〕的基础上, 进一步利用已知的磁各向异性的向量 \vec{A} , 求在磁各向异性介质中的磁多极展开式。结果表明, 磁各向异性介质将使各级磁向量势也呈现出各向异性, 但并不影响作为产生各级磁向量势的源的电流磁偶极矩或电流磁四极矩的分布。此外, 由各级磁向量势所得到的磁场, 都比在介质为线性各向同性时要附加一个磁场。

二、磁向量势的多极展开式

当磁线性各向异性介质的三个主轴与直角坐标 X 、 Y 、 Z 三个轴互为平行时, 给定的电流分布

$$\vec{j}(\vec{x}') = j_1(\vec{x}')\vec{e}_1 + j_2(\vec{x}')\vec{e}_2 + j_3(\vec{x}')\vec{e}_3, \quad (1)$$

在空间激发的磁向量势 \vec{A} 为^{〔1〕}

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}'(\vec{x}') dV'}{R\mu}, \quad (2)$$

本文1989年3月29日收到。

式中

$$\vec{J}'(\vec{x}') = a_1 j_1(\vec{x}') \vec{e}_1 + a_2 j_2(\vec{x}') \vec{e}_2 + a_3 j_3(\vec{x}') \vec{e}_3, \quad (3)$$

且

$$a_1 = \sqrt{\frac{\mu_{22}\mu_{33}}{\mu_{11}}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{33}}{\mu_{22}}}, \quad a_3 = \sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{22}}{\mu_{33}}},$$

$$R\mu = \left(\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}} \right)^{1/2},$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 分别是三个直角坐标轴的单位矢量; μ_{ij} 为磁导率张量矩阵 $[\mu_{ij}]$ 的元素; $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'$ 为源点 \vec{x}' 到观察点 \vec{x} 的矢径。

设有一个以 $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'$ 为变量的函数

$$f(\vec{R}) = f(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3 - x'_3),$$

当 $x > x'$ 时, 在 $x' = 0$ 附近, $f(\vec{R})$ 按泰勒级数展开为

$$f(\vec{R}) = f(\vec{x}) - \vec{x}' \cdot \nabla f(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\vec{x}) + \dots \quad (4)$$

如果电流分布于小区域 V' 内, 在 V' 内任取一点为坐标原点, V' 外的观察点 P 离 V' 足够远, 对于 V' 中的任何部分都有 $x \gg x'$ 。

如令 $f(\vec{R})$ 函数形式为

$$f(\vec{R}) = \frac{1}{R_\mu} = \left(\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}} \right)^{-1/2},$$

同理有

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{x_\mu} = \left(\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}} + \frac{x_3^2}{\mu_{33}} \right)^{-1/2}. \quad (5)$$

于是根据式 (4), 把 $1/R_\mu$ 在坐标原点附近展开成泰勒级数, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_\mu} &= \frac{1}{x_\mu} - \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{x_\mu} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{x_\mu} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

把上式代入式 (2), 便得

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \left(\frac{1}{x_\mu} - \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{x_\mu} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{x_\mu} + \dots \right) \vec{J}'(\vec{x}') dV'. \quad (7)$$

这就是在磁线性各向异性介质中磁向量势 \vec{A} 的多极展开式。

三、磁单极项

展开式 (7) 的第一项为

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}'(\vec{x}') dV'}{x_\mu}, \quad (8)$$

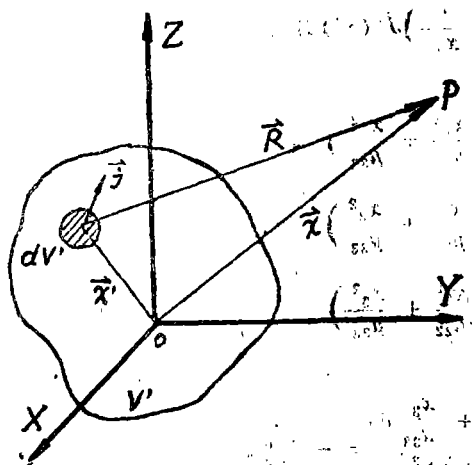


图1

令并矢 $\overset{\gg}{\mu}''$ 为

$$\overset{\gg}{\mu}'' = a_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \vec{e}_3, \quad (9)$$

则由式(1)、(3)得

$$\vec{J}'(\vec{x}') = \overset{\gg}{\mu}'' \cdot \vec{j}(\vec{x}'), \quad (10)$$

代入式(8), 得通过并矢表示的磁单极项

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{x}) = \frac{\overset{\gg}{\mu}''}{4\pi x_\mu} \cdot \iiint \vec{j}(\vec{x}') dV',$$

由稳恒电流连续性可得

$$\iiint \vec{j}(\vec{x}') dV' = \oint I d\vec{x}' = I \oint d\vec{x}' = 0.$$

因此, 磁单极项变为 $\vec{A}^{(0)}(\vec{x}) = 0$, 此式表明, 在磁各向异性多极展开中, 同样不含有磁单极项, 即不含有与点电荷对应的项。

四、磁 偶 极 项

展开式(7)的第二项为

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint \left(\vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{x_\mu} \right) \vec{J}'(\vec{x}') dV', \quad (11)$$

因有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{x_\mu} &= -\frac{x_1}{\mu_{11}} \left(-\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}} + \frac{x_3^2}{\mu_{33}} \right)^{-3/2}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{x_\mu} &= -\frac{x_2}{\mu_{22}} \left(\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}} + \frac{x_3^2}{\mu_{33}} \right)^{-3/2}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{x_\mu} &= -\frac{x_3}{\mu_{33}} \left(\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}} + \frac{x_3^2}{\mu_{33}} \right)^{-3/2}, \end{aligned}$$

故式(11)中 $1/x_\mu$ 的梯度为

$$\nabla \frac{1}{x_\mu} = -\frac{\frac{x_1}{\mu_{11}} \vec{e}_1 + \frac{x_2}{\mu_{22}} \vec{e}_2 + \frac{x_3}{\mu_{33}} \vec{e}_3}{\left(\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}} + \frac{x_3^2}{\mu_{33}} \right)^{3/2}} = -\frac{\vec{x}'_\mu}{x_\mu^3}, \quad (12)$$

式中

$$\vec{x}'_\mu = \frac{x_1}{\mu_{11}} \vec{e}_1 + \frac{x_2}{\mu_{22}} \vec{e}_2 + \frac{x_3}{\mu_{33}} \vec{e}_3. \quad (13)$$

以式(10)、(12)代入式(11), 得通过并矢表示的磁偶极项

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{\overset{\gg}{\mu}''}{4\pi} \cdot \iiint \left(\vec{x}' \cdot \frac{\vec{x}'_\mu}{x_\mu^3} \right) \vec{j}(\vec{x}') dV'.$$

由于稳恒电流体分布总可以分成许多闭合电流管, 如令 I 代表其中一个电流管的电流强度, 则用 $\vec{j}(\vec{x}') dV' = I d\vec{x}'$ 代入上式, 有

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{\overset{\gg}{\mu}'' I}{4\pi} \cdot \oint \vec{x}' \cdot \frac{\vec{x}'_\mu}{x_\mu^3} d\vec{x}',$$

利用等式

$$0 = \oint d[(\vec{x}' \cdot \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3})\vec{x}'] = \oint (\vec{x}' \cdot \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3})d\vec{x}' + \oint (d\vec{x}' \cdot \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3})\vec{x}'$$

把前式改写为

$$\begin{aligned} \vec{A}^{(1)}(\vec{x}) &= \frac{\mu'' I}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} [\oint (\vec{x}' \cdot \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3})d\vec{x}' - \oint (d\vec{x}' \cdot \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3})\vec{x}'] \\ &= \frac{\mu'' I}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \oint (\vec{x}' \times d\vec{x}') \times \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3} = \frac{\mu''}{4\pi} \cdot \vec{m} \times \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3}, \end{aligned} \quad (14)$$

式中

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint \vec{x}' \times d\vec{x}' \quad (15)$$

为电流圈的磁偶极矩。对于体电流分布，式(15)变为

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') dV' \quad (16)$$

以上结果表明，在磁各向异性介质中，磁向量势的主导项为磁偶极项。作为一级近似，可以把一个任意电流体系看成集中在原点的磁矩为 \vec{m} 的电流圈所激发的磁向量势。

当介质为线性各向同性时，有 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$ ，代入式(9)，得

$$\mu'' = \sqrt{\mu} (\vec{e}_1 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \vec{e}_3) = \sqrt{\mu} \vec{I},$$

式中 \vec{I} 为单位并矢。又由式(5)、(13)知此时

$$x_{\mu}^3 = \frac{x^3}{\mu^{3/2}}, \quad \vec{x}'_{\mu} = \frac{\vec{x}}{\mu}$$

並考虑到 $\vec{I} \cdot \vec{m} = \vec{m}$ ，于是由式(14)得

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{x}}{x^3},$$

上式与磁性各向同性介质中的已知结果一致。

对式(14)两边求旋度，得各向异性介质中的磁偶极场

$$\vec{B}^{(1)} = \nabla \times \vec{A}^{(1)} = \frac{\mu''}{4\pi} \cdot [(\nabla \cdot \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3}) \vec{m} - (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3}],$$

考虑到 \vec{x}'_{μ}/x_{μ}^3 的无旋性，于是

$$\nabla(\vec{m} \cdot \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3}) = (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3},$$

代入上式，得

$$\begin{aligned} \vec{B}^{(1)} &= -\frac{\mu''}{4\pi} \cdot \nabla(\vec{m} \cdot \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3}) + \frac{\mu''}{4\pi} \cdot (\nabla \cdot \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3}) \vec{m} \\ &= -\frac{\mu''}{4\pi} \cdot \nabla \varphi_m^{(1)} + \frac{\mu''}{4\pi} \cdot (\nabla \cdot \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3}) \vec{m}, \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $\varphi_m^{(1)} = \vec{m} \cdot \vec{x}'_{\mu}/4\pi x_{\mu}^3$ 。仅当介质为线性各向同性时，才有 $\nabla \cdot \vec{x}'_{\mu}/x_{\mu}^3 = 0$ ，当介质为线性各向异性时，由式(5)、(13)求得

$$\nabla \cdot \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3} = \frac{1}{x_{\mu}^5} \left[\frac{x_1^2}{\mu_{11}} \left(\frac{1}{\mu_{22}} + \frac{1}{\mu_{33}} - \frac{2}{\mu_{11}} \right) + \frac{x_2^2}{\mu_{22}} \left(\frac{1}{\mu_{11}} + \frac{1}{\mu_{33}} - \frac{2}{\mu_{22}} \right) + \frac{x_3^2}{\mu_{33}} \left(\frac{1}{\mu_{11}} + \frac{1}{\mu_{22}} - \frac{2}{\mu_{33}} \right) \right].$$

$\varphi_m^{(1)}$ 与电偶极矩在线性各向同性介质中所激发的标势相似。因此在磁各向异性介质中, 一个小电流圈仍可看作由一对正负磁荷组成的磁偶极子。显然, 用磁荷磁偶极子求磁场时, 需加上式(17)中的第二项才代表真实的磁场。

\vec{m} 沿任意方向时, 可由式(17)求得各向异性介质的磁偶极场。现假设 \vec{m} 沿 Z 轴方向, 即 $\vec{m} = m\vec{e}_3$, 由式(14)得

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{m\mu^{>>}}{4\pi} \cdot \vec{e}_3 \times \frac{\vec{x}'_{\mu}}{x_{\mu}^3}.$$

利用式(5)、(9)和(13), 上式可写成

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{m}{4\pi x_{\mu}^3} \left(\frac{x_1}{a_2} \vec{e}_2 - \frac{x_2}{a_1} \vec{e}_1 \right), \quad (18)$$

对上式两边求旋度, 得磁偶极场

$$\vec{B}^{(1)} = \frac{m}{4\pi x_{\mu}^5} \left[\frac{3x_3x_1}{a_2\mu_{33}} \vec{e}_1 + \frac{3x_3x_2}{a_1\mu_{33}} \vec{e}_1 + \left(\frac{x_{\mu}^2}{a_1} + \frac{x_{\mu}^2}{a_2} - \frac{3x_1^2}{a_2\mu_{11}} - \frac{3x_2^2}{a_1\mu_{22}} \right) \vec{e}_3 \right]. \quad (19)$$

如果磁矩 \vec{m} 沿 X 轴或 Y 轴, 其对应的向量势磁偶极项分别为

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{m}{4\pi x_{\mu}^3} \left(\frac{x_2}{a_3} \vec{e}_3 - \frac{x_3}{a_2} \vec{e}_2 \right), \quad (20)$$

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{m}{4\pi x_{\mu}^3} \left(\frac{x_3}{a_1} \vec{e}_1 - \frac{x_1}{a_3} \vec{e}_3 \right), \quad (21)$$

对应的磁偶极场分别为

$$\vec{B}^{(1)} = \frac{m}{4\pi x_{\mu}^5} \left[\left(\frac{x_{\mu}^2}{a_2} + \frac{x_{\mu}^2}{a_3} - \frac{3x_2^2}{a_3\mu_{22}} - \frac{3x_3^2}{a_2\mu_{33}} \right) \vec{e}_1 + \frac{3x_1x_2}{a_3\mu_{11}} \vec{e}_2 + \frac{3x_1x_3}{a_2\mu_{11}} \vec{e}_3 \right], \quad (22)$$

$$\vec{B}^{(1)} = \frac{m}{4\pi x_{\mu}^5} \left[\frac{3x_2x_1}{a_3\mu_{22}} \vec{e}_1 + \left(\frac{x_{\mu}^2}{a_1} + \frac{x_{\mu}^2}{a_3} - \frac{3x_1^2}{a_3\mu_{11}} - \frac{3x_3^2}{a_1\mu_{33}} \right) \vec{e}_2 + \frac{3x_2x_3}{a_1\mu_{22}} \vec{e}_3 \right], \quad (23)$$

表明各向异性介质对磁场分布的影响。

现假设在磁各向异性介质中, 有半径为 b , 通有电流 I 的圆线圈, 其磁矩大小 $m = I\pi b^2$, 沿 Z 轴方向。在大距离处, 有 $x_3 = z$, $x_1 = x_2 = 0$, 代入式(19), 得

$$\vec{B}^{(1)} = \mu_{33} \left(\sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}}} + \sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{11}}} \right) \frac{Ib^2}{4z^3} \vec{e}_3. \quad (24)$$

当介质为线性各向同性时, 有 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$, 于是上式化为 $\vec{B}^{(1)} = (\mu Ib^2/2z^3) \vec{e}_3$ 。这就是众所周知的, 在线性各向同性均匀磁介质中, 当 $z \gg b$ 时, 载流圆线圈在轴线上所激发的磁场。

应用式(19)或(24), 可求得在各向异性介质中偶极子的互感系数。如图2所示的两个半径分别为 b 和 c 的同轴平行圆线圈, 相距足够远, 即 $z \gg b$, $z \gg c$, 以致于可将它们当作偶极子处理。由式(24)得线圈1引起的, 通过线圈2的磁通量为

$$\phi_{21} = \mu_{33} \left(\sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}}} + \sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{11}}} \right) \frac{\pi I_1 b^2 c^2}{4z^3},$$

由互感定义, 得

$$M = \frac{\phi_{21}}{I_1} = \mu_{33} \left(\sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}}} + \sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{11}}} \right) \frac{\pi b^2 c^2}{4z^3},$$

当介质为线性各向同性时, 有 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$, 上式化为 $M = \mu \pi b^2 c^2 / 2z^3$, 其结果正是所预料的。

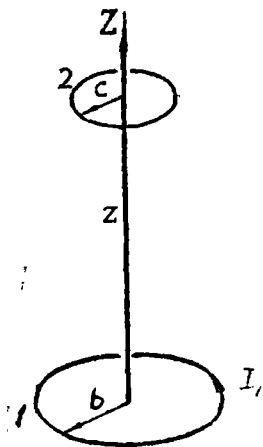


图2

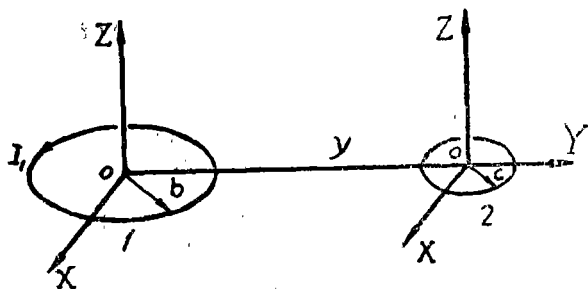


图3

如果两线圈处于如图3所示的同一平面XOY上, 因有 $x_1 = 0$, $x_2 = y$, $x_3 = 0$, 于是由式(19)可求得互感系数为

$$M = \mu_{22} \left(\frac{\mu_{22}}{\sqrt{\mu_{11}\mu_{33}}} - 2 \sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{33}}} \right) \frac{\pi b^2 c^2}{4y^3},$$

当介质为线性各向同性时, 有 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$, 上式化为通常情况下的互感系数 $M = \mu \pi b^2 c^2 / 4y^3$, 其结果也正是所预料的。

五、磁 四 极 项

展开式(7)的第三项为

$$\begin{aligned} \vec{A}^{(2)}(\vec{x}) &= \frac{\mu''}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \iiint \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{x_\mu} \vec{j}(\vec{x}') dV' \\ &= \frac{\mu''}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \iiint \vec{j}(\vec{x}') (\vec{x}' \cdot \nabla) (\vec{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{x_\mu} dV', \end{aligned} \quad (25)$$

用 $\vec{j}(\vec{x}') dV' = I d\vec{x}'$ 代入上式后, 就体电流分布中的一个电流管而言, 有

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{x}) = \frac{\mu''}{4\pi} \cdot \frac{I}{2} \oint d\vec{x}' (\vec{x}' \cdot \nabla) (\vec{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{x_\mu}$$

$$= \frac{\mu''}{4\pi} \cdot \frac{I}{4} \left[\oint (\vec{x}' \cdot \nabla) (\vec{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{x_\mu} d\vec{x}' + \oint (\vec{x}' \cdot \nabla) (\vec{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{x_\mu} d\vec{x}', \right]$$

利用全微分绕闭合回路的线积分等于零, 上式化为

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{x}) = \frac{\mu''}{4\pi} \cdot \frac{I}{4} \oint [(\vec{x}' \cdot \nabla) (\vec{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{x_\mu} d\vec{x}' - (d\vec{x}' \cdot \nabla) (\vec{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{x_\mu} \vec{x}'],$$

再由一个电流管恢复到以电流密度 $\vec{j}(\vec{x}')$ 作体分布的情况

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{x}) = \frac{\mu''}{4\pi} \cdot \frac{1}{4} \iiint [\vec{j}(\vec{x}') (\vec{x}' \cdot \nabla) (\vec{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{x_\mu} - (\vec{j}(\vec{x}') \cdot \nabla) (\vec{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{x_\mu} \vec{x}'] dV',$$

考虑下面恒等式

$$(\vec{j} \times \vec{x}') \times \nabla (\vec{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{x_\mu} = \vec{x}' (\vec{j} \cdot \nabla) (\vec{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{x_\mu} - \vec{j} (\vec{x}' \cdot \nabla) (\vec{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{x_\mu},$$

前式可写成

$$\begin{aligned} \vec{A}^{(2)}(\vec{x}) &= -\frac{\mu''}{4\pi} \cdot \frac{1}{4} \iiint (\vec{j} \times \vec{x}') \times \nabla (\vec{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{x_\mu} dV' \\ &= \frac{\mu''}{4\pi} \cdot \frac{1}{4} \iiint (\vec{x}' \times \vec{j}) \times \nabla \sum_{i=1}^3 x'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{x_\mu} dV' \\ &= \frac{\mu''}{4\pi} \cdot \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \vec{m}_i^{(2)} \times \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{x_\mu}, \end{aligned} \quad (26)$$

式中

$$\vec{m}_i^{(2)} = \frac{3}{2} \iiint (\vec{x}' \times \vec{j}) x'_i dV'. \quad (27)$$

因为

$$\begin{aligned} \vec{m}_i^{(2)} \times \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{x_\mu} &= \sum_{k=1}^3 (\vec{m}_i^{(2)} \times \nabla)_k \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{x_\mu} \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^3 e_{kjp} m_{ij}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{x_\mu} \right) \vec{e}_k, \end{aligned}$$

因而, $\vec{A}^{(2)}(\vec{x})$ 也可以通过 $m_{ij}^{(2)}$ 表为

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{x}) = \frac{\mu''}{4\pi} \cdot \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^3 e_{kjp} m_{ij}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{x_\mu} \vec{e}_k, \quad (28)$$

式中

$$m_{ij}^{(2)} = \frac{3}{2} \iiint x'_i (\vec{x}' \times \vec{j})_j dV', \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (29)$$

e_{kjp} 是反对称单位张量

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = -e_{132} = -e_{213} = -e_{321} = 1,$$

由式(27), 可定义一个并矢为

$$\begin{aligned} \vec{m}^{(2)} &= \vec{m}_1^{(2)} \vec{e}_1 + \vec{m}_2^{(2)} \vec{e}_2 + \vec{m}_3^{(2)} \vec{e}_3 \\ &= \frac{3}{2} \iiint \vec{x}' (\vec{x}' \times \vec{j}) dV', \end{aligned} \quad (30)$$

无疑,式(29)中的 $m_{ij}^{(2)}$ 就是并矢 $\vec{m}^{(2)}$ 的9个分量。把上式与电流圈磁矩的式(16)相比较可知, $\vec{m}^{(2)}$ 是比 \vec{m} 更高一级由电流分布的磁四极矩,因而由式(26)或式(28)表示的 $\vec{A}^{(2)}$ 就是由电流分布磁四极矩在磁各向异性介质中远处所激发的磁向量势。

现在把式(29)定义的 $m_{ij}^{(2)}$ 表成对 i, j 对称的形式

$$m_{ij}^{(2)} = \frac{3}{4} \iiint [x'_i (\vec{x}' \times \vec{j})_j + x'_j (\vec{x}' \times \vec{j})_i] dV',$$

因有下面恒等式

$$(\vec{x}' \times \vec{j}) \cdot \nabla' (x'_i x'_j) = (\vec{x}' \times \vec{j})_j x'_i + (\vec{x}' \times \vec{j})_i x'_j,$$

故前式可写成

$$m_{ij}^{(2)} = \frac{3}{4} \iiint (\vec{x}' \times \vec{j}) \cdot \nabla' (x'_i x'_j) dV',$$

又有下面恒等式

$$\nabla' \cdot [(\vec{x}' \times \vec{j}) x'_i x'_j] = \nabla' (x'_i x'_j) \cdot (\vec{x}' \times \vec{j}) + x'_i x'_j \nabla' \cdot (\vec{x}' \times \vec{j}).$$

应用高斯定理,前式进一步写成

$$m_{ij}^{(2)} = \frac{3}{4} \left[\oint (\vec{x}' \times \vec{j}) x'_i x'_j \cdot d\vec{\sigma}' - \iiint x'_i x'_j \nabla' \cdot (\vec{x}' \times \vec{j}) dV' \right],$$

第一项面积分的积分面是在无穷远,这个积分等于零。于是有

$$m_{ij}^{(2)} = -\frac{3}{4} \iiint x'_i x'_j \nabla' \cdot (\vec{x}' \times \vec{j}) dV', \quad (31)$$

如引入 ρ_m 符号

$$\rho_m = \frac{1}{4} \nabla' \cdot (\vec{j} \times \vec{x}'), \quad (32)$$

则式(31)最后表为

$$m_{ij}^{(2)} = \iiint 3\rho_m x'_i x'_j dV'. \quad (33)$$

由式(26)可算出磁四极矩 $\vec{m}^{(2)}$ 在磁各向异性介质中产生的磁场

$$\begin{aligned} \vec{B}^{(2)} &= \nabla \times \vec{A}^{(2)}(\vec{x}) = \frac{\mu''}{4\pi} \cdot \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \nabla \times (\vec{m}_i^{(2)} \times \nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{x_\mu}) \\ &= -\frac{\mu''}{24\pi} \cdot \sum_{i=1}^3 \nabla (\vec{m}_i^{(2)} \cdot \nabla) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{x_\mu} + \frac{\mu''}{24\pi} \cdot \sum_{i=1}^3 (\nabla^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{x_\mu}) \vec{m}_i^{(2)} \\ &= \mu'' \cdot \nabla \varphi_m^{(2)} + \frac{\mu''}{24\pi} \cdot \nabla^2 (\vec{m}^{(2)} \cdot \nabla) \frac{1}{x_\mu}, \end{aligned} \quad (34)$$

式中

$$\varphi_m^{(2)} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_{ij}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{x_\mu},$$

此式也可以用并矢表示

$$\varphi_m^{(2)} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{6} \vec{m}^{(2)} : \nabla \nabla \frac{1}{x_\mu}.$$

$\varphi_m^{(2)}$ 与电四极矩在线性各向同性介质中所激发的标势的公式完全相似。因此,如果把式(32)中的 ρ_m 比拟为与电荷相类似的磁荷,则 $m_{ij}^{(2)}$ 就是由正磁荷和负磁荷组成的体系的磁四极矩。具有 $m_{11}^{(2)}$ 分量的最简单的磁荷体系由 X 轴上两对正负磁荷组成,而具有 $m_{12}^{(2)}$ 分量的最简单的磁荷体系由 $X-Y$ 平面上两对正负磁荷组成等等。

至此可知,在磁各向异性介质中磁多极展开的第三项代表的仍是电流磁四极矩所激发的磁向量势。由磁向量势所得到的磁场,其中第一项可以化成位场。这相当于把电流四极矩看成由正负磁荷所组成的磁四极矩,因为这两者对求磁各向异性介质中各点的磁场是等效。当然,当用磁荷磁四极矩求磁场时,尚要加上式(34)中的第二项才代表真实的磁场。

更高级的磁多极矩很少用到,这里不予讨论。

参 考 文 献

- (1) 王建成、陈桑年,磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律及其应用,华侨大学学报(自然科学版),2(1989)。
- (2) 郭硕鸿,电动力学,高等教育出版社,(1985)。
- (3) Wangsness, R.K., *Electromagnetic Fields*, John Wiley & Sons, (1979)。
- (4) Seely, S., Poularikas, A.D., *Electromagnetics, Classical and Modern Theory and Applications*, Marcel Dekker Inc., (1979)。

Multipole Moment Expansion of the Magnetic Vector Potential in Anisotropic Media

Wang Jiancheng Chen Xinnian

Abstract

This paper deals with multipole moment expansion of the magnetic vector potential in linear anisotropic media. It points out the characteristic of the multipole moment expansion, from which the corresponding magnetic fields are derived. It provides a good example for studying magnetic fields in anisotropic media.

Key words anisotropy, magnetic vector potential, multipole moment, expansion