第11卷 第1期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol.11 No.1
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1990年1月　　(NATURAL SCIENCE)　　Jan. 1990

具有可靠性增长的三项分布概型参数的Bayes估计

陈 建 伟

(应用数学系)

摘　　要

本文研究具有可靠性增长的三项分布概型的参数Bayes估计，在先验分布为Beta分布，负对数Gama分布下，得到的主要结果有定理1、2．

关键词　可靠性增长，三项分布概型，贝叶斯估计，贝塔分布，负对数伽玛分布

一、引　言

系统可靠性的Bayes估计依赖测试的概型，参数的验前分布和系统的结构，文〔1〕讨论了具有可靠性增长的三项分布概型参数的Bayes估计，它是在验前分布为一种特定广义Beta分布时，给出系统最后一级参数的Bayes估计。这种验前分布的取法不甚合理，特别在实际应用中一般是办不到的。本文试图在验前分布为通常Beta分布及负对数Gamma分布时，分别给出具有可靠性增长系统的三项分布概型最后一级参数的Bayes估计。

设系统分m个阶段测试，系统在每一阶段测试是三项分布概型，第i阶段共进行x_i测试。其中有C_i次本质失效，有n_i-r_i次可归因失效，有r_i次成功，而且本质失效的概率为未知常数$p_0(0\leqslant p_0<1)$，成功的概率为Q_i，记$x=(x_1,\cdots,x_m)$，$Q=(Q_1,\cdots,Q_m)$。设每个阶段测试的结果相互独立，每次测试后对系统的可靠性加以改进，使得各级可靠性有所增长，即满足

$$0<Q_1<Q_2<\cdots<Q_m<(1-p_0).$$

二、Qm 的 Bayes 估计

1. Beta 验前分布

定理 1　假设

本文1988年3月15日收到.

（1）$0<Q_1<Q_2<\cdots<Q<(1-p_0)$；

（2）Q_i 具有 Beta 验前分布

$$B(Q_i|a_i,b_i)=\frac{Q_i^{a_i-1}(1-Q_i)^{b_i-1}}{B(a_i,b_i)},\quad a_i,b_i \text{ 为正整数},\ i=\overline{1,m}\ ;$$

（3）各阶段测试服从三项分布

$$f(x_i/Q_i)=\frac{x_i!}{c_i!r_i!(n_i-r_i)!}p_0^{c_i}Q_i^{r_i}(1-p_0-Q_i)^{n_i-r_i},\quad i=\overline{1,m}$$

则在二次损失下 Q_m 的 Bayes 估计为

$$\hat{Q}_m=\frac{1}{W_m}\Big\{\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\cdots\sum_{t_m=0}^{b_m-1}\sum_{h_1=s_1}^{g_1-t_{(1)}}\cdots\sum_{h_{m-1}=s_{m-1}-h_{m-2}}^{g_{m-1}-t_{(m-1)}}W(h_1,\cdots,h_{m-1},t_{(1)},\cdots,t_{(m)})$$

$$p_0^{t_{(m)}}(1-p_0)^{g_m-t_{(m)}+1}\left(\frac{s_m+h_{m-1}}{g_m-t_{(m)}+1}\right)\Big\},\tag{1}$$

其中

$$\begin{cases}s_i=r_i+a_i,\quad f_i=n_i-r_i+b_i,\quad t_{(r)}=t_1+t_2+\cdots+t_i,\\ s_{(i)}=s_1+\cdots+s_i,\quad f_{(i)}=f_1+\cdots+f_i,\quad g_i=s_{(i)}+f_{(r)}-i,\\ c_{j,t_j}=\binom{b_j-1}{t_j}\binom{g_j-t_{(j)}}{h_j}B(s_j+h_{j-1},f_j+g_{j-1}-h_{j-1}-t_{(j)}),\\ W(h_1,\cdots,h_{m-1};t_{(1)},\cdots,t_{(m)})=\binom{b_m-1}{t_m}\left(\prod_{j=1}^{m-1}C_j,t_j\right)B(S_m+h_{m-1},f_m\\ \qquad +g_{m-1}-h_{m-1}-t_{(m)})\end{cases}\tag{2}$$

$$W_m=\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\cdots\sum_{t_m=0}^{b_m-1}\sum_{h_1=s_1}^{g_1-t_{(1)}}\cdots\sum_{h_{m-1}=s_{m-1}-h_{m-1}}^{g_{m-1}-t_{(m-1)}}W(h_1,\cdots h_{m-1};\ t_{(1)},\cdots,t_{(m)})p_0^{t_{(m)}}(1-p_0)^{g_m-t_{(m)}}.$$

证　记 $G_m=[(Q_1,\cdots,Q_m);\ 0<Q_1<Q_2<\cdots Q_m<(1-p_0)]$，依假设知道，$x$ 关于 Q 的条件概率分布为

$$f(x/Q)=\prod_{i=1}^{m}f(x_i/Q_i)=\prod_{i=1}^{m}\frac{x_i!}{C_i!r_i!(n_i-r_i)!}p_0^{c_i}Q_i^{r_i}(1-p_0-Q_i)^{n_i-r_i},\tag{3}$$

$Q=Q_1,\cdots,Q_m)$ 的联合概率密度为

$$g(Q)=\begin{cases}\dfrac{\prod_{i=1}^{m}Q_i^{a_i-1}(1-Q_i)^{b_i-1}}{\int\cdots\int_{G_m}\prod_{i=1}^{m}Q_i^{a_i-1}(1-Q_i)^{b_i-1}dQ_1\cdots dQ_m},& Q\in G_m,\\ 0,& Q\overline{\in}G_m,\end{cases}\tag{4}$$

$$f(Q/x)=\frac{\sum_{i=1}^{m}Q_i^{a_i+r_i-1}(1-p_0-Q_i)^{n_i-r_i}(1-Q_r)^{b_i-1}}{\int\cdots\int_{G_m}\prod_{i=1}^{m}Q_i^{a_i+r_i-1}(1-p_0-Q_i)^{n_i-r_i}(1-Q_i)^{b_i-1}dQ_1\cdots dQ_m},\tag{5}$$

于是 Q_m 的验后条件密度为

$$f(Q_m/x)=\frac{\int_0^{Q_m}\int_0^{Q_{m-1}}\cdots\int_0^{Q_2}\prod_{i=1}^{m}Q_i^{s_i+r_i-1}(1-p_0-Q_i)^{n_i-r_i}(1-Q_i)^{b_i-1}dQ_1\cdots dQ_m}{\int\cdots\int_{G_m}\prod_{i=1}^{m}Q_i^{s_i+r_i-1}(1-p_0-Q_i)^{n_i-r_i}(1-Q_i)^{b_i-1}dQ_1\cdots dQ_m},\quad (6)$$

利用恒等式

$$\int_0^y x^{u-1}(1-p_0-x)^{v-1}dx=B(u,v)\sum_{j=u}^{u+v-1}\binom{u+v-1}{j}y^j(1-p_0-y)^{u+v-1+j},\quad (7)$$

$$(1-Q_i)^{b_i-1}=\sum_{t_i=0}^{b_i-1}\binom{b_i-1}{t_i}(1-p_0-Q_i)^{b_i-1-t_i}p_0^{t_i},\quad (8)$$

为了计算方便，先证$m=3$时式（1）成立，由式（6）得

$$f(Q_3/x)=\frac{Q_3^{s_3-1}(1-p_0-Q_3)^{n_3-r_3}(1-Q_3)^{b_3-1}\int_0^{Q_3}Q_2^{s_2-1}(1-p_0-Q_2)^{n_2-r_2}(1-Q_2)^{b_2-1}dQ_2}{\int_0^{1-p_0}Q_3^{s_3-1}(1-p_0-Q_3)^{n_3-r_3}(1-Q_3)^{b_3-1}dQ_3\int_0^{Q_3}Q_2^{s_2-1}(1-p_0-Q_2)^{n_2-r_2}}$$

$$\cdot\frac{\int_0^{Q_2}Q_1^{s_1-1}(1-p_0-Q_1)^{n_1-r_1}(1-Q_1)^{b_1-1}dQ_1}{(1-Q_2)^{b_2-1}dQ_2\int_0^{Q_2}Q_1^{s_1-1}(1-p_0-Q_1)^{n_1-r_1}(1-Q_1)^{b_1-1}dQ_1},\quad (9)$$

上式分子中的

$$\begin{aligned}I_1&\triangleq\int_0^{Q_2}Q_1^{s_1-1}(1-p_0-Q_1)^{n_1-r_1}(1-Q_1)^{b_1-1}dQ_1\\
&=\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\binom{b_1-1}{t_1}\int_0^{Q_2}Q_1^{s_1-1}(1-p_0-Q_1)^{n_1-r_1+b_1-t_1-1}p_0^{t_1}dQ_1\\
&=\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\binom{b_1-1}{t_1}p_0^{t_1}B(s_1,f_1-t_1)\sum_{h_1=s_1}^{s_1+f_1-t_1-1}\binom{s_1+f_1-1-t_1}{h_1}Q_2^{h_1}(1-p_0-Q_2)^{s_1+f_1-t_1-1+h_1}\\
&=\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\sum_{h_1=s_1}^{g_1-t_1}\binom{b_1-1}{t_1}\binom{g_1-t_1}{h_1}B(s_1,f_1-t_1)p_0^{t_1}Q_2^{h_1}(1-p_0-Q_2)^{g_1-t_1-h_1}\\
&=\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\sum_{h_1=s_1}^{g_1-t_1}C_{1_{t_1}}p_0^{t_1}Q_2^{h_1}(1-p_0-Q_2)^{g_1-t_1-h_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2&\triangleq\int_0^{Q_3}Q_2^{s_2-1}(1-p_0-Q_2)^{n_2-r_2}(1-Q_2)^{b_2-1}I_1dQ_2\\
&=\sum_{t_2=0}^{b_2-1}\binom{b_2-1}{t_2}p_0^{t_2}\int_0^{Q_3}Q_2^{s_2-1}(1-p_0-Q_2)^{n_2-r_2+b_2-t_2-1}I_1dQ_2\\
&=\sum_{t_2=0}^{b_2-1}\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\sum_{h_1=s_1}^{g_1-t_1}C_{1_{t_1}}\binom{b_2-1}{t_2}p_0^{t_1+t_2}\int_0^{Q_3}Q_2^{s_2+h_1-1}(1-p_0-Q_2)^{f_2+g_1-h_1-t_{(2)}-1}dQ_2\\
&=\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\sum_{t_2=0}^{b_2-1}\sum_{h_1=s_1}^{g_1-t_1}C_{1_{t_1}}\binom{b_2-1}{t_2}p_0^{t_{(2)}}\sum_{h_2=s_2+h_1}^{g_2-t_{(2)}}\Big\{\binom{g_2-t_{(2)}}{h_2}B(s_2+h_1,f_2+g_1-h_1-t_{(2)})\end{aligned}$$

$$\cdot Q_3^{h_2}(1-p_0-Q_3)^{g_2-t_{(2)}-h_2}\Big\}$$

$$=\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\sum_{t_2=0}^{b_2-1}\sum_{h_1=s_1}^{f_1-t_{(1)}}\sum_{h_2=s_2+h_1}^{f_2-t_{(2)}}\Big\{c_{1,t_1}c_{2,t_2}p_0^{t_{(2)}}Q_3^{h_2}(1-p_0-Q_3)^{g_2-t_{(2)}-h_2}\Big\}.$$

所以式(9)的

$$分子=Q_3^{s_3-1}(1-p_0-Q_3)^{n_3-r_3}(1-Q_3)^{b_3-1}I_2$$

$$=\sum_{t_3=0}^{b_3-1}\binom{b_3-1}{t_3}p_0^{t_3}Q_3^{s_3-1}(1-p_0-Q_3)^{n_3-r_3+b_3-t_3-1}I_2$$

$$=\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\sum_{t_2=0}^{b_2-1}\sum_{t_3=0}^{b_3-1}\sum_{h_1=s_1}^{f_1-t_{(1)}}\sum_{h_2=h_1+s_2}^{f_2-t_{(2)}}c_{1,t_1}c_{2,t_2}p_0^{t_{(3)}}\binom{b_3-1}{t_3}Q_3^{s_3+h_2-1}$$

$$\cdot(1-p_0-Q_3)^{g_2+f_3-t_{(3)}-h_2-1}$$

$$=\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\sum_{t_2=0}^{b_1-1}\sum_{t_3=0}^{b_3-1}\sum_{h_1=s_1}^{f_1-t_{(1)}}\sum_{h_3=h_1+s_2}^{f_2-t_{(2)}}\Big\{c_{1,t_2}c_{2,t_2}\binom{b_3-1}{t_3}B(s_3+h_2,g_2+f_3-h_2-t_{(3)})p_0^{t_{(3)}}$$

$$\cdot(1-p_0)^{g_3-t_{(3)}}\frac{Q_3^{s_3+h_2-1}(1-p_0-Q_3)^{g_2+f_3-t_{(3)}-h_2-1}}{B(s_3+h_2,g_2+f_3-h_2-t_{(3)})(1-p_0)^{g_3-t_{(3)}}}\Big\}$$

$$=\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\sum_{t_2=0}^{b_2-1}\sum_{t_3=0}^{b_3-1}\sum_{h_2=s_1}^{f_1-t_{(1)}}\sum_{h_2=h_1+s_2}^{f_2-t_{(2)}}\Big\{W(h_1,h_2,t_{(1)},t_{(2)},t_{(3)})p_0^{t_{(3)}}(1-p_0)^{g_3-t_{(3)}}$$

$$\cdot b(Q_3/p_0,s_3+h_2,f_3+g_2-h_2-t_{(3)})\Big\},\tag{10}$$

其中，记号 $b(Q_3/p_0,s_3+h_2,f_3+g_2-h_2-t_{(3)})=Q_3^{s_3+h_2-1}(1-p_0-Q_3)^{g_2+f_3-s_{(3)}-h_2-1}[B(s_3+h_2,g_2+f_3-h_2-t_{(3)})]^{-1}$，由此得到式(9)的分母为

$$W_3\triangleq\int_0^{1-p_0}\Big\{\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\sum_{t_2=0}^{b_2-1}\sum_{t_3=0}^{b_3-1}\sum_{h_1=s_1}^{f_1-t_{(1)}}\sum_{h_2=h_1+s_2}^{f_2-t_{(2)}}W(h_1,h_2,t_{(1)},t_{(2)},t_{(3)})p_0^{t_{(3)}}(1-p_0)^{g_3-t_{(3)}}$$

$$\cdot b(Q_3/p_0,s_3+h_{(2)},f_3+g_2-h_2-t_{(3)})\Big\}dQ_3$$

$$=\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\sum_{t_2=0}^{b_1-1}\sum_{t_3=0}^{b_3-1}\sum_{h_2=s_1}^{f_1-t_{(1)}}\sum_{h_2=h_1+s_2}^{f_2-t_{(2)}}W(h_1,h_2,t_{(1)},t_{(2)},t_{(3)})p_0^{t_{(3)}}(1-p_0)^{g_3-t_{(3)}},\tag{11}$$

故有

$$f(Q_3/x)=W_3^{-1}\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\sum_{t_2=0}^{b_2-1}\sum_{t_3=0}^{b_3-1}\sum_{h_1=s_1}^{f_1-t_{(1)}}\sum_{h_2=h_1+s_2}^{f_2-t_{(2)}}\Big\{W(h_1,h_2,t_{(1)},t_{(2)},t_{(3)})p_0^{t_{(3)}}$$

$$\cdot(1-p_0)^{g_3-t_{(3)}}b(Q_3/p_0,s_3+h_2,f_3+g_2-h_2-t_{(3)})\Big\},\tag{12}$$

由于广义Beta分布的一阶原点矩

$$\int_0^{1-p_0}xb(x/p_0,u,v)dx=(1-p_0)\frac{u}{u+v},\tag{13}$$

于是在二次损失下 Q_3 的Bayes估计为

$$\hat{Q}=E(Q_3/x)=\int_0^{1-p_0}Q_3f(Q_3/x)dQ_3$$

$$=W_3^{-1}\sum_{t_1=0}^{b_1-1}\sum_{t_2=0}^{b_2-1}\sum_{t_3=0}^{b_3-1}\sum_{h_1=s_1}^{g_1-t_{(1)}}\sum_{h_2=h_1+s_2}^{g_2-t_{(2)}}W(h_1,h_2,t_{(1)},t_{(2)},t_{(3)})$$

$$p_0^{t_{(3)}}(1-p_0)^{g_3-t_{(3)}+1}\left(\frac{s_3+h_2}{g_3-t_{(m)}+1}\right),$$

重复应用恒等式（7）、（8）及归纳法，即可完成定理的证明。

系 1 当 $a_i=b_i=1$ 时 $(i=\overline{1,m})$，$Q_i(i=\overline{1,m})$ 的验前分布化为均匀分布，此时，$\hat{Q}_m$ 表达式中不含未知参数。

2．负对数Gamma验前分布

定理 2 假设

（1）$0<Q_1<Q_2<\cdots<Q_m<(1-p_0)$

（2）Q_i 的验前分布

$$\pi(Q_i)=\frac{\beta_i^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)}(-\ln Q_i)^{\alpha_i-1}Q_i^{\beta_i-1}\triangleq L\Gamma(Q_i/\alpha_i,\beta_i),\quad \beta_i>0,\alpha_i \text{ 为正整数},$$

$$0<Q_i<1(i=\overline{1,m}).$$

（3）各级测试服从三项分布

$$f(x_i/Q_i)=\frac{x_i!}{C_i!r_i!(n_i-r_i)!}p_0^{c_i}Q_i^{r_i}(1-p_0-Q_i)^{n_i-r_i},\qquad i=\overline{1,m},$$

则在二次损失下 Q_m 的 Bayes 估计为

$$\hat{Q}_m=\frac{1}{W_mp_0}\left\{\sum_{t_1=0}^{v_1}\cdots\sum_{t_m=1}^{v_m}\sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1}\cdots\sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha_{(m-1)}-1}W(t_1j_1,\cdots,t_{m-1}j_{m-1},p_0)(1-p_0)^{-t_{(m)}}\right.$$

$$\left.\cdot(-1)^{t_m}\binom{v_m}{t_m}\sum_{j_m=0}^{\alpha_{(m)}-1}\frac{(g_{(m)}+1)^{j_m-\alpha_{(m)}}(-\ln(1-p_0))^{j_m}(1-p_0)^{g_{(m)}+1}}{\Gamma(j_m+1)}\right\},\qquad(14)$$

其中符号与算号如下：

$$\begin{cases} u_i=\beta_i+r_i,\quad v_i=n_i-r_i,\quad g_{(1)}=g_1=u_1+t_1,\quad g_{(i)}=g_{(i-1)}+u_i+t_i,\quad i=\overline{1,m}, \\ \alpha_{(1)}=\alpha_1,\quad \alpha_{(i)}=\alpha_i+j_{i-1},\quad c_i=\binom{v_i}{t_i}(-1)^{t_i}g_{(i)}^{j_i-\alpha_i}\dfrac{\Gamma(\alpha_{(i+1)})}{\Gamma(j_i+1)}, \\ W(t_1j_1,\cdots t_{m-1}j_{m-1},p_0)=\prod_{i=1}^{m-1}c_i,\qquad t_{(i)}=t_1+\cdots+t_i, \\ W_{mp_0}=\sum_{t_1=0}^{v_1}\cdots\sum_{t_{m-1}=0}^{v_{m-1}}\sum_{j_1=1}^{\alpha_1-1}\sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha_{(m-1)}-1}\left\{W(t_1j_1,\cdots,t_{m-1}j_{m-1},p_0)(1-p_0)(1-p_0)^{-t_{(m)}}\right. \\ \left.\cdot\sum_{t_m=0}^{r_m}\sum_{j_m=0}^{\alpha_{(m)}-1}(-1)^{t_m}\binom{v_m}{t_m}\dfrac{(g_{(m)}+1)^{j_m-\alpha_{(m)}}(-\ln(1-p_0))^{j_m}(1-p_0)^{g_m}}{\Gamma(j_{m+1})}\right\}, \end{cases}\qquad(15)$$

证 先证 $m=3$ 时成立，由已知得

$$f(Q/x)=\frac{\prod_{i=1}^{3}Q_i^{r_i+\beta_i-1}(1-p_0-Q_i)^{n_i-r_i}(-\ln Q_i)^{\alpha_i-1}}{\int\cdots\int_{G_3}\prod_{i=1}^{3}Q_i^{r_i+\beta_i-1}(1-p_0-Q_i)^{n_i-r_i}(-\ln Q_i)^{\alpha_i-1}dQ_1dQ_2dQ_3},$$

于是 Q_3 的验后条件密度为

$$f(Q_3/x)=\frac{Q_3^{u_3-1}(1-p_0-Q_3)^{v_3}(-\ln Q_3)^{a_3-1}\int_0^{Q_3}Q_2^{u_2-1}(1-p_0-Q_2)^{v_2}(-\ln Q_2)^{a_2-1}dQ_2}{\int_0^{1-p_0}Q_3^{u_3-1}(1-p_0-Q_3)^{v_3}(-\ln Q_3)^{a_3-1}dQ_3\int_0^{Q_3}Q_2^{u_2-1}(1-p_0-Q_2)^{v_2}(-\ln Q_2)^{a_2-1}}$$

$$\cdot\frac{\int_0^{Q_2}Q_1^{u_1-1}(1-p_0-Q_1)^{v_1}(-\ln Q_1)^{a_1-1}dQ_1}{dQ_2\int_0^{Q_2}Q_1^{u_1-1}(1-p_0-Q_1)^{v_1}(-\ln Q_1)^{a_1-1}dQ_1},\tag{16}$$

为了计算上式积分，可证下列恒等式

$$\int_0^{Q_i}(-\ln Q_{i-1})^{a-1}Q_{i-1}^{g-1}dQ_{i-1}=g^{-a}\Gamma(\alpha)\sum_{j_i=0}^{a-1}\frac{g^{j_i}}{\Gamma(j_i+1)}(-\ln Q_i)^{j_i}Q_i^{g},\tag{17}$$

$$(1-p_0-Q_i)^{v_i}=\sum_{t_i=0}^{v_i}\binom{v_i}{t_i}Q_i^{t_i}(1-p_0)^{v_i-t_i}(-1)^{t_i},\qquad i=\overline{1,m},\tag{18}$$

由此得式（16）分子中的

$$I_1\triangleq\int_0^{Q_2}Q_1^{u_1-1}(1-p_0-Q_1)^{v_1}(-\ln Q_1)^{a_1-1}dQ_1$$

$$=\sum_{t_1=0}^{v_1}\binom{v_1}{t_1}\int_0^{Q_2}Q_1^{u_1+t_1-1}(-\ln Q_1)^{a_1-1}dQ_1(1-p_0)^{v_1-t_1}(-1)^{t_1}$$

$$=\sum_{t_1=0}^{v_1}\binom{v_1}{t_1}(-1)^{t_1}(1-p_0)^{v_1-t_1}\sum_{j_1=0}^{a_1-1}\frac{(u_1+t_1)^{j_1-a_1}}{\Gamma(j_1+1)}(-\ln Q_2)^{j_1}Q_2^{u_1+t_1}\Gamma(\alpha_{(1)})$$

$$=\sum_{t_1=0}^{v_1}\sum_{j_1=0}^{a_{(1)}-1}(-1)^{t_1}\binom{v_1}{t_1}g_{(1)}^{j_1-a_1}\frac{(1-p_0)^{u_1-t_1}}{\Gamma(j_1+1)}(-\ln Q_2)^{j_1}Q_2^{g_{(1)}}\Gamma(\alpha_{(1)})$$

$$=\sum_{t_1=0}^{v_1}\sum_{j_1=0}^{a_{(1)}-1}c_1(1-p_0)^{v_1-t_1}(-\ln Q_2)^{j_1}Q_1^{g_{(1)}}\frac{\Gamma(\alpha_{(1)})}{\Gamma(\alpha_{(2)})},$$

$$I_2\triangleq\int_0^{Q_3}Q_2^{u_2-1}(1-p_0-Q_2)^{v_2}(-\ln Q_2)^{a_2-1}I_1dQ_2$$

$$=\sum_{t_2=0}^{v_2}\binom{v_2}{t_2}(-1)^{t_2}(1-p_0)^{v_2-t_2}\int_0^{Q_3}Q_2^{u_2+t_2-1}(-\ln Q_2)^{a_2-1}I_1dQ_2$$

$$=\sum_{t_1=0}^{v_1}\sum_{t_2=0}^{v_2}\sum_{j_1=0}^{a_{(1)}-1}c_1\binom{v_2}{t_2}(-1)^{t_2}(1-p_0)^{v_1+v_2-t_1-t_2}\frac{\Gamma(\alpha_{(1)})}{\Gamma(\alpha_{(2)})}$$

$$\cdot\sum_{j_2=0}^{a_{(2)}-1}\frac{g_{(2)}^{j_2-a(2)}\Gamma(\alpha_{(2)})}{\Gamma(j_2+1)}(-\ln Q_3)^{j_2}Q_3^{g_{(2)}}$$

$$=\Gamma(\alpha_{(1)})(1-p_0)^{v_1+v_2}\sum_{t_1=0}^{v_1}\sum_{t_2=0}^{v_2}\sum_{j_1=0}^{a_{(1)}-1}\sum_{j_2=0}^{a_{(2)}-1}\left\{c_1\binom{u_2}{t_2}(-1)^{t_2}g_{(2)}^{j_2-a(2)}\frac{\Gamma(\alpha_{(3)})}{\Gamma(j_2+1)}\right.$$

$$\left.\cdot(1-p_0)^{-t_{(2)}}\frac{(-\ln Q_3)^{j_2}Q_3^{g_{(2)}}}{\Gamma(\alpha_{(3)})}\right\}=$$

$$=\Gamma(\alpha_{(1)})(1-p_0)^{v_1+v_2}\sum_{t_1=0}^{v_1}\sum_{t_2=0}^{v_2}\sum_{j_1=0}^{\alpha_{(1)}-1}\sum_{j_2=0}^{\alpha_{(2)}-1}c_1c_2\frac{(-\ln Q_3)^{j_2}(Q_3^{g_{(2)}}(1-p_0)^{-t_{(2)}}}{\Gamma(\alpha_{(3)})},$$

所以式(16)的

分式$=Q_3^{u_3-1}(1-p_0-Q_3)^{v_3}(-\ln Q_3)^{\alpha_3-1}I_2$

$$=\sum_{t_3=0}^{v_3}\binom{v_3}{t_3}(-1)^{t_3}(1-p_0)^{v_3-t_3}Q_3^{u_3+t_3-1}(-\ln Q_3)^{\alpha_3-1}I_2$$

$$=\Gamma(\alpha_{(1)})(1-p_0)^{v_1+v_2+v_3}\Big\{\sum_{t_1=0}^{v_1}\sum_{t_2=0}^{v_2}\sum_{j_1=0}^{\alpha_{(1)}-1}\sum_{j_2=1}^{\alpha_{(2)}-1}W(t_1j_1,t_2j_2,p_0)\sum_{t_3=0}^{v_3}\binom{v_3}{t_3}(-1)^{t_3}$$

$$\cdot(1-p_0)^{-t_{(3)}}\frac{g_{(3)}^{\alpha(3)}Q_3^{g_{(3)}-1}(-\ln Q_3)^{\alpha_{(3)}-1}}{g_{(3)}^{\alpha(3)}\Gamma(\alpha_3)}\Big\}$$

$$=\Gamma(\alpha_{(1)})(1-p_0)^{v_1+v_2+v_3}\sum_{t_1=0}^{v_1}\sum_{t_2=0}^{v_2}\sum_{j_1=0}^{\alpha_{(1)}-1}\sum_{j_3=0}^{\alpha_{(2)}-1}W(t_1j_1t_2j_2,p_0)\sum_{t_3=0}^{v_3}\binom{v_3}{t_3}(-1)^{t_3}$$

$$\cdot\frac{(1-p_0)^{-t_{(3)}}}{g_{(3)}^{\alpha(3)}}L\Gamma(Q_3/\alpha_{(3)},g_{(3)}),\tag{19}$$

对式(16)两边从0到$(1-p_0)$积分得

$$W'_{mp_0}=\Gamma(\alpha_{(1)})(1-p_0)^{v_1+v_2+v_3}\Big\{\sum_{t_1=0}^{r_1}\sum_{t_2=0}^{v_1}\sum_{j_1=0}^{\alpha_{(1)}-1}\sum_{j_2=0}^{\alpha_{(2)}-1}W(t_1j_1t_2j_2)\sum_{t_3=0}^{v_3}\binom{v_3}{t_3}(-1)^{t_3}$$

$$\cdot(1-p_0)^{-t_{(3)}}\int_0^{1-p_0}\frac{Q_3^{\cdots-1}(-\ln Q_3)^{\alpha_{(3)}-1}}{\Gamma(\alpha_{(3)})}dQ_3\Big\}$$

$$=\Gamma(\alpha_{(1)})(1-g_0)^{v_1+v_2+v_3}\Big\{\sum_{t_1=0}^{v_1}\sum_{t_2=0}^{v_2}\sum_{j_1=0}^{\alpha_{(1)}-1}\sum_{j_2=0}^{\alpha_{(2)}-1}W(t_1j_1t_2j_2)\sum_{t_3=0}^{v_3}\binom{v_3}{t}(-1)^{t_3}$$

$$\cdot(1-p_0)^{-t_{(3)}}\sum_{j_3=0}^{\alpha_{(3)}-1}\frac{g_{(3)}^{j_3-\alpha(3)}}{\Gamma(j_3+1)}(-\ln(1-p_0))^{j_3}(1-p_0)^{g_{(3)}}\Big\},$$

$$=\Gamma(\alpha_{(1)})(1-p_0)^{v_1+v_2+v_3}W_{mp_0},\tag{20}$$

故有

$$f(Q/x)=\frac{1}{W_{mp_0}}\Big\{\sum_{t_1=0}^{v_1}\sum_{t_2=0}^{v_2}\sum_{j_1=0}^{\alpha_{(1)}-1}\sum_{j_2=0}^{\alpha_{(2)}-1}W(t_1j_1t_2j_2,p_0)\sum_{t_3=0}^{v_3}\binom{v_3}{t_3}(-1)^{t_3}$$

$$\cdot(1-p_0)^{-t_3}\frac{\Gamma(Q_3/\alpha_{(3)},g_{(3)})}{g_{(3)}^{\alpha(3)}}.\tag{21}$$

于是在二次损失下Q_3的Bayes估计为

$$\hat{Q}_3=E(Q_3/x)=\int_0^{1-p_0}Q_3f(Q_3/x)dQ_3$$

$$=\frac{1}{W_{mp_0}}\Big\{\sum_{t_1=0}^{v_1}\sum_{t_2=0}^{v_2}\sum_{j_1=0}^{\alpha_{(1)}-1}\sum_{j_2=0}^{\alpha_{(2)}-1}W(t_1j_1t_2j_2,p_0)\sum_{t_3=0}^{v_3}\binom{v_3}{t_3}(-1)^{t_3}$$

$$\cdot (1-p_0)^{-t_{(3)}}\int_0^{1-p_0}\frac{Q_3^{g(3)}(-\ln Q_3)^{\alpha(3)-1}}{\Gamma(\alpha_{(3)})}dQ_3\Big\}$$

$$=\frac{1}{W_{mp_0}}\Big\{\sum_{t_1=0}^{v_1}\sum_{t_2=0}^{v_2}\sum_{j_1=0}^{\alpha(1)}\sum_{j_2=0}^{\alpha(2)-1}W(t_1j_1t_2j_2,p_0)\sum_{t_3=0}^{v_3}\sum_{j_3=0}^{\alpha(3)-1}(-1)^{t_3}\binom{v_3}{t_3}$$

$$\cdot (1-p_0)^{-t_{(3)}}\frac{(g_{(m)}+1)^{j_m-\alpha(m)}}{\Gamma(j_m+1)}(-\ln(1-p_0))^{j_m}(1-p_0)^{g(m)+1}\Big\}.$$

重复应用恒等式(17)，(18)及归纳法，即可完成定理的证明。

系 2 当$\alpha_i=0$，$\beta_i=0$时，可得$Q_i(i=\overline{1,m})$的无信息验前分布，即可选取：$\pi(Q_i)=(-\ln Q_i)^{-1}Q_i^{-1}$，$(i=\overline{1,m})$，此时$\hat{Q}_m$的表达式中不含有未知参数。

系 3 当$p_0=0$时，各级测试服从二项分布，此时$x_i=n_i$，$c_i=0\,(i=\overline{1,m})$，则$Q_m$的Bayes估计为

$$\hat{Q}_m=\frac{1}{W_m}\Big\{\sum_{t_1=0}^{v_1}\cdots\sum_{t_m=0}^{v_m}\sum_{j_1=0}^{\alpha(1)}\cdots\sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha(m-1)-1}W(t_1j_1\cdots t_{m-1}j_{m-1})\binom{v_m}{t_m}(-1)^{t_m}(g_{(m)+1})^{-\alpha(m)}\Big\},$$

式中符号与标号和文[2]中定理3完全相同，故文[2[定理3可作为本文的一个推论。

参　考　文　献

〔1〕陈世基，具有可靠性增长的二、三项分布概型参数Bayes估计的注记，福建师范大学学报(自然科学版)，1(1983)。

〔2〕吴绍敏，二项抽样模型下$r/N(G)$系统可靠性增长的Bayes估计，华侨大学学报(自然科学版)，1(1988)。

〔3〕Martz, H. F., and Waller, R. A., *Bayesian Reliability Analysis*, John Wiley & Sons, (1982).

Parammetric Bayes Estimation of Trinomial Distribution with Growing Reliability

Chen Jianwei

Abstract

This paper deals with parammetric Bayes estimate of trinomial distribution with growing reliabiliy. With the assumption that prior probability distribution being beta-distribution or negative logarithmic gamma-distribution, the important results are summarized to be theorems 1 and 2.

Key words growing reliability, trinomial distribution, Bayes estimition, Beta-distribution, negativez logarithmic Gamma-distribution.