第11卷 第1期 华侨大学学报自然科学版 Vol.11 No.1
1990年1月 JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Jan. 1990

GAOR方法的收敛性

曾文平

(应用数学系)

摘要

本文导出GAOR迭代矩阵谱半径的表达式，给出了在L矩阵情况下GAOR与GSOR迭代矩阵谱半径之间的关系，并在系数矩阵为L矩阵，H矩阵，Hermitian正定矩阵，严格对角占优矩阵及不可约对角占优矩阵的条件下，讨论了GAOR迭代的收敛性，进一步扩充了文〔2〕、〔3〕的结果.

关词键 收敛，迭代法，谱半径，GAOR方法

一、引言

为了解线性方程组

$$Ax=b \quad A\in C^{n\cdot n},\ \det A\neq 0,\ \text{且}x,\ b\in C^n \tag{1}$$

A. Hadjidimos于1978年提出了AOR迭代法[1]；1983年又研究了解线性方程组(1)的基本迭代法的推广[2]；1986年，他和A. Psimarni及A. Yeyios又进一步研究了推广的AOR迭代法(generalized accelerated over-relaxation method，简称为GAOR方法)的收敛性，讨论了系数矩阵为L矩阵、M矩阵及实对称正定矩阵时GAOR迭代的收敛性[3]. 数值例子表明，由于具有两个迭代参数ω,r及两个对角矩阵D_1,D_2，GAOR迭代确实可以加快AOR迭代的收敛速度，特别对具有零对角元的系数矩阵A的方程组(1)也有效，因而是一种值得重视和研究的迭代法。

本文导出GAOR迭代的谱半径的表述式，给出在L矩阵情况下GAOR迭代与GSOR迭代的谱半径之间的关系，并在系数矩阵为L矩阵，H矩阵及Hermitian正定矩阵，严格对角占优矩阵，不可约弱对角占优矩阵的情况下，讨论了GAOR方法的收敛性，进一步扩充了文[2]、[3]的结果。

解线性方程组(1)的GAOR迭代法为

本文1988年3月2日收到。

$$X^{(m+1)}=[D_1-r(D_2+C_L)]^{-1}[(1-\omega)D_1+(\omega-r)(D_2+C_L)+\omega(D_3+C_U)]X^{(m)}$$
$$+\omega[D_1-r(D_2+C_L)]^{-1}b \qquad (m=0,1,2,\cdots), \tag{2}$$

其中 D_1，D_2，D_3 为满足下述关系的对角矩阵：

$$D_1-D_2-D_3=D_A=\mathrm{diag}(A), \qquad \det D_1\neq 0; \tag{3}$$

$-C_L$ 和 $-C_U$ 为 A 的严格下三角和严格上三角阵。$\omega,r\in R$ 分别为松弛参数和加速参数，且 $\omega\neq 0$，$\det(D_1-rD_2)\neq 0$。

GAOR 方法的迭代矩阵为

$$L_{\omega,r}\equiv L_{\omega,r}(D_1,D_2)=[D_1-r(D_2+C_L)]^{-1}[(1-\omega)D_1+(\omega-r)(D_2+C_L)+\omega(D_3+C_U)]$$
$$=(I-rL)^{-1}[(I-\omega D)+(\omega-r)L+\omega U]=I-\omega(D_1-rD_2-rC_L)^{-1}A, \tag{4}$$

其中

$$D=(D_1-rD_2)^{-1}D_A, \qquad L=(D_1-rD_2)^{-1}C_L, \qquad U=(D_1-rD_2)^{-1}C_U. \tag{5}$$

当参数偶（ω，r）取不同值及对角阵 D_1，D_2 取不同形式时，便可得到与各种不同的迭代法：

1）当 $D_1=D_A$，$D_2=D_3=0$ 时，它退化为通常的 AOR 迭代法，

2）当 $\omega=1$，$r=0$ 时，为推广的 Jacobi 迭代（GJ），其迭代矩阵为

$$L_{1,0}(D_1,D_2)\equiv B=I-D_1^{-1}A=I-D+L+U, \tag{6}$$

其中

$$D=D_1^{-1}DA, \qquad L=D_1^{-1}C_L, \qquad U=D_1^{-1}C_U. \tag{7}$$

3）当 $\omega=1$，$r=1$ 时，为推广的 Gauss-Seidel 迭代（GGS），其迭代矩阵为

$$L_{1,1}(D_1,D_2)\equiv L_{1,1}=(I-L)^{-1}(I-D+U), \tag{8}$$

其中

$$D=(D_1-D_2)^{-1}D_A, \qquad L=(D_1-D_2)^{-1}C_L, \qquad U=(D_1-D_2)^{-1}C_U. \tag{9}$$

4）当 $\omega=r$ 时，为推广的 SOR 迭代（GSOR），其迭代矩阵为

$$L_{\omega,\omega}(D_1,D_2)\equiv L_{\omega,\omega}=I-\omega(D_1-\omega D_2-\omega C_L)^{-1}A$$
$$=(I-\omega L)^{-1}(I-\omega D+\omega U), \tag{10}$$

其中

$$D=(D_1-\omega D_2)^{-1}D_A, \qquad L=(D_1-\omega D_2)^{-1}C_L, \qquad U=(D_1-\omega D_2)^{-1}C_U. \tag{11}$$

二、GAOR 迭代和 GSOR 迭代谱半径之间的关系

引理 1 如果 λ 和 ν 分别是 GAOR 迭代矩阵 $L_{\omega,r}$ 和参数为 r 的 GSOR 迭代矩阵 $L_{r,r}$ 的特征值，则有

$$\lambda=S\nu+(1-S), \tag{12}$$

其中 $S=\omega/r$

证 因

$$L_{\omega,r}=(I-rL)^{-1}[(I-\omega D)+(\omega-r)L+\omega U]$$
$$=(\omega/r)(I-rL)^{-1}[(I-rD+rU)-(1-r/\omega)(I-rL)]$$
$$=(\omega/r)L_{r,r}-(\omega/r-1)I=SL_{r,r}+(1-S)I,$$

从而 $\lambda=S\nu+(1-S)$。

定理 1 当 $0<\omega\leqslant r$ 时，若 $\rho(L_{r,r})<1$，则 $\rho(L_{\omega,r})<1$；反之，当 $0<r\leqslant\omega$ 时，若 $\rho(L_{\omega,r})<1$，则 $\rho(L_{r,r})<1$。其中 $\rho(G)$ 是矩阵 G 的谱半径。

证 令 $\nu=qe^{i\theta}$，$q\geqslant0$，θ 是实数，由 $\rho(L_{r,r})<1$ 知 $0\leqslant q<1$，由引理1的式(12)知

$$|\lambda|^2=[sq\cos\theta+(1-s)]^2+[sq\sin\theta]^2=(sq)^2+(1-s)^2+2(1-s)sq\cos\theta$$
$$\leqslant(sq)^2+(1-s)^2+2(1-s)sq=[sq+(1-s)]^2<1,$$

所以有 $\rho(L_{\omega,r})<1$。另一部分同理可证，从略。

推论 1 当 $0<\omega\leqslant r$ 时，若 GSOR 迭代（参数为 r）收敛，则 GAOR 迭代也收敛；反之当 $0<r\leqslant\omega$ 时，若 GAOR 迭代收敛，则 GSOR 迭代（参数为 r）也收敛。

由此可见，若已知 GSOR 迭代（参数为 r）收敛，就只需研究 $0\leqslant r<\omega$ 时 GAOR 方法的收敛性。

定义 1 若 $A=D_A-C_L-C_U$ 有 $D_A>0$，且 C_L，$C_U\geqslant0$，则称 A 为 L 矩阵。对于 L 矩阵，我们有如下的

定理 2 若 $A=D_A-C_L-C_U$ 为 L 矩阵，且 $D_2,D_3\geqslant0$，则当 $0<\omega\leqslant1$，$0<r\leqslant1$ 时 GAOR 迭代的谱半径 $\rho(L_{\omega,r})$ 和参数为 r 的 GSOR 迭代的谱半径 $\rho(L_{r,r})$ 之间满足如下关系

$$\rho(L_{\omega,r})=s\rho(L_{r,r})+(1-s)=1-s[1-\rho(L_{r,r})],\qquad(s=\omega/r),\tag{13}$$

或

$$\rho(L_{r,r})=[\rho(L_{\omega,r})+s-1]/S=1-s'[1-\rho(L_{\omega,r})],\qquad(s'=1/s=r/\omega).\tag{14}$$

证 因设 $D_2,D_3\geqslant0$，$0<r\leqslant1$，故 $D_1-rD_2\geqslant D_1-D_2\geqslant D_1-D_2-D_3=D_A>0$，又 $L=(D_1-rD_2)^{-1}C_L\geqslant0$，所以对任何 $0<r\leqslant1$ 有

$$(I-rL)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(rL)^k\geqslant0,$$

又当 $0<r\leqslant1$ 时有 $D_1-rD_2-rD_A\geqslant D_A-rD_A=(1-r)D_A\geqslant0$，故

$$I-rD+rU=(D_1-rD_2)^{-1}(D_1-rD_2-rD_A+rC_U)\geqslant0,$$

所以

$$L_{r,r}=(I-rL)^{-1}(I-rD+rU)\geqslant0.\tag{15}$$

为证明 $L_{\omega,r}\geqslant0$，分两种情况讨论：

1）当 $0<\omega\leqslant r\leqslant1$ 时，有 $0<s=\omega/r\leqslant1$，从而由引理1及式(15)知

$$L_{\omega,r}=sL_{r,r}+(1-s)I\geqslant0.\tag{16}$$

2）当 $0<r\leqslant\omega\leqslant1$ 时，因 $D_1-rD_2\geqslant D_1-D_2\geqslant D_1-D_2-D_3=D_A>0$，且 $L=(D_1-rD_2)^{-1}\cdot C_L\geqslant0$，$U=(D_1-rD_2)^{-1}C_U\geqslant0$，从而当 $\omega\geqslant r>0$，$(\omega-r)L\geqslant0$，$\omega U\geqslant0$，又因 $D_1-rD_2-\omega D_A\geqslant D_1-D_2-D_A=D_3\geqslant0$，故

$$I-\omega D=(D_1-rD_2)^{-1}(D_1-rD_2-\omega D_A)\geqslant0.$$

所以，当 $0<r\leqslant\omega\leqslant1$ 时也有

$$L_{\omega,r}=(I-rL)^{-1}[(I-\omega D)+(\omega-r)L+\omega U]\geqslant0.\tag{17}$$

综合1），2）可知，对任意 $0<\omega\leqslant1$，$0<r\leqslant1$ 的 ω 及 r 有 $L_{\omega,r}\geqslant0$。

从而，由文[4]定理2.1知，当 $L_{r,r}$ 与 $L_{\omega,r}$ 不可约时均有一正实特征值 $\gamma^*=\rho(L_{r,r})$

>0 及 $\lambda^* = \rho(L_{\omega,r})>0$。所以，当 $0<\omega\leqslant 1$，$0<r\leqslant 1$ 时有 $\rho(L_{\omega,r}) = s\rho(L_{r,r}) + (1-s)$。证毕。

注意到式（13）的右边等式便得：

推论 2 在定理 2 的条件下，GAOR 迭代收敛当且仅当 GSOR 迭代(参数为 r）收敛。

三、$L_{\omega,r}$ 的谱半径 $\rho(L_{\omega,r})$ 的表达式

定理 3 设 A，$D_1 - rD_2$ 为 Hermitian 矩阵，$L_{\omega,r}V = \lambda V$，其中 $|\lambda| = \rho(L_{\omega,r})$，$V \neq 0$，则

$$\rho^2(L_{\omega,r}) = \frac{(\langle GV,V\rangle - \omega\langle AV,V\rangle)^2 + [(r/2)\langle SV,V\rangle]^2}{\langle GV,V\rangle^2 + [(r/2)\langle sV,V\rangle]^2}, \tag{18}$$

或

$$\rho^2(L_{\omega,r}) = 1 - \omega\langle AV,V\rangle \frac{2\langle GV,V\rangle - \omega\langle AV,V\rangle}{\langle GV,V\rangle^2 + [(r/2)\langle SV,V\rangle]^2}, \tag{19}$$

其中

$$\left.\begin{array}{ll} H = C_L + C_U = C_L + C_L^* & \text{为 Hermitian 矩阵；} \\ S = C_L - C_U = C_L + C_L^* & \text{为反 Hermitian 矩阵；} \\ G = D_1 - rD_2 - (r/2)H = (1/2)(2D_1 - 2rD_2 - rD_A + rA) & \text{为 Hermitian 矩阵。} \end{array}\right\} \tag{20}$$

证 由 $L_{\omega,r}V = \lambda V$ 得

$$\begin{aligned}(D_1 - rD_2 - rC_L)\lambda V \\ = [(1-\omega)D_1 + (\omega - r)(D_2 + C_L) + \omega(D_3 + C_U)]V,\end{aligned} \tag{21}$$

或

$$(D_1 - rD_2 - rC_L)\lambda V = [D_1 - rD_2 - \omega D_A + (\omega - r)C_L + \omega C_U]V. \tag{22}$$

由式（20）可得

$$\begin{cases} C_L = (1/2)(H+S), \quad C_U = (1/2)(H-S), \\ A = D_A - C_L - C_U = D_A - H = D_1 - D_2 - D_3 - H. \end{cases}$$

将它们代入式（22）得

$$[D_1 - rD_2 - (r/2)(H+S]\lambda V = [D_1 - rD_2 - (r/2)(H+S) - \omega A]V. \tag{23}$$

证 $D_1 - rD_2 - (r/2)H = G$，则上式化为

$$\lambda[G - (r/2)S]V = [G - (r/2)S - \omega A]V, \tag{24}$$

所以

$$\lambda = \frac{\langle GV,V\rangle - \omega\langle AV,V\rangle - (r/2)\langle SV,V\rangle}{\langle GV,V\rangle - (r/2)\langle SV,V\rangle}, \tag{25}$$

因 $D_1 - rD_2$，H 为 Hermitian 矩阵，故 G 为 Hermitan 矩阵，又 A 为 Hermitian 矩阵，S 为反 Hermitian 矩阵，于是便得式（18）。证毕。

推论 3 设 A 为 Hermitian 正定阵，若 $\omega>0$，则当 G 是 Hermitian 正定时，GAOR方法收敛；当 G 是 Hermitian 负定时，GAOR 方法发散。若 $\omega<0$，则当 G 是 Hermitian 正定时，GAOR 方法发散，当 G 是 Hermitian 负定时，GAOR 方法收敛。

注意到 $2G-\omega A=2D_1-2rD_2-rH-\omega A=2D_1-2rD_2-rD_A+(r-\omega)A$，于是式(19)可改写为

$$\rho^2(L_{\omega,r})=1-\omega\langle AV,V\rangle\frac{\langle(2D_1-2rD_2-rD_A)V,V\rangle+(r-\omega)\langle AV,V\rangle}{\langle GV,V\rangle^2+[(r/2)\langle SV,V\rangle]^2}. \qquad (26)$$

由此不难推出：

推论 4 如果 A 是实对称正定矩阵，若

$$M=(1/\omega)[2D_1-2rD_2-rD_A-(\omega-r)A] \qquad (27)$$

是正定的，则 GAOR 方法收敛；若 M 负定，则 GAOR 方法发散。它包含了文〔3〕中的定理1。

推论 5 若 A 是 Hermitian 矩阵，$D_A>0$，$\varepsilon_j=2R_ed_{1j}/(2R_ed_{2j}+a_{jj})$，$(j=1,2,3,\cdots,n)$，并且满足下列条件之一：

1）$0<\omega\leqslant r$，且 $\mathrm{Re}d_{1j}>r(\mathrm{Re}d_{2j}+a_{jj}/2)$，$(j=1,2,\cdots,n)$；

2）$0<\omega\leqslant r$，且 $D_1+D_1^*>0$，$D_2+D_2^*>-D_A$，且 $r\in(0,\min\varepsilon_j)$；

3）$0<\omega\leqslant r$，且 $D_1+D_1^*<0$，$D_2+D_2^*<-D_A$，且 $r\in(\max\varepsilon_j,+\infty)$；

4）$0<\omega\leqslant r$，且 $D_1+D_1^*>0$，$D_2+D_2^*<-D_A$；

5）$r\leqslant\omega<0$，且 $\mathrm{Re}d_{1j}<r(\mathrm{Re}d_{2j}+a_{jj}/2)$，$(j=1,2,\cdots,n)$；

6）$r\leqslant\omega<0$，且 $D_1+D_1^*>0$，$D_2+D_2^*<-D_A$，且 $r\in(-\infty,\ \min\varepsilon_j)$；

7）$r\leqslant\omega<0$，且 $D_1+D_1^*<0$，$D_2+D_2^*>-D_A$，且 $r\in(\max\varepsilon_j,\ 0)$；

8）$r\leqslant\omega<0$，且 $D_1+D_1^*<0$，$D_2+D_2^*<-D_A$，

则 GAOR 方法收敛，当且仅当 A 是正定矩阵。其中 d_{1j}，d_{2j} 及 $a_{jj}(j=1,2,3,\cdots,n)$ 分别为对角阵 D_1，D_2 及系数矩阵 A 的对角元素。

推论5推广了文〔2〕的定理6（对 GSOR 迭代及文〔3〕的定理1的推论1（对实对称正定阵的 GAOR 迭代）。

四、H-矩 阵

定义 2 如果矩阵 $B=D_A^{-1}(C_L+C_U)$ 的谱半径 $\rho(|B|)<1$，则称矩阵 $A=D_A-C_L-C_U$ 为 H 矩阵。

定义 3[5] 如果矩阵 A 非奇异且 $A^{-1}\geqslant0$，则称 A 为单调矩阵。

定理 4 若 $A=D_A-C_L-C_U$ 是 H-矩阵，则当 $0\leqslant r\leqslant\omega\leqslant1$（$\omega\neq0$），$D_2,D_3\geqslant0$，$D_A\geqslant0$ 时 GAOR 方法收敛

证 令 $Q=I-r|L|$，则当 $r>0$ 时有

$$\begin{aligned}|(I-rL)^{-1}|&=|I+rL+(rL)^2+\cdots+(r^{N-1}L^{N-1})|\\&\leqslant I+r|L|+r^2|L|^2+\cdots+r^{N-1}|L|^{N-1}=(I-r|L|)^{-1}=Q^{-1},\end{aligned} \qquad (28)$$

又 $D_1-rD_2\geqslant D_1-D_2\geqslant D_1-D_2-D_3=D_A>0$，$D_1=D_A+D_2+D_3>0$，$D_1-rD_2-\omega D_A=D_1-rD_2-\omega(D_1-D_2-D_3)=(1-\omega)D_1+(\omega-r)D_2+\omega D_3>0$，故

$$I-\omega D=(D_1-rD_2)^{-1}(D_1-rD_2-\omega D_A)\geqslant0.$$

又因 $0\leqslant r\leqslant\omega$，则若令

$$R_1=I-\omega D++(\omega-r)|L|+\omega|U|$$

显然有

$$|I-\omega D+(\omega-r)L+\omega U|\leqslant R_1, \tag{29}$$

于是

$$L_{\omega,r}=|(I-rL)^{-1}[I-\omega D+(\omega-r)L+\omega U]|\leqslant Q^{-1}R_1, \tag{30}$$

所以

$$\rho(L_{\omega,r})\leqslant\rho(Q^{-1}R_1). \tag{31}$$

而由正规分裂知 $\rho(Q^{-1}R_1)<1$ 的充要条件为

$$Q-R_1=(I-r|L|)-[I-\omega D+(\omega-r)|L|+\omega U]=\omega[D-|L|-|U|]$$
$$=\omega(D_1-rD_2)^{-1}[D_A-|C_L|-|C_U|]=\omega(D_1-rD_2)^{-1}D_A(I-|B|)$$

为单调的。而由定义3知，这当且仅当 $\rho(|B|)<1$ 时成立，因 A 为 H 阵，故此条件满足。

由文〔4〕引理2.5可得：

推论 6 设 A 是严格对角占优或不可约对角占优，则当 $0\leqslant r\leqslant\omega\leqslant1$（$\omega\neq0$），$D_2,D_3\geqslant0$，$D_A>0$ 时，GAOR 方法收敛。

参考文献

〔1〕Hadjidimos,A, Accelerated Overrelaxation Method,*Math.Comp*.32, (1978), 149—157.

〔2〕Hadjidimos.A, On the Generalization of the Basic Iterative Methods for the Solution of Linear Systems,*In ternat. J. Comput. Math*, 14(1983), 355—369.

〔3〕Hadjidimos. A, Psimarni.A and Yeyios.A, On the Convergence of Some Generalized Iterative Method, *LAA*, 75(1986), 117—132.

〔4〕Varga, R, S. 著，蒋尔雄等译，矩阵迭代分析，上海科技出版社，(1966).

〔5〕Yoang, D, M, *Iterative Solution of Large Linear Systems*,Academic Press, New York and London, (1971).

〔6〕曾文平，关于AOR方法的收敛性，华侨大学学报（自然科学版），1(1985), 15—22.

〔7〕曾文平，关于Jacobi, Gauss—Seidel, SOR和AOR迭代法的收敛性，高等学校计算数学学报，4(1985), 327—339.

〔8〕陈培贤，AOR方法的收敛性，计算数学，5，1(1983), 66—67.

Convergence of GAOR Method

Zeng Wenping

Abstract

GAOR method, generalized accelerated overrelaxation method, is an iterative method proposed by A. Hadjidimos for solving the linear equations $Ax=b$. [1] Its convergence was discussed by him under the conditions that the coefficient matrices being L natrix, M matrix and real symmetric positive definite matrix. (2,3) For further generalizing these results, an expression for spectral radius of GAOR iterative matrices was derived in this paper, and the relationship between the spectral radius of GAOR and that of GSOR was given in the presence of L matrix. The convergence of GAOR iteration was discussed here under the condition that the coefficieat matrices being L matrix, H, matris, Hermitian positive definite matrix, strictly diagonally dominant matrix, and irreducible diagonally dominant matrix.

Key words convergence, iteration method, spectral radius, generalized accelerated overrelaxation method