第10卷 第4期 华侨大学学报自然科学版 Vol.10 No.4
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1989年10月 (NATURAL SCIENCE) Oct. 1989

关于Orlicz空间中多项式最佳逼近的唯一性定理

石 川

(华东工学院)

摘 要

本文用Orlicz空间的几何理论研究了Orlicz空间中多项式最佳逼近的唯一性问题，对Orlicz空间具有唯一的最佳逼近多项式提出了充分条件.

关键词 Orlicz空间，最佳逼近，唯一性

一、定 义

定义1 N函数$M(u)$严格凸的是指：对任何两不相同的实数u_1，u_2均有

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)<\frac{1}{2}[M(u_1)+M(u_2)].$$

定义2 L_M^* 关于范数$\|\cdot\|_M$严格凸是指：

$$S_1=\{u|\ u\in L_M^*,\quad \|u\|_M=1\}$$

中任意两不相同的u_1与u_2皆有

$$\left\|\frac{u_1+u_2}{2}\right\|_M<1.$$

定义3 $L_{(M)}^*$ 关于范数$\|\cdot\|_{(M)}$ 严格凸是指：

$$S_2=\{u\ |u\in L_{(M)}^*,\ \|u\|_{(M)}=1\}$$

中任意两不相同的u_1与u_2皆有

$$\left\|\frac{u_1+u_2}{2}\right\|_{(M)}<1.$$

定义4 L_M^* 称为具有多项式最佳逼近的唯一性是指：对 L_M^* 中任一线性无关的函数系列

本文1987年1月7日收到.

$\{\varphi_j(x)\}_1^n$ 和任一$f(x)\in L_M^*$，$f(x)$ 关于 $\{\varphi(x)\}_2^n$的最佳逼近多项式是唯一的。

定义5 $L^*_{(M)}$ 称为具有多项式最佳逼近的唯一性是指：对 $L^*_{(M)}$ 中任一线性无关 的函数系 $\{\varphi_j(x)\}_1^n$和任一$f(x)\in L^*_{(M)}$，$f(x)$ 关于 $\{\varphi_j(x)\}_1^n$的最佳逼近多项式是唯一的。

二、定　　理

定理1 若L_M^*关于范数$\|\cdot\|_M$严格凸，则 L_M^*具有多项式最佳逼近的唯一性。

证 设 $\{\varphi_j(x)\}_1^n$ 为L_M^*中任一线性无关的函数系，$f(x)$为 L_M^*中任一函数，若

$$f(x)=\sum_{j=1}^{N}c_j\varphi_j(x),$$

则显然有

$$E_n(f)=\inf_{(a_j)}\|f(x)-\sum_{j=1}^{N}a_j\varphi_j(x)\|_M=0,$$

此时最佳逼近多项式就是它自身，当然是唯一的，故唯一性只需对

$$f(x)\in\Phi=\{u(x)\,|u(x)=\sum_{j=1}^{N}a_j\varphi_j(x),\ \ a_j\in R'\}$$

证明，此时由于Φ为闭集（文[5]之引理1），故有

$$E_n(f)=\inf_{(a_j)}\|f(x)-\sum_{j=1}^{N}a_j\varphi_j(x)\|_M>0.$$

若$f(x)$有两个不同的最佳逼近多项式

$$P^1(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^{(1)}\varphi_j(x)\text{及}P^2(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^{(2)}\varphi_j(x),$$

即

$$\|f(x)-P^1(x)\|_M=E_n(f)=\|f(x)-P^2(x)\|_M. \tag{1}$$

因为

$$\frac{f(x)-P^1(x)}{E_n(f)}\in S_1,\quad \frac{f(x)-P^2(x)}{E_n(f)}\in S_1,$$

並且由$P^1(x)\neq P^2(x)$而知$\dfrac{f(x)-P^1(x)}{E_n(f)}\neq\dfrac{f(x)-P^2(x)}{E_n(f)}$，由已知 L_M^* 关于范数$\|\cdot\|$严格凸，于是就有

$$\left\|\frac{1}{2}\left(\frac{f(x)-P^1(x)}{E_n(f)}+\frac{f(x)-P^2(x)}{E_n(f)}\right)\right\|_M<1,$$

即

$$\left\|\frac{f(x)-1/2(P^1(x)+P^2(x))}{E_n(f)}\right\|_M<1,$$

故得

$$\|f(x)-\frac{1}{2}(P^1(x)+P^2(x))\|_M<E_n(f), \tag{2}$$

然而$\frac{1}{2}(P^1(x)+P^2(x))$仍为一多项式，由$E_n(f)$的定义又有

$$\|f(x)-\frac{1}{2}(P^1(x)+P^2(x)\|_M\geqslant E_n(f), \tag{3}$$

式（3）与式（2）相矛盾，说明$P^1(x)\neq P^2(x)$是不能成立的。

定理2 若N函数$M(u)$严格凸，则由$M(u)$定义的L_M^*具有多项式最佳逼近的唯一性。

证 因为$M(u)$严格凸L_M^*关于范数$\|\cdot\|_M$也必严格凸[3]，定理1推出L_M^*具有多项式最佳逼近的唯一性。

推论1 $L_G^P(1<p<+\infty)$具有多项式最佳逼近的唯一性。

证 设 $M(u)=\frac{|u|^p}{p}$，因为

$$M(u)''=(p-1)(u)^{p-2}>0,\ \ u>0,$$
$$M(u)''=(p-1)(-u)^{p-2}>0,\ \ u<0,$$

这说明$M(u)$的图象不含有直线段，故$M(u)$是严格凸的，由定理2知L_M^*具有多项式最佳逼近的唯一性。又因

$$\|u\|_M=C\|u\|_P \quad （C为常数）[1],$$

所以

$$\min_{(a_j)}\|f(x)-\sum_j a_j\varphi_j(x)\|_P=\min_{(a_j)}\frac{1}{C}\|f(x)-\sum_j a_j\varphi_j(x)\|_M$$
$$=\frac{1}{C}\min_{(a_j)}\|f(x)-\sum_j a_j\varphi_j(x)\|_M.$$

由此知对任一线性无关的函数系$\{\varphi_i(x)\}_1^n$以及任一$f(x)\in L_M^*$(也必$f(x)\in L_G^P$)，$f(x)$在L_M^*中的最佳逼近多项式与在L_G^P中的最佳逼近的多项式是同一的，故若$f(x)$在L_G^P中不具有多项式最佳逼近的唯一性。则L_M^*也同样不具有唯一性，但这是不可能的。

定理3 若 $L_{(M)}^*$关于范数$\|\cdot\|_{(M)}$严格凸，则$L_{(M)}^*$具有多项式最佳逼近的唯一性。

证 在定理1的证明中将范数$\|\cdot\|_M$换成范数$\|\cdot\|_{(M)}$而推导过程不作任何改变，就得本定理之证明。

定理4 若N函数$M(u)$满足条件：（i）$M(u)\in\Delta_2$；（ii）$M(u)$严格凸。则由$M(u)$定义的$L_{(M)}^*$具有多项式最佳逼近的唯一性。

证 在已知条件下$L_{(M)}^*$关于范数$\|\cdot\|_{(M)}$是严格凸的[3]，再由定理3便知结论成立。

定理5 若N函数$M(u)$严格凸，则在由$M(u)$定义的L_M^*中，对于任一$f(x)\in L_M^*$存在着代数

多项式、三角多项式、线性有限元函数、连续可微的分段三次Hermite 多项式的唯一最佳逼近。

证　由定理 2 及文[5]中之定理 3，定理 4，定理 5，定理 6 使知结论成立。

定理6　若N函数 $M(u)$满足条件：(i) $M(u)\in\Delta_2$；(ii) $M(u)$严格凸。则在由 $M(u)$定义的 $L^*_{(M)}$ 中对任一 $f(x)\in L^*_{(M)}$ 存在着代数多项式、三角多项式、线性有限元函数、连续可微的分段三次Hermite多项式的唯一最佳逼近。

参　考　文　献

〔1〕M.A.克拉斯诺西尔斯基，M. A.，鲁季茨基，К. Б.（吴从炘译），凸函数和奥尔里奇空间，科学出版社，(1962)，69.

〔2〕吴从炘、王廷辅，奥尔里奇空间及其应用，黑龙江科学技术出版社，(1983).

〔3〕吴从炘、王廷辅、陈述涛、王玉文，Orlicz空间几何理论，哈尔滨工业大学出版社，(1986).

〔4〕沈燮昌，多项式最佳逼近的实现，上海科学技术出版社，(1984).

〔5〕石川，关于Orlicz空间中多项式最佳逼近的存在定理，华侨大学学报(自然科学版)，3(1988).

〔6〕晋尔兹，M.H.（赵根榕译），样条分析，上海科学技术出版社，(1979).

Uniqueness Theorem with Respect to Optimal Approximation of Polynomial in Orlicz Space

Shi Chuan

Abstract

This paper deals with uniqueness problem on optimal approximation of polynomial in Orlicz Space. It is a study based on geometrical theory of Orlicz space.

It gives sufficient conditions for Orlicz space to have unique optimal approximation of polynmial.

Key words　Orlicz space, best approximation, uniqueness