第10卷 第4期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol.10 No.4
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1989年10月　　(NATURAL SCIENCE)　　Oct.1989

关于合作-竞争经济对策模型*

王 志 雄

(应用数学系)

摘　要

本文提出有实际意义的合作-竞争经济对策模型，并研究其平衡策略和稳定策略的关系，给出稳定策略及绝对稳定策略存在的条件.

关键词　对策，合作，竞争，平衡策略，稳定策略

一、问题的提出

对策论主要研究处于竞争（对抗）状态下的诸方（局中人），应该如何选择各自的策略，才能使自己的收益尽可能大. 但这并不排除对策中有合作：各局中人考虑到应该与哪一些局中人合作，形成一个联盟，才能使自己从这个联盟中分得尽可能大的收益.

至今为止的对策论，对于合作和竞争这两个问题，大多是分开讨论的. 然而，在实际的经济对策模型中，策略的合作成分与竞争成分往往揉合一体. 比如广告，产品广告扩大该产品在市场上的总销量，使生产同类产品的诸厂家（以一定比例）都能获益；商标广告仅扩大该商标产品在市场上的销量，减少其它商标产品的销量. 前者为广告中合作成分，后者为竞争成分. 又如科研经费中的基础理论研究基金和应用开发基金；部门如交通工具制造业，交通运输业，能源工业等之间，有既合作、又竞争的关系. 因而，从理论上研究合作-竞争经济对策模型，是有其实际意义的.

二、静态模型的建立

设局中人集$N=\{1, 2, \cdots, n\}$（$n\geqslant 2$），局中人i的纯策略集D_i是$[0, +\infty)\times[0, +\infty)$的子集，策略$(x_i, y_i)\in D_i$中，$x_i$为局中人$i$的策略的合作分量，$y_i$为其竞争分量. 局中人$i$的支付函数为$\hat{f}_i(x_1, \cdots x_n;\ y_1, \cdots y_n)$，其目标是最大化函数值$\hat{f}_i(\cdots)$.

基本假设1　$D_i=\{(x_i, y_i):\ 0\leqslant x_i,\ y_i,\ x_i+y_i\leqslant d_i\}$，即$D_i$为三角形区域. 其实际意

本文1988年11月3日收到.
* 本课题为国家自然科学基金会资助项目.

义：每个局中人可支配的总资金是有限的。

基本假设2　诸支付函数$\hat{f}_i(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots y_n)$对每个变量$x_1, \cdots, x_n$是递增的；在$\sum_{i=1}^{n} x_i$固定的情况下，关于$y_i$是递增的，但对一切$y_j(j \neq i)$是递减的。它基于策略的合作分量$x_1, \cdots x_n$和竞争分量$y_1, \cdots, y_n$的实际意义。

定理1　在基本假设1、2下，对一切$i \in N$，局中人i的最佳策略$(x_i^*, \; y_i^*)$必须满足条件$x_i^* + y_i^* = d_i, \; x_i^* \geqslant 0, \; y_i^* \geqslant 0$。

证　对一切$(x_i, y_i) \in D_i$，若$x_i + y_i < d_i$，令$\bar{x}_i = x_i, \bar{y}_i = d_i - x_i$，由基本假设1，$\bar{x}_i \geqslant 0$，$\bar{y}_i > y_i \geqslant 0$，$\bar{x}_i + \bar{y}_i = d_i$，故$(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in D_i$。由基本假设 2，

$$\hat{f}_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_{i-1}, \bar{y}_i, y_{i+1}, \cdots, y_n) > \hat{f}_i(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n),$$

故(x_i, y_i)不是局中人i的最佳策略。证毕。

由定理1，进一步假设：支付函数为$f_i(y_1, \cdots, y_n)$，其中$y_i \in [0, d_i]$。

三、对策的稳定性问题

如果对一切$i \in N, f_i(y_1, \cdots, y_n)$关于各变量是连续的，记$T = \prod_{i=1}^{n} [0, d_i]$，对一切$y = (y_1, \cdots, y_n) \in T$，构造策略组序列$\{y^{(k)} = (y_1^{(k)}, \cdots, y_n^{(k)})\}$如下

$$y_i^{(0)} = y_i,$$

$$f_i(y_1^{(k)}, \cdots, y_{i-1}^{(k)}, y_i^{(k+1)}, y_{i+1}^{(k)}, \cdots, y_n^{(k)}) = \max_{0 \leqslant y_i \leqslant d_i} f_i(y_1^{(k)}, \cdots, y_{i-1}^{(k)}, y_i, y_{i+1}^{(k)}, \cdots, y_n^{(k)}) \tag{1}$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots; \; i = 1, 2, \cdots, n).$$

我们称$y^{(k+1)}$是策略组$y^{(k)}$的最佳针对性策略组。其实际意义：在任一阶段，每一个局中人都是针对前一阶段，各局中人采取的策略，选择一个对自己最有利的策略。

由f_i的连续性，对一切初始策略组选择$y \in T$，最佳针对性策略组序列$\{y^{(k)}\}$存在。如果这个序列收敛，设收敛到$y^* \in T$，则称y^*为关于初始策略组y的一个稳定策略组。

定理2　$y^* = (y_1^*, \cdots, y_n^*)$是稳定策略组，当且仅当它是平衡策略组。

证　对一切$i \in N$，由式(1)得

$$f_i(y_1^{(k)}, \cdots, y_{i-1}^{(k)}, y_i, y_{i+1}^{(k)}, \cdots, y_n^{(k)}) \leqslant f_i(y_1^{(k)}, \cdots, y_{i-1}^{(k)}, y_i^{(k+1)}, y_{i+1}^{(k)}, \cdots, y_n^{(k)}).$$

对一切$y_i \in [0, d_i]$成立，令$k \to +\infty$，得

$$f_i(y_1^*, \cdots, y_{i-1}^*, y_i, y_{i+1}^*, \cdots, y_n^*) \leqslant f_i(y_1^*, \cdots, y_n^*),$$

故稳定策略组$(y_1^*, \cdots, y_n^*)$是平衡策略组[1]。

反之，若$(y_1^*, \cdots, y_n^*)$是一平衡策略组，初始策略组$y^{(0)} = y^*$，若当$k \geqslant 0$时，$y^{(k)} =$

y^*，则对一切$y_i\in[0,\ d_i]$，因y^*是平衡策略组，故

$$\begin{aligned}&f_i(y_1^{(k)},\ \cdots,\ y_{i-1}^{(k)},\ y_i,\ y_{i+1}^{(k)},\ \cdots,\ y_n^{(k)})\\&=f_i(y_1^*,\ \cdots,\ y_{i-1}^*,\ y_i,\ y_{i+1}^*,\ \cdots,\ y_n^*)\\&\leqslant f_i(y_1^*,\ \cdots,\ y_n^*),\end{aligned}$$

且当 $y_i=y_i^*$时，等号成立，由式（1），可取$y_i^{(k+1)}=y_i^*$，即$y^{(k+1)}=y^*$，从而，相应的最佳针对性策略组序列$\{y^{(k)}\}$是固定点序列，收敛到y^*，得y^*是一稳定策略组．证毕．

一般地说，稳定策略组即平衡策略组不一定存在，即使存在，也不一定唯一，而是与初始策略组有关．

例 $N=\{1,\ 2\}$，$d_1=d_2=1$，$f_1(y_1,\ y_2)=f_2(y_2,\ y_1)=2y_1^2+2y_1y_2-3y_1-7y_2$．当初始策略组$(y_1,\ y_2)$满足

$$0\leqslant y_1<\frac{1}{2}<y_2\leqslant 1$$

时，利用数学归纳法可得

$$(y_1^{(k)},\quad y_2^{(k)})=\left(\frac{1+(-1)^{k+1}}{2},\ \frac{1+(-1)^k}{2}\right),\qquad k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

最佳针对性策略组序列不收敛．当$0\leqslant y_2<\frac{1}{2}<y_1\leqslant 1$时，情况类似，呈现“闹别扭”的状态，整个经济活动无法达到稳定．

但是，当 $0\leqslant y_1,\ y_2<\frac{1}{2}$或$\frac{1}{2}<y_1,\ y_2\leqslant 1$时，稳定策略组存在，分别是(0，0)和(1，1)．

如果对任何初始策略组，最佳针对性策略序列都收敛，而且极限点y^*与初始策略组无关，则称y^*为绝对稳定策略组．

由例可知，绝对稳定策略组不一定存在．又由定理2可知，若绝对稳定策略组存在则对策有唯一平衡策略组．

四、对策的绝对稳定性

满足

$$f_i(y_1,\ \cdots,\ y_{i-1},\ y_i^*,\ y_{i+1},\ \cdots,\ y_n)=\max_{0\leqslant y_i\leqslant d_i}f_i(y_1,\ \cdots,\ y_n)\tag{2}$$

的$y_i^*\in[0,\ d_i]$全体，记为

$$Y_i=Y_i(y_1,\ \cdots,\ y_{i-1},\ y_{i+1},\ \cdots,\ y_n).\tag{3}$$

特别地，式（1）可记为

$$y_i^{(k+1)}\in Y_i(y_1^{(k)},\ \cdots,\ y_{i-1}^{(k)},\ y_{i+1}^{(k)},\ \cdots,\ y_n^{(k)}).\tag{4}$$

定理3 如果对一切$i\in N$，$f_i(y_1,\ \cdots,\ y_n)$是T上连续的凸函数，则对策存在稳定策略组．

证 由式（3）定义T上的点集对应

$$F:\ (y_1,\ \cdots,\ y_n)\to Y_1\times\cdots\times Y_n.$$

因为$f_1,\ \cdots,\ f_n$是连续的，故F是闭的，由文［2］之定理2．2．3，F是上半连续的闭值对

应，又由f_1，… f_n的凸性，得 F 是凸值对应。由角谷不动点原理[2]，存在 $y^*=(y_1^*, \cdots, y_n^*) \in F(y_1^*, \cdots, y_n^*)$，即对一切$i \in N$及一切$y_i \in [0, d_i]$，

$$f_i(y_1^*, \cdots, y_n^*)=\max_{0 \le y_i \le d_i} f_i(y_1^*, \cdots, y_{i-1}^*, y_i, y_{i+1}^*, \cdots, y_n^*),$$

故y^*是平衡策略组，由定理 2，y^*是稳定策略组。证毕。

定理4　如果存在$r(0 \leqslant r<1)$使得对一切 $y=(y_1, \cdots, y_n)$，$\bar{y}=(\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n) \in T$，恒有

$$Y_i(y_1, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots y_n) \cup Y_i(\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_{i-1}, \bar{y}_{i+1}, \cdots \bar{y}_n)$$

之直径$\leqslant r \cdot \max\limits_{j \neq i} |y_j-\bar{y}_j|$，则对策有绝对稳定策略组。

证　在T上赋予度量$d(y, \bar{y})=\max\limits_{1 \le i \le n} |y_i-\bar{y}_i|$.对任何初始策略组$y^{(0)} \in T$，最佳针对性策略组序列为$\{y^{(k)}=(y_1^{(k)}, \cdots, y_n^{(k)})\}$，由式（4）得

$$|y_i^{(k+1)}-y_i^{(k)}| \leqslant Y_i(y_1^{(k)}, \cdots, y_{i-1}^{(k)}, y_{i+1}^{(k)}, \cdots, y_n^{(k)}) \cup Y(y_1^{(k-1)}, \cdots, y_{i-1}^{(k-1)}, y_{i+1}^{(k-1)}, \cdots, y_n^{(k-1)})\text{之直径}$$

$$\leqslant r \cdot \max_{j \neq i} |y_j^{(k)}-y_j^{(k-1)}| \leqslant rd(y^{(k)}, y^{(k-1)}),$$

故$d(y^{(k+1)}, y^{(k)}) \leqslant rd(y^{(k)}, y^{(k-1)})$，由此得$\{y^{(k)}\}$收敛，即对策对任何初始策略组，最佳针对性策略组序列恒收敛，下证极限点与初始策略组无关。设$\{y^{(k)}\} \to y$，$\{\bar{y}^{(k)}\} \to \bar{y}$，则得$y \in F(y)$，$\bar{y} \in F(\bar{y})$，故

$$d(y, \bar{y}) \leqslant Y_i(y_1, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_n) \cup Y_i(\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_{i-1}, \bar{y}_{i+1}, \cdots, \bar{y}_n)\text{之直径}$$

$$\leqslant r \max_{j \neq i} |y_j-\bar{y}_j| \leqslant rd(y, \bar{y}),$$

从而$d(y, \bar{y})=0$，即$y=\bar{y}$。证毕。

参　考　文　献

[1] Owen, G., Game Theory, *Academic Press*, (1982).

[2] Ichiishi, T., *Game Theory For Economic Analysis*, Academic Press, (1983).

[3] Wrather, C. and Yu, P.L., *Contrnl Theory in Mathematical Economic*, Ed. by Liu Pan-Tai and Sutinen, J.G., Marcel Deker, Inc., (1979), 111—150.

A Competitive-Cooperative Economic Gaming Model

Wang Zhixiong

Abstract

In this paper, a practical compstive-cooperative economic gaming model is proposed; and the relation between balanced strategies and stable strategies are considered; and the conditions underlying stable or absolute stable strategies are given.

Key words　game, cooperation, competition, balanced strategy, stable strategy