第10卷 第4期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol.10 No.4
1989年10月　　JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE)　　Oct. 1989

拟共形映照的一个极值问题

赖 万 才

（应用数学系）

摘　　要

本文证明：如果$f(z)$是拓广复平面到自身使得$f(0)=0$，$f(1)=1$和$f(\infty)=\infty$的一个Q拟共形映照，则对任何r，$|z|\leqslant r$和$|f(z)|\leqslant r$，成立$|f(z)-z|\leqslant\frac{4}{\pi}rK\left(\frac{1}{1+r}\right)K\left(\frac{r}{1+r}\right)\cdot\log Q$，其中$K(t)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-tx^2)}}$。它是夏道行的一个定理的拓广。

关键词　拟共形映照，极值问题，非欧尺度

一、引　　言

1964年9月在上海召开的全国函数论会议上，我们曾宣读“$C(0, 1, \infty)$上的非欧尺度和拟共形映照”一文，文中的定理2（即本文中的定理1）至今仍是新的。1985年复旦大学的何成奇教授和北京大学的李忠教授曾在美国《现代数学》第48卷第133页上替作者做了公布[1]，现在提供它的证明。

二、定义和记号

众所周知，单位圆$|z|<1$上的两点z_1和z_2之间的非欧距离被定义为

$$\sigma(z_1, z_2)=\frac{1}{2}\log\frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|}{1-\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|},$$

而成立着

$$\sigma(z, z+\Delta z)=\frac{\Delta z}{1-|z|^2}(1+\varepsilon),$$

本文1988年8月26日收到。

这里当$\Delta z \to 0$时，$\varepsilon \to 0$。也就是说非欧尺度下的弧长微分元素$d\sigma_z$由公式

$$d\sigma_z = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

给出，其中$|dz|$表示欧氏尺度下的弧长微分元素。称$\rho(z)=\frac{1}{1-|z|^2}$为单位圆上的非欧尺度的密度函数。

用$C(0, 1, \infty)$表示点0，1和∞关于全平面的余集。$C(0, 1, \infty)$上的非欧尺度被定义为由把$C(0, 1, \infty)$的万有复盖面共形地映成单位圆的映照，单位圆上的非欧尺度在$C(0, 1, \infty)$上的转换。分别用$\widetilde{z_1 z_2}$和$\overline{z_1 z_2}$表示$C(0, 1, \infty)$上连接z_1和z_2的测地线段和直线段。

设$w=f(z)$是$C(0, 1, \infty)$到$C(0, 1, \infty)$并保持0，1和∞不动的Q拟共形映照[2]，其全体所成的类记为$E_Q(0, 1, \infty)$。$E_Q(0, 1, \infty)$中把$|z|<1$映成$|w|<1$的函数全体所成的类记为U_Q。

三、结果及其证明

对于$E_Q(0, 1, \infty)$的把单位圆映成自身的子类U_Q，夏道行在文〔3〕中证明了下述

定理A 设

$$\lambda(Q)=\sup_{\substack{|z|\leqslant 1\\ f\in U_Q}}|f(z)-z|,$$

则

$$\sup_{Q\geqslant 1}\frac{\lambda(Q)}{\log Q}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4}{4\pi^2}.$$

下面证明同样的结论对于$E_Q(0, 1, \infty)$类也正确。但此时因为$|z|\leqslant 1$不能保证$|f(z)|\leqslant 1$，需要置

$$\lambda(Q)=\sup_{\substack{|z|\leqslant 1,\ |f(z)|\leqslant 1\\ f\in E_Q(0,\ 1,\ \infty)}}|f(z)-z|.$$

实际上有下述更一般的定理：

定理1 设$0<r<\infty$，置

$$\lambda_r(Q)=\sup_{\substack{|z|\leqslant r,\ |f(z)|\leqslant r\\ f\in E_Q(0,\ 1,\ \infty)}}|f(z)-z|,$$

则

$$\sup_{Q\geqslant 1}\frac{\lambda_r(Q)}{\log Q}=\frac{4}{\pi}rK\left(\frac{1}{1+r}\right)K\left(\frac{r}{1+r}\right), \tag{1}$$

其中

$$K(t)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-tx^2)}}. \tag{2}$$

为了定理1的证明，先来指出两个引理。

引理1 设$\rho(z)$是$C(0,1,\infty)$上的非欧尺度的密度函数，那末对于任意实数φ, $0<r<\infty$，有

$$\rho(re^{i\varphi})\geqslant\rho(-r), \tag{3}$$

上式等号当且仅当$\varphi=(2k+1)\pi$，$k=0$，±1，±2，…时成立，而且

$$\rho(-r)=\pi/8rK\left(\frac{1}{1+r}\right)K\left(\frac{r}{1+r}\right), \tag{4}$$

$$\rho(-r)\geqslant\rho(-R),\qquad R\geqslant r>0, \tag{5}$$

这里$K(t)$同公式（2）.

证 根据定义

$$\rho(z)=\frac{|\zeta'(z)|}{1-|\zeta(z)|^2},$$

其中$\zeta(Z)$是把$C(0,1,\infty)$的万有复盖面共形地映成$|\zeta|<1$的映照．这样的映照不是唯一的，但$\rho(z)$不依赖于$\zeta(Z)$的选取[4]．由是要确定$\rho(z)$，可以如此选取$\zeta(Z)$，使得$\zeta(z)=0$．从而

$$\rho(z)=|\zeta'(z)|.$$

设$Z=Z(\zeta)$是$\zeta(Z)$的逆函数．那末$|\zeta'(z)|=\dfrac{1}{|Z'(0)|}$．但根据文〔5〕定理1（其中$z=\zeta$，$a_0=z$，$f(z)=f_0(z)=Z(\zeta)$，$n=1$，$a_1=Z'(0)$，$R=1$），有

$$|Z'(0)|=\frac{8}{\pi}|z||1-z|Re\{K(z)\overline{K(1-z)}\}$$

$$\leqslant\frac{8}{\pi}|z|K\left(\frac{1}{1+|z|}\right)K\left(\frac{|z|}{1+|z|}\right),$$

上式当且仅当z为负数时不等式变做等式．这就证明了式（3）和（4）．又[5]

$$\frac{dK\left(\frac{1}{1+r}\right)}{dr}=\frac{1}{2(1+r)}\left[K\left(\frac{1}{1+r}\right)-\frac{r}{1+r}E\left(\frac{1}{1+r}\right)\right],$$

$$\frac{dK\left(\frac{r}{1+r}\right)}{dr}=-\frac{1}{2(1+r)}\left[K\left(\frac{r}{1+r}\right)-(1+r)E\left(\frac{r}{1+r}\right)\right]$$

和

$$K\left(\frac{1}{1+r}\right)E\left(\frac{r}{1+r}\right)+K\left(\frac{r}{1+r}\right)E\left(\frac{1}{1+r}\right)-K\left(\frac{1}{1+r}\right)K\left(\frac{r}{1+r}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

故

$$\left[rK\left(\frac{1}{1+r}\right)K\left(\frac{r}{1+r}\right)\right]'=K\left(\frac{1}{1+r}\right)K\left(\frac{r}{1+r}\right)+\frac{r}{2(1+r)}\left[K\left(\frac{1}{1+r}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1+r}{r}E\left(\frac{1}{1+r}\right)\right]K\left(\frac{r}{1+r}\right)-\frac{K[1/(1+r)]}{2(1+r)}\left[K\left(\frac{r}{1+r}\right)\right.$$

$$\left.-(1+r)E\left(\frac{r}{1+r}\right)\right]=K\left(\frac{r}{1+r}\right)\left[K\left(\frac{1}{1+r}\right)\right.$$

$$-E\left(\frac{1}{1+r}\right)\Big]+\frac{1}{2}\Big[K\left(\frac{1}{1+r}\right)E\left(\frac{r}{1+r}\right)+K\left(\frac{r}{1+r}\right)E\left(\frac{1}{1+r}\right)$$

$$-K\left(\frac{1}{1+r}\right)K\left(\frac{r}{1+r}\right)\Big]+\frac{r}{1+r}K\left(\frac{1}{1+r}\right)K\left(\frac{r}{1+r}\right)$$

$$=K\left(\frac{r}{1+r}\right)\Big[K\left(\frac{1}{1+r}\right)-E\left(\frac{1}{1+r}\right)\Big]+\frac{\pi}{4}+\frac{r}{1+r}K\left(\frac{1}{1+r}\right)K\left(\frac{r}{1+r}\right)>0,$$

上式最后一步利用到了$1\leqslant E\leqslant\frac{\pi}{2}$，$K\geqslant\frac{\pi}{2}$。所以$rK\left(\frac{1}{1+r}\right)K\left(\frac{r}{1+r}\right)$是$r$的严格增加函数。于是式（5）得证。

引理2　设$f(z)\epsilon E_Q(0,\ 1,\ \infty)$，那未对于每一个$z\epsilon C(0,\ 1,\ \infty)$成立

$$\sigma(f(z),\ z)\leqslant\frac{1}{2}\log Q, \tag{6}$$

其中$\sigma(z_1,\ z_2)$表示$C(0,\ 1,\ \infty)$上的两点z_1和z_2之间的非欧距离。估计式（6）是准确的，就是说，对于每一对满足$\sigma(z_1,\ z_2)\leqslant\frac{1}{2}\log Q$的点$z_1$和$z_2$，存在$f(z)\epsilon E_Q(0,\ 1,\ \infty)$使得$f(z_1)=z_2$。

定理1的证明．对于$f(z)\epsilon E_Q(0,\ 1,\ \infty)$，由引理1和引理2，我们有

$$\frac{1}{2}\log Q\geqslant\sigma(f(z),\ z)=\int_{\widehat{zf(z)}}\rho(\zeta)\,|d\zeta|\geqslant\Big[\inf_{|\zeta|\leqslant r}\rho(\zeta)\Big]\int_{\widehat{zf(z)}}|d\zeta|$$

$$\geqslant\Big[\inf_{|\zeta|\leqslant r}\rho(\zeta)\Big]\int_{\overline{zf(z)}}|d\zeta|=\rho(-r)\,|f(z)-z|,$$

或

$$\frac{|f(z)-z|}{\log Q}\leqslant\frac{1}{2\rho(-r)}=\frac{4}{\pi}\ rK\left(\frac{1}{1+r}\right)K\left(\frac{r}{1+r}\right).$$

另一方面，对于任意的$\epsilon>0$．由于$\rho(\zeta)$的连续性，存在$\delta>0$，当$|\zeta+r|<\delta$时成立$|\rho(\zeta)-\rho(-r)|<\epsilon$。设$\zeta_0$是一复数，适合$|\zeta_0|\leqslant r$并使得测地线段$\widehat{-r\zeta_0}$上的每一点$\zeta$都满足$|\zeta+r|<\delta$。命$Q=Q_0$为方程

$$\sigma(\zeta_0,\ -r)=\frac{1}{2}\log Q$$

的解．根据引理2的准确性，存在$f_0(z)\epsilon E_{Q_0}(0,\ 1,\ \infty)$，使得$f_0(-r)=\zeta_0$。于是

$$\frac{1}{2}\log Q_0=\sigma(\zeta_0,\ -r)=\int_{\widehat{-r\zeta_0}}\rho(z)\,|dz|\leqslant\int_{\overline{-r\zeta_0}}\rho(z)\,|dz|$$

$$\leqslant(\rho(-r)+\epsilon)\int_{\overline{-r\zeta_0}}|dz|=(\rho(-r)+\epsilon)\,|f_0(-r)+r|,$$

或

$$\frac{|f_0(-r)+r|}{\mathrm{lon}Q_0}\geqslant\frac{1}{2(\rho(-r)+\epsilon)}=\frac{1}{2(\rho(-r)}+\epsilon'=\frac{4}{\pi}\ rK\left(\frac{1}{1+r}\right)K\left(\frac{r}{1+r}\right)+\epsilon'_0$$

由于当$\epsilon\to0$时，$\epsilon'\to0$。定理1证毕。

参 考 文 献

〔1〕He Chengqi and Li Zhong, Quasiconformal mappings, *Contemporary Mathematics*, 48(1985), 129—150.

〔2〕赖万才，拟共形映照的模数偏差，华侨大学学报（自然科学版），6(1985), 141—143.

〔3〕夏道行，拟共形映照的参数表示，科学记录，3(1959), 323—329.

〔4〕戈鲁辛，Г.M.（陈建功译），复变函数的几何理论，科学出版社，1956, 351.

〔5〕赖万才，兰道定理中的海曼常数的准确值，中国科学（外文版），22(1979), 129—134.

An Extremal Problem for Quasiconformal Mappings

Lai Wancai

Abstract

In this paper the author proves: If $f(z)$ is a quasiconformal mapping of the extended complex plane onto itself such that $f(0)=0$, $f(1)=1$ and $f(\infty)=\infty$, then $|f(z)-z| \leqslant \frac{4}{\pi} rK\left(\frac{1}{1+r}\right)K\left(\frac{r}{1+r}\right)\log Q$ holds for any r, $|z| \leqslant r$ and $|f(z)| \leqslant r$, where $K(t)=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-tx^2)}}$. It is the generalization of a theorem of Shah Taoshing (see also [1]).

Key words quasi-conformal mappings, extremal problem, non-Euclidean metric