第10卷 第3期 华侨大学学报自然科学版 Vol.10 No.3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1989年7月 (NATURAL SCIENCE) Jul.1989

# 弹塑性静、动力学的边界区域单元法

林建华

（土木工程系）

## 摘 要

本文从推广的Betti功互换定理出发，对弹塑性静动力学和力学的问题建立起一种新的边界积分求解格式——边界区域单元法。这种方法可以方便地把求解弹性塑静、动力学等问题编成统一的电算程序。它与边界单元法比较，对动力问题，不必进行拉氏或富氏数值变换；对弹塑性问题，可避免在增量段中进行迭代计算。

**关键词** 弹性动力学，塑性流动理论，边界区域单元法，Betti功互换定理。

## 一、前 言

弹性动力学和弹塑性力学的边界单元解法，近年来已经越来越引起人们的注意。在弹性动力问题的边界元法中，目前应用得比较多的是积分变换法，即利用拉氏或富氏变换将时间域转变到拉氏或富氏变换空间，解得边界积分方程后，再利用相应的数值逆变换将其力学量变换回到真实时间域中[1,2]。这种方法计算复杂，工作量大。如果不是对足够多的变换参数进行数值逆变换，则将造成较大的计算误差。在弹塑性问题的边界单元法中，求解的方法仍大部分摆脱不了诸如初应力或初应变这些在非线性有限元计算中常用的解法[3]。如果边界单元法在解弹性静力学问题比有限元方法来说效率有显著提高的话，那么对于弹性动力学或弹塑力学等问题，目前的边界单元方法却无甚优势可言。因为边界元方法对于弹塑性问题中的伪体力的处理并不比有限元来得方便。为此，本文力图集中二者的优点，提出适用于求解弹塑性静、动力学问题的一种新的边界积分求解格式——边界区域单元法。为边界元法在上述问题的应用开辟一条新的路子。

基于作者已经得到的推广的Betti功互换定理[4]，统一采用弹性静力学边界元方法中的Kelvin解，本文导出了求解弹性动力学、弹塑性力学问题的边界区域积分方程。对动力问题，利用Wilson-$\theta$法的加速度关于时间的差分公式，使所得到的边界区域单元法线性方程组可以在真实时间域按时间步长逐步求解。对于弹塑性问题，采用增量理论中相关连的流动法则，把非弹性区域中的位移作为未知量同边界未知量联立求解，从而避免在一般非线性数值解法中在增量段内所需的迭代过程。

本文1988年3月10日收到。

本文推导过程适用于三维、二维的弹性动力学，弹塑性力学问题。

## 二、弹性动力学问题

### 1．弹性动力学问题的Betti功互换定理

在弹性动力学问题中，物体的位移、应变，应力一般都随时间变化。如果仍采用理想弹性体的假定和微小位移的假定，那么对于动力问题中的任一瞬时，在弹性静力学中所建立的物理方程和几何方程以及应力分量用位移表示的弹性方程仍然适用。然而，由于弹性体的运动具有加速度而产生惯性力，因此在Betti功互换定理中，应增加考虑由于惯性力所引起的影响。作者在文献[4]中推导出了弹性动力学的Betti功互换定理。具体表达式为

$$\int_{\Omega_\sigma} f_i^{(1)} u_i^{(2)} dv - \int_\Omega \rho \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial t^2} u_i^{(2)} dV + \int_{S_\sigma} p_i^{(1)} u_i^{(2)} dS$$

$$= \int_\Omega f_i^{(2)} u_i^{(1)} dV - \int_\Omega \rho \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial t^2} u_i^{(1)} dV + \int_{S_\sigma} p_i^{(2)} u_i^{(1)} dS, \tag{1}$$

上式中，状态（1）和状态（2）可以分别代表不同时刻。更简便地，可设第（1）状态为弹性静力学状态，即有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = 0 \\ \sigma_{ij,j}^{(1)} + f_i^{(1)} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

把式（2）代入式（1）可得

$$\int_\Omega \sigma_{ij,j}^{(1)} u_i^{(2)} dV + \int_{S_\sigma} p_i^{(1)} u_i^{(2)} dS = \int_\Omega f_i^{(2)} u_i^{(1)} dV - \int_\Omega \rho \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial t^2} u_i^{(1)} dV + \int_{S_\sigma} p_i^{(2)} u_i^{(1)} dS \tag{3}$$

上式即是求解弹性动力学问题边界区域积分法的理论依据。

### 2．瞬态弹性动力学问题

设状态（2）为所要研究的瞬变弹性动力学状态，可表为定解问题

$$\begin{cases} (c_1^2 - c_2^2) u_{j,ij} + c_2^2 u_{i,jj} + b_i = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, & \forall q \in \Omega, \\ p_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i(q,\ t), & \forall q \in S_\sigma, \\ u_i = \bar{u}_i(q,\ t), & \forall q \in S_u, \end{cases} \tag{4}$$

及

$$\begin{aligned} & u_i(q,\ 0^+) = u_{i0}, \qquad \forall q \in \Omega + S, \\ & \frac{\partial u(q, 0^+)}{\partial t} = \dot{u}_{i0}, \end{aligned} \tag{5}$$

其中$c_1$，$c_2$分别是在无限介质中膨胀波和畸变波的传播速度。

为了获得真实时间域内的边界区域积分方程，根据动力分析中的Wilson-$\theta$法，把加速度写成关于时间的差分格式：

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t+\theta\Delta t}=\frac{6}{\theta^2\Delta t^2}(u|_{t+\theta\Delta t}-u|_t)-\frac{6}{\theta\Delta t}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_t-2\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_t, \tag{6}$$

并取状态（1）中的$u_i^{(1)}$，$p_i^{(1)}$为NaNier算子的Kelvin基本解$u_{j\,i}^*$，$p_{j\,i}^*$。其中$u_{j\,i}^*$满足

$$\sigma_{ik,l}(u_{j\,i}^*(p,\ q))+\Delta(p)\delta_{ij}=0, \tag{7}$$

并且

$$u_{j\,i}^*(p,\ q)=\frac{1}{8\pi G(1-\nu)\alpha r^{\alpha-1}}\left\{(3-4\nu)\delta_{ij}(\beta-2+(\beta-3)\ln\frac{1}{r})+r_{,i}r_{,j}\right\}, \tag{8}$$

$$p_{j\,i}^*(p,\ q)=\frac{1}{4\pi(1-\nu)\alpha r^2}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}[(1-2\nu)\delta_{ij}+\beta r_{,i}r_{,j}]-(1-2\nu)(r_{,j}n_i-r_{,i}n_j)\right\}, \tag{9}$$

式中，对应于三、二维问题，$\alpha=2$、1；$\beta=3$、2.

设方程（3）的状态（2）对应（$t+\theta\Delta t$）时刻，把式（6）—（9）代入式(3)中，略去上指标，并根据$\delta$函数的性质可得

$$u_j(p)=\int_S u_{j\,i}^*(p,\ Q)p_i(Q)dS(Q)-\int_S p_{j\,i}^*(p,\ Q)u_i(Q)dS(Q)$$

$$+\int_\Omega u_{j\,i}^*(p,\ q)(a_1u_i(q)+\chi_i(q))dV(q),\qquad \forall p,\ q\in\Omega,\ Q\in S, \tag{10}$$

式中

$$a_1=-(6/\theta^2\Delta t^2),$$

$$\chi_i=-a_1u_i|_t+\frac{6}{\theta\Delta t}\dot{u}_i|_t+2\ddot{u}_i|_t,$$

当点$p$无限趋近于边界$S$时，式（10）可写成极限形式

$$c_{ij}(p)u_i(p)=\int_S u_{j\,i}^*(p,\ Q)p_i(Q)dS(Q)-\int_S p_{j\,i}^*(p,\ Q)u_i(Q)dS(Q)$$

$$+\int_\Omega u_{j\,i}^*(p,\ q)(a_1u_i(q)+\chi_i(q))dV(q),\qquad \forall q\in\Omega,\ p,\ Q\in S, \tag{11}$$

式（11）即为瞬态弹性动力问题的边界区域积分方程，对比弹性静力问题的边界积分方程，容易看出，式（11）除了和时间步长的初始状态有关外，内点位移作为未知量还出现在等式右边的体积分项中。

将边界$S$离散成曲面单元，区域$\Omega$划分为体积单元，设有$n_S$个表面结点，$n_I$个内部结点。那么，单元内的位移，面力可通过单元节点值插值而得。注意插值函数的选取应尽量能保证体积单元和曲面单元的交界面上，坐标和位移的协调。这样，式（11）可写成矩阵形式

$$[C]\{U\}=[G]\{P\}-[H]\{U\}+a_1[A]\{\bar{U}\}+\{B\}, \tag{12}$$

式（12）中各项依次和式（11）中各项相对应。$\{U\}$，$\{P\}$由$u_i(Q)$，$p_i(Q)$在边界结点上的值组成。$\{\bar{U}\}$由$u_i(q)$在域内结点上的值组成。由于式（12）实际包含有$3N_S$个方程，而而未知数个数有$3(N_S+N_I)$个，因此仅由边界点积分方程所得到的线性方程组（12）是无法求解的。然而，如果把求解内点位移的式（10）用于内结点上，则可以按边界区域单元法表示成下列矩阵形式

$$\{\bar{U}\}=[\bar{G}]\{P\}-[\bar{H}]\{U\}+a_1[\bar{A}]\{\bar{U}\}+\{\bar{B}\}, \tag{13}$$

上式中各项依次和式（10）各项对应。式（13）实际上也包含有$3N_I$个方程，联立求解式（12）、（13），问题可解。由（13）式可得$\{\bar{U}\}$的显式

$$\{\bar{U}\}=([I]-a_1[\bar{A}])^{-1}([\bar{G}]\{P\}-[\bar{H}]\{U\}+\{\bar{B}\}), \tag{14}$$

式中，$[I]$为$n_I$阶单位矩阵，把（14）式代入（12）式整理后可得

$$[H^*]\{U\}=[G^*]\{P\}+\{B^*\}, \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned}&[H^*]=[C]+[H]+[M]_V[\bar{H}],\\&[G^*]=[G]+[M]_V[\bar{G}],\\&\{B^*\}=\{B\}+[M]_V\{\bar{B}\},\\&[M]_V=a_1[A]([I]-a_1[\bar{A}])^{-1},\end{aligned} \tag{16}$$

通过求解式（15），可得边界未知量$\{U\}$，$\{P\}$；由式（14）可求得内结点位移值$\{\bar{U}\}$；再由式（10）求域内任意点的位移。这样，按时间步长逐步数值求解，可得动力问题的全部解答。值得指出：在每个时间步长中，除了逐次重新计算矩阵$\{B\}$、$\{\bar{B}\}$之外，其余矩阵均不需重新形成，这是积分变换法求解该问题远不能比拟的。

**3．稳态弹性动力学问题**

对于稳态弹性动力问题，其定解问题可提为：

$$\left|\begin{aligned}&(c_1^2-c_2^2)u_{j,ij}+c_2^2u_{i,jj}+b_i+\omega^2u_i=0, &&\forall q\in\Omega,\\&p_i=\bar{p}_i(q,\ \omega), &&\forall q\in S_\sigma,\\&u_i=\bar{u}_i(q,\ \omega) &&\forall q\in S_u,\end{aligned}\right. \tag{17}$$

式中，$u_i$，$p_i$分别为位移、面力的幅值；$\omega$代表频率。

设状态（2）对应所要研究的稳态动力问题，同样取状态（1）中的$u_i^{(1)}$，$p_i^{(1)}$为Kelvin基本解$u_{ji}^*$，$p_{ji}^*$。把式（7）、（8）、（17）代入（3）式中，可得相应的边界区域积分方程

$$u_j(p)=\int_S u_{ji}^*(p,\ Q)p_i(Q)dS(Q)-\int_S p_{ji}^*(p,\ Q)u_i(Q)dS(Q)$$
$$+\int_\Omega\rho\omega^2u_{ji}^*(p,\ q)u_i(q)dV(q)+\int_\Omega f_i(q)u_{ji}^*(p,\ q)dV(q),\qquad \forall p,q\in\Omega,\ Q\in S \tag{18}$$

以及

$$c_{ji}(p)u_i(p)=\int_S u_{ji}^*(p,\ Q)p_i(Q)dS(Q)-\int_S p_{ji}^*(p,\ Q)u_i(Q)dS(Q)$$
$$+\int_\Omega\rho\omega^2u_{ji}(p,\ q)u_i(q)dV(q)+\int_\Omega f_i(q)u_{ji}(p,q)dV(q),\forall q\in\Omega,pQ\in S, \tag{19}$$

同2．所述，将式（18）、（19）按边界区域单元法写成矩阵形式有

$$\{\bar{U}\}=[\bar{G}]\{P\}-[\bar{H}]\{U\}+\rho\omega^2[\bar{A}]\{\bar{U}\}+\{\bar{B}\}, \tag{20}$$

及

$$[C]\{U\}=[G]\{P\}-[H]\{U\}+\rho\omega^2[A]\{\bar{U}\}+\{B\}, \tag{21}$$

（20）、（21）式中各项依次和（18）、（19）式中各项相对应．把（20）式写成$\{\bar{U}\}$的显式

$$\{\bar{U}\}=([I]-\rho\omega^2[\bar{A}])^{-1}([\bar{G}]\{P\}-[\bar{H}]\{U\}+\{\bar{B}\}), \tag{22}$$

代入（21）式可得

$$[H^*]\{U\}=[G^*]\{P\}+\{B^*\}, \tag{23}$$

式中

$$\begin{aligned}&[H^*]=[C]+[H]+[M]_S[\bar{H}],\\&[G^*]=[G]+[M]_S[\bar{G}].\\&\{B^*\}=\{B\}+[M]_S\{\bar{B}\},\\&[M]_S=\rho\omega^2[A]([I]-\rho\omega^2[\bar{A}])^{-1}.\end{aligned} \tag{24}$$

比较（16）和（24）式，不难看出，瞬态动力问题和稳态动力问题的求解格式大致一样，只不过瞬态问题必须按时间步长逐步求解而已。

为了求出弹性体的固有频率，只需在式（23）中令 $\{U\}$ 的系数行列式等于零。即

$$det(H^*) = det([C] + [H] + \rho\omega^2[A]([I] - \rho\omega^2[\bar{A}])^{-1}[\bar{H}]) = 0, \qquad (25)$$

上式是 $\omega^2$ 的 $ns$ 次（矩阵 $H^*$ 阶数为 $ns$）实系数方程，求解方程（25），可得弹性体的固有频率 $\omega_1$，$\omega_2$，…，进而得到与其相应的固有振型。

**4. 内点应力的求解**

根据式（10）、（18），可以得到弹性动力学问题边界区域单元法内点应力的表达式[3]

$$\sigma_{ij}(p) = \int_S u_{ijk}(p, Q)p_k(Q)dS(Q) - \int_S p_{ijk}(p, Q)u_k(Q)dS(Q)$$

$$+ \int_\Omega u^*_{ik}(p,q)R_k(q)dV(q), \qquad \forall p, q\epsilon\Omega, \ Q\epsilon S, \qquad (26)$$

式中

$$R_k(q) = \begin{cases} -a_1u_k(q) + x_k(q), & \text{瞬态问题} \\ \rho\omega^2u_k(q) + f_k(q), & \text{稳态问题} \end{cases} \qquad (27)$$

$$u_{jjk}(p, q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)\alpha r^2}\{(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} - r_{,j}\delta_{ik})\beta r_{,i}r_{,j}r_{,k}\}, \qquad (28)$$

$$p_{jjk}(p, q) = \frac{G}{2\pi(1-\nu)\alpha r^\beta}\Big\{\beta\frac{dr}{dn}[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - (\beta+2)r_{,i}r_{,j}r_{,k}]$$

$$+ \beta\nu(n_ir_{,j}r_{,k} + n_jr_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu)(\beta n_kr_{,i}r_{,j} + n_j\delta_{ik} + n_i\delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k\delta_{ij}\Big\}, \qquad (29)$$

注意，对于瞬态问题，$u_k(q)$ 代表该瞬时q点的位移，而 $x_k$(q)则与该时间步长的初始状态有关。把（26）式写成矩阵形式有

$$\{\sigma\} = [D]\{P\} - [S]\{U\} + [\bar{D}]\{\bar{U}\} + [\bar{D}]\{F\}, \qquad (30)$$

式中各项依次和（26）式各项相对应。

## 三、弹塑性力学问题

**1. 弹塑性问题增量形式的Betti功互换定理**

在文[4]中，作者曾导出弹塑性问题的Betti功互换定理

$$\int_\Omega \sigma^{(1)}_{ij}\varepsilon^{(2)p}_{ij}dV - \int_\Omega f^{(1)}_j u^{(2)}_j dV - \int_{S\sigma} p^{(1)}_j u^{(2)}_j dS$$

$$= \int_\Omega \sigma^{(2)}_{ij}\varepsilon^{(1)p}_{ij}dV - \int_\Omega f^{(2)}_j u^{(1)}_i dV - \int_{S\sigma} p^{(2)}_i u^{(1)}_i dS, \qquad (31)$$

在研究弹塑性问题时，常采用载荷增量法，因此，如果设状态（3）是由一组力（$p^{(2)}_i$ + $\Delta p^{(2)}_i$，$f^{(2)}_i + \Delta f^{(2)}_i$）作用于同一弹塑性体上而产生应力、应变、位移分别为（$\sigma^{(2)}_{ij} + \Delta\sigma^{(2)}_{ij}$，$\varepsilon^{(2)}_{ij} + \Delta\varepsilon^{(2)}_{ij}$，$u^{(2)}_i + \Delta u^{(2)}_i$）的结果，那么对于（1）、（3）两种受力状态有

$$\int_\Omega \sigma^{(1)}_{ij}(\varepsilon^{(2)}_{ij} + \Delta\varepsilon^{(2)p}_{ij})dV - \int_\Omega f^{(1)}_i(u^{(2)}_i + \Delta u^{(2)}_i)dV - \int_{S\sigma} p^{(1)}_i(u^{(2)}_i + \Delta u^{(2)}_i)dS$$

$$= \int_\Omega(\sigma^{(2)}_{ij} + \Delta\sigma^{(2)}_{ij})\varepsilon^{(1)p}_{ij}dV - \int_\Omega(f^{(2)}_i + \Delta f^{(2)}_i)u^{(1)}_i dV - \int_{S\sigma}(p^{(2)}_i + \Delta p^{(2)}_i)u^{(1)}_i dS, \qquad (32)$$

把式（31）代入式（32）即得

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij}^{(1)}\Delta\varepsilon_{ij}^{(2)p}dV-\int_{\Omega}f_i^{(1)}\Delta u_i^{(2)}dV-\int_{S_\sigma}p_i^{(1)}\Delta u_i^{(2)}dS$$
$$=\int_{\Omega}\Delta\sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)p}dV-\int\Delta f_i^{(2)}u_i^{(1)}dV-\int_{S_\sigma}\Delta p_i^{(2)}u_i^{(1)}dS, \qquad (33)$$

上式即为具有增量形式的Betti功互换定理.

**2. 弹塑性问题的边界区域单元法**

设式（33）中的状态（1）为弹性状态，则有 $\varepsilon_{ij}^{(1)p}=0$，同样取$u_i^{(1)}$，$p_i^{(1)}$，$\sigma_{ij}^{(1)}$为Kelvin基本解式（8）、（9）及

$$\sigma_{ikj}^*(p,\ q)=-u_{ikj}^*(p,q),$$

$$\varepsilon_{ikj}^*(p,\ q)=\frac{-1}{8\pi G(1-\nu)\alpha r^\alpha}\{(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij}+r_{,i}\delta_{jk})-r_{,j}\delta_{ik}+\beta r_{,i}r_{,j}r_{,k}\}, \qquad (34)$$

式中$\sigma_{ikj}$、$\varepsilon_{ikj}$分别为在无限弹性体内$p$点的$j$方向作用单位力而在$q$点产生的应力及应变. 把式（8）、（9）、（34）代入（33）式可得

$$\Delta u_j(p)=\int_S u_{ji}^*(p,\ Q)\Delta p_i(Q)dS(Q)-\int_S p_{ji}^*(p,\ Q)\Delta u_i(Q)dS(Q)+\int u_{ji}(p,Q)\Delta f_i(q)dV(q)$$
$$+\int_{\Omega}\sigma_{jkj}(p,\ q)\Delta\varepsilon_{ik}^p(q)dV(q), \qquad \forall p,q\in\Omega,\ Q\in S, \qquad (35)$$

和

$$C_{ji}(p)\Delta u_i(p)=\int_S u_{ji}^*(p,\ Q)\Delta p_i(Q)dS(Q)-\int_S p_{ji}^*(p,\ Q)\Delta u_i(Q)dS(Q)$$
$$+\int_{\Omega}u_{ji}^*(p,q)\Delta f_i(q)dV(q)+\int_{\Omega}\sigma_{ikj}^*(p,q)\Delta\varepsilon_{ik}^p(q)dV(q), \qquad \forall q\in\Omega,\ p,Q\in S, \qquad (36)$$

注意到

$$\int_{\Omega}\sigma_{ikj}\Delta\varepsilon_{ik}^p dV=\int_{\Omega}C_{ikrs}\varepsilon_{rsj}^*\Delta\varepsilon_{ik}^p dV=\int_{\Omega}\varepsilon_{ikj}^*\Delta\sigma_{ik}^p dV, \qquad (37)$$

并且

$$\int_{\Omega}\varepsilon_{ikj}\Delta\sigma_{ik}^p dV=\int_{\Omega}\varepsilon_{ikj}^*C_{ikrs}^p\Delta\varepsilon_{rs}dV=\int\varepsilon_{ikj}^*C_{ikrs}^p\Delta u_{r,s}dV, \qquad (38)$$

式（38）中$C_{ikrs}$，$C_{ikrs}^p$分别为弹性模量张量和塑性模量张量. 当采用较有普遍意义的四参数屈服准则[5]时，$C_{ikrs}^p$可具体表达为[6]

$$C_{ikrs}^p=\left(C_{ikmn}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{jl}}C_{jlrs}\right)/(A_1+A_2), \qquad (39)$$

写成矩阵形式有

$$[D]_p=\frac{[D]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]}{A_1+A_2},$$

其中

$$A_1=-\frac{\partial f}{\partial H}H'\left(\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$A_2=\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\},$$

$$f=A\frac{J_2}{H(\int d\varepsilon_i^p)}+B\sqrt{J_2}+C\sigma_1+DI_1-H(\int d\varepsilon_i^p)=0. \qquad (40)$$

函数$H(\int d\varepsilon_i^p)$可由试验得到的应力应变曲线确定。$H'$表示曲线$H(\int d\varepsilon_i^p)$的斜率。$A$、$B$、$C$、$D$四个材料参数可通过简单拉压、双向压缩和侧限三向压缩确定。特别当适当选取这四个参数值，就可以使四参数屈服准则退化成熟知的Mises准则、$M$-$C$准则、或$D$-$P$准则。

把式（37）—（39）代入式（35）、（36），并按边界区域单元法离散所得的积分方程，可得到如下的矩阵形式

$$\{\Delta\bar{U}\}=[\bar{G}]\{\Delta P\}-[\bar{H}]\{\Delta U\}+\{\bar{B}\}+[\bar{A}]\{\Delta\bar{U}\}, \tag{41}$$

$$[C]\{\Delta U\}=[G]\{\Delta P\}-[H]\{\Delta U\}+\{B\}+[A]\{\Delta\bar{U}\}, \tag{42}$$

如前所述，联立求解式（41）、（42）可得

$$[H^*]\{\Delta U\}=[G^*]\{\Delta P\}+\{B^*\}, \tag{43}$$

$$\{\Delta\bar{U}\}=([I]-[\bar{A}])^{-1}([\bar{G}]\{\Delta P\}-[\bar{H}]\{\Delta U\}+\{\bar{B}\}), \tag{44}$$

式中

$$\begin{aligned}
&[H^*]=[C]+[H]+[M]_p[\bar{H}],\\
&[G^*]=[G]+[M]_p[\bar{G}],\\
&\{B^*\}=\{B\}+[M]_p\{\bar{B}\},\\
&[M]_p=[A]([I]-[\bar{A}])^{-1},
\end{aligned} \tag{45}$$

由式（43）可求得在给定外载增量下的边界未知量$\{\Delta U\}$、$\{\Delta P\}$的弹塑性解，通过增量解的迭加，可得弹塑性问题的最终解答。

值得指出的是：一般弹塑性边界元求解方法大都采用增量初应力法或增量初应变法，必须预先求出增量下的弹性解从而确定由于塑性影响所产生的初应力或初应变，再反复迭代计算求解其弹塑性解。相反，按本文的求解格式，由于在塑性应变增量的积分区域中，结点位移增量作为新的未知量加入，没有必要在各增量段进行迭代计算，这显然是可取的方法。

比较式（15）、（23）、（43）可以看出：弹性动力学边界区域单元法求解格式同弹塑性力学的求解格式是一致的。这意味着，采用本文的方法，可以把弹塑性静、动力学等许多问题编成通用的电算程序，从而可大大减少编制和调试诸程序的工作量。

**3．内点应力增量的求解**

文[3]导出了求解内点应力的具体表达式：

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{ij}(p)=&\int_S u^*_{ijk}(p,Q)\Delta p_k(Q)dS(Q)-\int_S p^*_{ijk}(p,Q)\Delta u_k(Q)dS(Q)\\
&+\int_\Omega u^*_{ijk}(p,q)\Delta f_k(q)dV(q)+\int_\Omega \varepsilon^*_{ijkl}(p,q)\Delta\sigma^p_{kl}(q)dV(q)+g_{ij}(\Delta\sigma^p_{kl}),\quad \forall p,q\in\Omega,
\end{aligned} \tag{46}$$

式中

$$\begin{aligned}
\varepsilon^*_{ijkl}(p,q)=&(1/4\pi(1-\nu)\alpha r^\beta)\{(1-2\nu)[\delta_{ik}\delta_{lj}+\delta_{jk}\delta_{li}-\delta_{ij}\delta_{kl}+\beta\delta_{ij}r_{,k}r_{,l}]\\
&+\beta\nu[\delta_{li}r_{,j}r_{,k}+\delta_{jk}r_{,l}r_{,i}+\delta_{ik}r_{,l}r_{,j}+\delta_{jl}r_{,i}r_{,k}]\\
&+\beta\delta_{kl}r_{,i}r_{,j}-\beta(\beta+2)r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l}\},
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\left|\begin{aligned}
&g_{ij}=(-1/15(1-\nu))[(7-5\nu)\Delta\sigma^p_{ij}+(1-5\nu)\Delta\sigma^p_{ll}\delta_{ij}],\quad \text{（三维问题）}\\
&g_{ij}=(-1/8(1-\nu))[2\Delta\sigma^p_{ij}+(1-4\nu)\Delta\sigma^p_{ll}\delta_{ij}],\quad \text{（二维平面应变问题）}
\end{aligned}\right. \tag{48}$$

对于二维平面应力问题，$\nu$用$\nu/(1-\nu)$代之。由于

$$\Delta\sigma^p_{kl}=C^p_{klrs}\Delta\varepsilon_{rs}=(1/2)C^p_{klrs}(\Delta u_{r,s}+\Delta u_{s,r}), \tag{49}$$

代入式（46）并采用矩阵形式表达可得

$$\{\Delta\sigma\}=[D]\{\Delta P\}-[S]\{\Delta U\}+[\bar{D}]\{\Delta F\}+[\bar{C}]\{\Delta\bar{U}\}+[C']\{\Delta\bar{U}\},$$

或

$$\{\Delta\sigma\}=[D]\{\Delta P\}-[S]\{\Delta U\}+[\bar{D}]\{\Delta F\}+([\bar{C}]+[C'])\{\Delta\bar{U}\},\qquad(50)$$

式（50）中各项依次和式（46）各项相对应。

利用式（50），可求得弹塑性体的内点应力增量。

## 四、结　论

1. 本文提出的求解瞬态弹性动力学问题的边界区域单元法可以在真实时间域内按时间步长逐步数值求解，不必进行繁杂的拉氏逆变换运算。

2. 边界区域单元法可望成为求解弹塑性力学问题的新的有效的数值解法。由于把非弹性区域中的位移增量作为未知量同边界未知量联立求解，可以避免一般弹塑性数值解法中在增量段内所需的迭代过程。

3. 由于本文的方法对弹塑性静、动力学边界区域单元法采用了统一的 Kelvin 基本解，对于不同的问题，其求解格式是一致的。十分有利于编制统一的电算程序，减少程序的编制和调试的工作量。

4. 虽然本文的方法需对物体内部区域进行分割，但这种分割的要求比对有限元法的要求要低。并且如果不计体力的话，只需对预先估计在完全的加载中会产生塑性变形的内部域划分单元即可，这样可大大减少域内的数值积分和内结点未知量。

5. 把本文的方法推广到弹塑性动力学、粘弹塑性和热弹塑性力学等问题是不困难的。同样，本文的方法也适用于其它非弹塑性力学的线性边值问题。

本文主要从理论上导出弹性动力学，弹塑性力学的边界区域积分方程组。限于篇幅，具体的应用和数值算例将另文给出。

## 参　考　文　献

〔1〕 Cruse, T.A.and Rizzo, F.J.A.Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamics Problem, *I.J.Math.Anol.Aqql.*, 22(1968), 244–259.

〔2〕 Manolis, G.D.and Beskos, D.E.,Dgnamics Stress Concentration Studies by Boundary Integral and Laplace Ttransform, *I.J.Nemer Meth Engrg*, 17(1981), 573–599.

〔3〕 Brebbia, C.A..and Orszag, S.A.,*The Boundary ELement Method Aqqlied to Inelastic Problemss*, Springer-Verlag Berlin Heidelherg Newyork, (1983).

〔4〕 林建华，Betti功互换定理的推广及应用，华侨大学学报(自然科学版) 3（1987）.

〔5〕 Hsieh, S.S.et al, A Plastic-Fracture Model for Conerete, *Inter, J, Solids and Structures*, 18, 3(1982), 37.64.

〔6〕 钱济成、林建华，混凝土断裂的非线性分析，水利学报，1(1987).

# A Boundary Region Element Method for Solving Problems of Elastoplastic Statics and Dynamiss

Lin Jianhua

## Abstract

Starting from extended Betti's reciprocal theorem of work, this paper sets up a new format of boundary integration—boundary region element method for elastoplastic statics and dynamics. It is demostrated theoretically that an unitied computer programming can be worked out convently by this new method. As compared with the existing boundary element method, this new method requires no Laplace or Fourier transfoɹm for dynamic problems and averts iterative computation in increment section for elastoplastic problems.

**Key words** electodynamics, theory of plactic flow, boundary region element method, Betti's reciprocal theorm.