第10卷 第3期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol.10 No.3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1989年7月　　(NATURAL SCIENCE)　　Jul. 1989

恒定应力加速寿命试验下负二项抽样产品可靠性的Bayes分析

吴道明

(应用数学系)

摘要

本文介绍在恒定应力加速寿命试验下负二项抽样模型，参数带有验前负对数 Gamma分布，验前Bata分布及无信息验前分布时，对产品可靠性作 Bayes 分析.主要结果有定理1、2，最后给出算例.

关键词 恒定应力加速寿命试验，负二项抽样，产品可靠性，Beyes分析

一、引言

现代生产中许多产品要求有高可靠性指标，为此必须对产品进行可靠性评定．产品的可靠性评定方法很多，恒定应力加速寿命试验是常用且重要的测试模型，而安排恒定应力加速寿命试验时应满足几项基本假定[1]．应用Bayes分析技术可以摆脱这种约束，仅利用各个应力水平上测试的数据并结合以前累积的验前信息，就可以对产品的可靠性做出评定．这类方法已在不少文章中有介绍．本文介绍对于产品寿命相当长、造价昂贵等原因，只能对少量的产品进行测试，特别对产品测试手段是冲击试验，其寿命是以冲击次数来衡量，负二项抽样模型就是适合这种测试模型．对此抽样模型，应用恒定应力加速寿命试验下产品可靠性的Bayes分析，求得正常应力下产品的可靠度，具有实际应用的价值．

设s_m为正常应力水平，$s_i(i=\overline{1,m-1})$为比s_m更高的应力水平，且有

$$s_1>s_2>\cdots>s_{m-1}>s_m, \tag{1}$$

对每个应力水平s_i下投试r_i个产品，每个产品按几何概型试验，直至产品失效为止．记每次试验不失效的概率为p_i，失效的概率为$1-p_i(i=1,2,\cdots,m)$．对于正常应力水平s_m下，产品在试验过程中可能不失效（因其寿命长），此时，我们采用定次数截尾试验，即在试验一定次数后停止试验．

因应力$S_i>S_{i+1}$，所以有$p_i<p_{i+1}(i=1,\cdots,m-1)$，故有关系式：

本文1989年3月7日收到．

$$P_1<P_2<\cdots<P_{m-1}<P_m<1. \tag{2}$$

假定在应力水平s_i下投试的r_i个产品中，第l件产品共z_l次试验不失效，第z_l+1次失效，则Z_l服从几何分布：

$$P(Z_l=z_l)=P_i^{z_l}(1-P_i),\qquad z_l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ r_i,$$

且 $Z_1,\ Z_2,\ \cdots,\ Z_{r_i}$ 相互独立．从而这r_i个产品试验不失效的总次数 $x_i=\sum_{l=1}^{r_i}Z_l$ 服从负二项分布：

$$p(X_i=x_i)=C_{r_i+x_i-1}^{r_i-1}\ p_i^{x_i}\ (1-p_i)^{r_i},\qquad x_i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

这里p_i为应力水平s_i下产品的可靠度．记

$$p=(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_m),\qquad r=(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_m),\qquad x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m),$$

$$D_m=\{(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_m)\,|\,0<p_1<p_2<\cdots<p_{m-1}<p_m<1\},$$

则其联合条件密度函数为

$$f(x\,|\,p,r)\propto\prod_{i=1}^{m}p(x_i=x_i)\propto\prod_{i=1}^{m}p_i^{x_i}\ (1-p_i)^{r_i}, \tag{3}$$

其中r_i为正整数，$x_i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，且$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m$相互独立．

下面我们应用各个应力水平下试验获得的客观数据，结合验前信息（以往累积的数据）应用Bayes分析技术，对正常应力水平S_m下产品的可靠性作出估计．

二、Pm的Bayes估计

我们分别讨论在不同的验前分布情况下，对P_m作出估计．

1．负对数Gamma验前分布

定理1　假设

(i)式(2)成立．

(ii)参数p_i的先验分布为负对数Gamma分布：

$$\pi(p_i)=\mathscr{L}\Gamma(p_i\,|\,\alpha_i,\ \beta_i)=\beta_i^{\alpha_i}\ [\Gamma(\alpha_i)]^{-1}(-\ln p_i)^{\alpha_i-1}\ p_i^{\beta_i-1}$$

其中α_i为正整数，$\beta_i>0$，$0<p_i<1$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$．则p_m的条件联合密度为

$$f(p_m\,|\,x,\ r)=W_m^{-1}\Big\{\sum_{k_1=0}^{r_1}\sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1}\cdots\sum_{k_{m-1}=0}^{r_{m-1}}\sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha_{(m-1)}-1}W(k_1,\ j_1,\ \cdots,\ k_{m-1},\ j_{m-1})$$

$$\cdot\sum_{k_m=0}^{r_m}C_{r_m}^{k_m}(-1)^{k_m}[g_{(m)}^{\alpha_{(m)}}]^{-1}\mathscr{L}\Gamma(P_m\,|\,\alpha_{(m)},\ g_{(m)}). \tag{4}$$

而在二次损失下，即$L(\hat{p}_m,\ p_m)=(\hat{p}_m-p_m)^2$下，$P_m$的Bayes估计为

$$\hat{P}_m=W^{-1}\sum_{k_1=0}^{r_1}\sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1}\cdots\sum_{k_{m-1}=0}^{r_{m-1}}\sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha_{(m-1)}-1}W(k_1,\ j_1,\ \cdots,\ k_{m-1},\ j_{m-1})\cdot$$

$$\cdot \sum_{k_m=0}^{r_m} C_{r_m}^{k_m}(-1)^{k_m}\left[g_{(m)}+1\right]^{-\alpha(m)}, \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\alpha_{(i)}=\alpha_i+j_{i-1}, \quad j_{(0)}=0;\\
&t_i=x_i+\beta_i, \quad g_{(i)}=g_{(i-1)}+t_i+k_i, \quad g_{(0)}=0;\\
&C_{k_i j_i}=C_{r_i}^{k_i}(-1)^{k_i}\, g_{(i)}^{j_i-\alpha(i)}\,\Gamma(\alpha_{(i+1)})\left[\Gamma(j_i+1)\right]^{-1}, \quad i=1,2,\cdots,m-1\\
&W(k_1,j_1,\cdots,k_{m-1},j_{m-1})=\prod_{i=1}^{m-1} C_{k_i j_i};\\
&W_m=\sum_{k_1=0}^{r_1}\sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1}\cdots\sum_{k_{m-1}=0}^{r_{m-1}}\sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha(m-1)-1} W(k_1,j_1,\cdots,k_{m-1},j_{m-1})\sum_{k_m=0}^{r_m} C_{r_m}^{k_m}(-1)^{k_m} g_{(m)}^{-\alpha(m)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

证明：由式（3）可得p的后验分布

$$f(p\mid x,r)=\frac{\prod_{i=1}^{m-1}(1-p_i)^{r_i}\,p_i^{t_i-1}(-\ln p_i)^{\alpha_i-1}}{\int_{D_m}\prod_{i=1}^{m-1}(1-p_i)^{r_i}\,p_i^{t_i-1}(-\ln p_i)^{\alpha_i-1}dp}$$

$$=\left[W'_m\right]^{-1}\prod_{i=1}^{m-1}(-\ln p_i)^{\alpha_i-1}(1-p_i)^{r_i}\,p_i^{t_i-1}, \tag{7}$$

则P_m的后验分布为

$$\begin{aligned}
f(p_m\mid x,r)=&\left[W'_m\right]^{-1}(\ln p_m)^{\alpha_m-1}(1-p_m)^{r_m}\,p_m^{t_m-1}\\
&\cdot\int_0^{p_m}(-\ln p_{m-1})^{\alpha_{m-1}-1}(1-p_{m-1})^{r_{m-1}}\,p_{m-1}^{t_{m-1}-1}dp_{m-1}\cdots\\
&\cdot\int_0^{p_3}(-\ln p_2)^{\alpha_2-1}(1-p_2)^{r_2}\,p_2^{t_2-1}dp_2\\
&\cdot\int_0^{p_2}(-\ln p_1)^{\alpha_1-1}(1-p_1)^{r_1}\,p_1^{t_1-1}dp_1.
\end{aligned} \tag{8}$$

为求解$f(p_m\mid x,r)$，先求其分子中的积分部分I。令

$$\begin{aligned}
I=&\int_0^{p_m}(-\ln p_{m-1})^{\alpha_{m-1}-1}(1-p_{m-1})^{r_{m-1}}\,p_{m-1}^{t_{m-1}-1}dp_{m-1}\cdots\\
&\cdot\int_0^{r_2}(-\ln p_1)^{\alpha_1-1}(1-p_1)^{r_1}\,p_1^{t_1-1}dp_1,
\end{aligned} \tag{9}$$

$$I_i=\int_0^{p_{i+1}}(-\ln p_i)^{\alpha_i-1}(1-p_i)^{r_i}\,p^{t_i-1}I_{i-1}dp_i,\quad i=1,2,\cdots,m-1,\quad I_0=1, \tag{10}$$

以下反复利用公式$\int_x^{+\infty}e^{-y}y^{\alpha-1}dy=\Gamma(\alpha)\sum_{j=0}^{\alpha-1}\frac{x^j}{j!}e^{-x}$求解$I_i$。

$$I_1=\int_0^{r_2}(-\ln p_1)^{\alpha_1-1}(1-p_1)^{r_1}\,p^{t_1-1}dp_1=\cdots$$

$$=\sum_{k_1=0}^{r_1} C_{r_1}^{k_1}(-1)^{k_1}\int_0^{p_2}(-\ln p_1)^{\alpha_1-1} p^{t_1+k_1-1}dp_1$$

$$=\sum_{k_1=0}^{r_1} C_{r_1}^{k_1}(-1)^{k_1}\int_{-g_{(1)}\ln p_2}^{+\infty} g_{(1)}^{-\alpha_1} y^{\alpha_1-1}e^{-y}dy \qquad (令 y=-g_{(1)}\ln p_1)$$

$$=\sum_{k_1=0}^{r_1}\sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1} C_{r_1}^{k_1}(-1)^{k_1} g^{j_1-\alpha_{(1)}}\Gamma(\alpha_1)[\Gamma(_1+1)]^{-1}(-\ln p_2)^{j^1} p_2^{g_{(1)}}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_{(2)})}\sum_{k_1=0}^{r_1}\sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1} W(k_1, j_1)(-\ln p_2)^{j_1} p_2^{g_{(1)}}, \tag{11}$$

$$I_2=\int_0^{p_3}(-\ln p_2)^{\alpha_2-1}(1-p_2)^{r_2} p_2^{t_2-1} I_1 dp_2$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_{(2)})}\sum_{k_1=0}^{r_1}\sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1} W(k_1, j_1)\int_0^{p_3}(-\ln p_2)^{\alpha_2+j_1-1}(1-p_2)^{r_2} p_2^{t_2+g_{(1)}-1}dp_2$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_{(2)})}\sum_{k_1=0}^{r_1}\sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1} W(k_1, j_1)\sum_{k_2=0}^{r_2} C_{r_2}^{k_2}(-1)^{k_2}$$

$$\cdot\int_0^{p_3}(-\ln p_2)^{\alpha_{(2)}-1} p_2^{g_{(2)}-1}dp_2 \qquad (令 y=-g_{(2)}\ln p_2)$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_{(2)})}\sum_{k_1=0}^{r_1}\sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1} W(k_1, j_1)\sum_{k_2=0}^{r_2} C_{r_2}^{k_2}(-1)^{k_2}\int_{-g_{(2)}\ln p_3}^{+\infty} g_{(2)}^{-\alpha_{(2)}} y^{\alpha_{(2)}-1}e^{-y}dy$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_{(2)})}\sum_{k_1=0}^{r_1}\sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1} W(k_1, j_1)$$

$$\cdot\sum_{k_2=0}^{r_2} C_{r_2}^{k_2}(-1)^{k_2} g_{(2)}^{j_2-\alpha_{(2)}}\Gamma(\alpha_{(2)})[\Gamma(j_3+1)]^{-1}(-\ln p_3)^{j_2} p_3^{g_{(2)}}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_{(2)})}\sum_{k_1=0}^{r_1}\sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1}\sum_{k_2=0}^{r_2}\sum_{j_2=0}^{\alpha_{(2)}-1} W(k_1, j_1, k_2, j_2)(-\ln p_3)^{j_2} p_3^{g_{(2)}}, \tag{12}$$

依次类推可得

$$I=\int_0^{p_m}(-\ln p_{m-1})^{\alpha_{m-1}-1}(1-p_{m-1})^{r_{m-1}} p_{m-1}^{t_{m-1}-1} I_{m-2}dp_{m-1}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_{(m)})}\sum_{k_1=0}^{r_1}\sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1}\cdots\cdot$$

$$\cdot \sum_{k_{m-1}=0}^{r_{m-1}} \sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha_{(m-1)}-1} W(k_1,j_1,\cdots,k_{m-1},j_{m-1})(-\ln p_m)^{j_{m-1}} p_m^{g(m)}, \tag{13}$$

从而

$$f(p_m|x,r) = [W'_m]^{-1}(-\ln p_m)^{\alpha_m-1}(1-p_m)^{r_m} p_m^{t_m-1} I$$

$$= [W'_m]^{-1} \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_{(m)})} \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1} \cdots \sum_{k_{m-1}=0}^{r_{m-1}} \sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha_{(m-1)}-1} W(k_1,j_1,\cdots,k_{m-1},j_{m-1})$$

$$\cdot (-\ln p_m)^{\alpha_{(m)}-1}(1-p_m)^{r_m} p_m^{g(m)+t_m-1}$$

$$= [W'_m]^{-1} \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_{(m)})} \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1} \cdots \sum_{k_{m-1}=0}^{r_{m-1}} \sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha_{(m-1)}-1} W(k_1,j_1,\cdots,k_{m-1},j_{m-1})$$

$$\cdot \sum_{k_m=0}^{r_m} C_{r_m}^{k_m}(-1)^{k_m}(-\ln p_m)^{\alpha_{(m)}-1} p_m^{g(m)-1}$$

$$= [W'_m]^{-1}\Gamma(\alpha_1) \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1} \cdots \sum_{k_{m-1}=0}^{r_{m-1}} \sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha_{(m-1)}-1} W(k_1,j_1,\cdots,k_{m-1},j_{m-1})$$

$$\cdot \sum_{k_m=0}^{r_m} C_{r_m}^{k_m}(-1)^{k_m}(-\ln p_m)^{\alpha_{(m)}-1} p_m^{g(m)-1}$$

$$= [W'_m]^{-1}\Gamma(\alpha_1) \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1} \cdots \sum_{k_{m-1}=0}^{r_{m-1}} \sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha_{(m-1)}-1} W(k_1,j_1,\cdots,k_{m-1},j_{m-1})$$

$$\cdot \sum_{k_m=0}^{r_m} C_{r_m}^{k_m}(-1)^{k_m}[g_{(m)}]^{-\alpha_{(m)}} \mathscr{L}\Gamma(p_m|\alpha_{(m)},g_{(m)}). \tag{14}$$

由于$\int_0^1 f(p_m|x,r)dp_m = 1$，故有

$$W'_m = \Gamma(\alpha_1) \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1} \cdots \sum_{k_{m-1}=0}^{r_{m-1}} \sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha_{(m-1)}-1} W(k_1,j_1,\cdots,k_{m-1},j_{m-1}) \sum_{k_m=0}^{r_m} C_{r_m}^{k_m}(-1)^{k_m} g_{(m)}^{-\alpha_{(m)}}$$

$$= \Gamma(\alpha_1)W_m. \tag{15}$$

将式（15）代入式（14），即得式（4）成立。

在二次损失下，p_m 的 Bayes 估计为

$$\hat{p}_m = E(p_m|x) = \int_0^1 p_m f(p_m|x,r)dp_m$$

$$= W_m^{-1} \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1} \cdots \sum_{k_{m-1}=0}^{r_{m-1}} \sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha_{(m-1)}-1} W(k_1,j_1,\cdots,k_{m-1},j_{m-1})$$

$$\cdot \sum_{k_m=0}^{r_m} C_{r_m}^{k_m}(-1)^{k_m} \frac{1}{\Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 (-\ln p_m)^{\alpha(m)-1} p_m^{g(m)} dp_m$$

$$= [W_m]^{-1} \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1} \cdots \sum_{k_{m-1}=0}^{r_{m-1}} \sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha_{(m-1)}-1} W(k_1,j_1,\cdots,k_{m-1},j_{m-1}) \sum_{k_m=0}^{r_m} C_{r_m}^{k_m}(-1)^{k_m}$$

$$\cdot [g_{(m)}+1]^{-\alpha(m)}.$$

定理 1 证毕。

系 1　若令定理 1 中的条件(ii)中 $\alpha_i=\beta_i=1$，则 $\pi(p_i)=1$ 是验前 $U(0,1)$ 分析。所以当 $\alpha_i=\beta_i=1$ 时，定理 1 的结果为验前 $U(0,1)$ 分布下的 Bayes 估计。

系 2　当 $r_i=1$ 时，定理 1，系 1 的结果变为几何抽样模型下的结论。

2. Bata 验前分布

定理 2　假设

(i) 式(2)成立。

(ii) 参数 p_i 的验前分布是 Bata 分布

$$\pi(p_i)=\beta(p_i|a_i,b_i)=[\beta(a_i,b_i)]^{-1}p_i^{a_i-1}(1-p_i)^{b_i-1},$$

其中 a_i、b_i 为正整数，$i=1,2,\cdots,m$。则 p_m 的条件密度为

$$f(p_m|x,r)=W_m^{-1}\Big\{\sum_{h_1=f_1}^{g_1}\sum_{h_2=f_2}^{g_2}\cdots\sum_{h_{m-1}=f_{m-1}}^{g_{m-1}}W(h_1,\cdots,h_{m-1})B(f_m,g_{m-1}+v_m-h_{m-1})\cdot B(p_m|f_m,g_{m-1}+v_m-h_{m-1})\Big\}\tag{16}$$

而在二次损失下，p_m 的 Bayes 估计为

$$\hat{p}_m=W_m^{-1}\Big\{\sum_{h_1=f_1}^{g_1}\cdots\sum_{h_{m-1}=f_{m-1}}^{g_{m-1}}W(h_1,\cdots,h_{m-1})B(f_m+1,g_{m-1}+v_m-h_{m-1})\Big\},\tag{17}$$

其中

$$\begin{cases}u_i=x_i+a_i, \quad v_i=r_i+b_i;\\ f_i=u_i+h_{i-1},\ h_0=0, \quad g_i=v_i+u_i+g_{i-1}-1, \quad g_0=0;\\ C_{h_i}=C_{g_i}^{h_i}B(f_i,\ g_{i-1}+v_i-h_{i-1}), \quad i=1,2,\cdots,m-1;\\ W(h_1,h_2,\cdots,h_{m-1})=\prod_{i=1}^{m-1}C_{h_i};\\ W_m=\sum_{h_m=f_1}^{g_1}\cdots\sum_{h_{m-1}=f_{m-1}}^{g_{m-1}}W(h_1,\cdots,h_{m-1})B(f_m,\ g_{m-1}+v_m-h_{m-1}).\end{cases}\tag{18}$$

证　由式(3)可得 p 的后验分布

$$f(P|x,y)=\frac{\prod_{i=1}^{m}p_i^{i+a_i-1}(1-p_i)^{r_i+b_i-1}}{\int_{D_m}\prod_{i=1}^{m}p_i^{x_i+a_i-1}(1-p_i)^{r_i+b_i-1}dp},\tag{19}$$

则 p_m 的条件密度为

$$f(p_m|x,r)=W_m^{-1}p_m^{u_m-1}(1-p_m)^{v_m-1}\int_0^{p_m}p_{m-1}^{u_{m-1}-1}(1-p_{m-1})^{v_{m-1}-1}dp_{m-1}\cdots\cdot\int_0^{p_2}p_1^{u_1-1}(1-p_1)^{v_1-1}dp_1.\tag{20}$$

为求解 $f(p_m|x,r)$，先求其分子的积分部分，令

$$I=\int_0^{p_m}p_{m-1}^{u_{m-1}-1}(1-p_{m-1})^{v_{m-1}-1}\cdots\int_0^{p_2}p_1^{u_1-1}(1-p_1)^{v_1-1}dp_1\tag{21}$$

$$I_i=\int_0^{p_{i+1}} p_i^{u_i-1}(1-p_i)^{v_i-1} I_{i-1} d p_i, \qquad i=1,2,\cdots,m-1, \qquad I_0=1. \tag{22}$$

下面反复利用公式$\int_0^{w} x^{u-1}(1-x)^{v-1} d x=B(u, v) \sum_{j=u}^{u+v-1} C_{u+v-1}^{j} y^{j}(1-y)^{u+v-j-1}$，

求解I_i

$$I_1=\int_0^{p_2} p_1^{u_1-1}(1-p_1)^{v_1-1} d p_1=B(u_1, v_1) \sum_{h_1=f_1}^{g_1} C_{g_1}^{h_1} p_2^{h_1}(1-p_2)^{g_1-h_1}$$

$$=\sum_{h_1=f_1}^{g_1} W(h_1) p_2^{h_1}(1-p_2)^{g_1-h_1}, \tag{23}$$

$$I_2=\int_0^{p_3} p_2^{u_2-1}(1-p_2)^{v_2-1} I_1 d p_2,$$

$$I_2=\sum_{h_1=f_1}^{g_1} W(h_1) \int_0^{p_3} p_2^{f_2-1}(1-p_2)^{g_1+v_2-h_1-1} d p_2$$

$$=\sum_{h_{1}=f_1}^{g_1} W(h_1) \sum_{h_2=f_2}^{g_2} C_{g_2}^{h_2} B(f_2, g_1+v_2-h_1) p_3^{h_2}(1-p_3)^{g_2-h_2}$$

$$=\sum_{h_1=f_2}^{g_1} \sum_{h_2=f_2}^{g_2} W(h_1, h_2) p_3^{h_2}(1-p_3)^{g_2-h_2}, \tag{24}$$

依次类推可得

$$I=\int_0^{p_m} p_{m-1}^{u_{m-1}-1}(1-p_{m-1})^{v_{m-1}-1} \cdot I_{m-2} d p_{m-1}$$

$$=\sum_{h_1=f_1}^{g_1} \sum_{h_2=f_2}^{g_2} \cdots \sum_{h_{m-1}=f_{m-1}}^{g_{m-1}} W(h_1, h_2, \cdots, h_{m-1}) p_m^{h_{m-1}}(1-p_m)^{g_{m-1}-h_{m-1}}, \tag{25}$$

从而

$$f(p_m | x, r)=W_m^{-1}\left\{p_m^{u_m-1}(1-p_m)^{v_m-1} \cdot I\right\}$$

$$=W_m^{-1}\left\{\sum_{h_1=f_1}^{g_1} \cdots \sum_{h_{m-1}=f_{m-1}}^{g_{m-1}} W(h_1, \cdots, h_{m-1}) p_m^{f_m-1}(1-p_m)^{g_{m-1}+v_m-h_{m-1}}\right\}$$

$$=W_m^{-1}\left\{\sum_{h_1=f_1}^{g_1} \cdots \sum_{h_{m-1}=f_{m-1}}^{g_{m-1}} W(h_1, \cdots, h_{m-1}) B(f^m, g_{m-1}+v_m-h_{m-1})\right.$$

$$\left.\cdot B(p_m f_m, g_{m-1}+v_m-h_{m-1})\right\}.$$

由于$\int_0^1 f(p_m | x, r) d p_m=1$，故有

$$W_m=\int_0^1 p_m^{u_m-1}(1-p_m)^{v_m-1} I d p_m$$

$$=\sum_{h_1=f_1}^{g_1} \sum_{f_2=h_2}^{g_2} \cdots \sum_{h_{m-1}=f_{m-1}}^{g_{m-1}} W(h_1, h_2, \cdots, h_{m-1}) B(f_m, g_{m-1}+v_m-h_{m-1}).$$

故在二次损失下，p_m 的 Bayes 估计为

$$\hat{p}_m = E(p_m|x) = \int_0^1 p_m f(p_m|x,r)\,dp_m$$

$$= W_m^{-1}\int_0^1 p_m^{v_m}(1-p_m)^{r_m-1} I\,dp$$

$$= W_m^{-1}\left\{\sum_{f_1=h_1}^{g_1}\sum_{h_2=f_2}^{g_2}\cdots\sum_{h_{m-1}=f_{m-1}}^{g_{m-1}} W(h_1,\cdots,h_{m-1})B(f_m+1, g_{m-1}+v_m-h_{m-1})\right\}.$$

定理 2 证毕。

值得注意的是：定理 1 、 2 中的结论按产品在正常应力水平 s_m 下试验，共 z_l 次不失效，而第 z_l+1次失效的情形下推导而得。如果产品在正常应力水平 s_m下试验一定次数后不失效，按定次数 x_m 截尾停止试验。此时，联合密度函数为

$$f(x|p,r)\propto k\prod_{i=1}^{m-1} p_i^{x_i}(1-p_i)^{r_i} p_m^{x_m}, \tag{27}$$

则定理 1 的结果

$$\hat{p}_m = W_m^{-1}\sum_{k_1=0}^{r_1}\sum_{j_1=0}^{\alpha_1-1}\cdots\sum_{k_{m-1}=0}^{r_{m-1}}\sum_{j_{m-1}=0}^{\alpha(m-1)-1} W(k_1,j,\cdots,k_{m-1},j_{m-1})\cdot\left[g_{(m-1)}+t_m+1\right]^{-\alpha(m)}; \tag{28}$$

定理 2 的结果

$$\hat{p}_m = W_m^{-1}\left\{\sum_{h_1=f_1}^{g_1}\sum_{h_2=f_2}^{g_2}\cdots\sum_{h_{m-1}=f_{m-1}}^{g_{m-1}} W(h_1,\cdots,h_{m-1})B(f_m+1, g_{m-1}-h_{m-1})\right\}. \tag{29}$$

三、验前分布参数的经验 Bayes 估计

为简明叙述，下面论述均略去下标 i。

1. 定理 1 中的参数 α、β 的估计

因验前分布

$$\pi(p) = \frac{\beta^\alpha}{p(\alpha)}(\ln p)^{\alpha-1}p^{\beta-1}, \qquad \alpha\text{为正整数}，\beta>0,$$

则 x 的边际分布为

$$g(x,\alpha,\beta)\propto\int_0^1 L(p,x)\pi(p)\,dp\propto\int_0^1 p^{x+\beta-1}(1-p)^r(-\ln p)^{\alpha-1}dp,$$

即

$$q(x,\alpha,\beta) = c\sum_{k=0}^{r} c_r^k(-1)^k\int_0^1 p^{x+\beta+k-1}(-\ln p)^{\alpha-1}dp$$

$$= c\sum_{k=0}^{k} c_r^k(-1)^k\Gamma(\alpha)(x+\beta+k)^{-\alpha}.$$

由条件 $\sum_{x=0}^{\infty}(g(x,\alpha,\beta)=1$，可确定 c：

$$c=1/\Gamma(\alpha)\sum_{k=0}^{r}c_r^k(-1)^k\sum_{x=0}^{\infty}(x+\beta+k)^{-\alpha},$$

所以

$$g(x,\alpha,\beta)=\frac{\sum_{k=0}^{r}c_r^k(-1)^k(x+\beta+k)^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^{r}c_r^k(-1)^k\sum_{x=0}^{\infty}(x+\beta+k)^{-\alpha}}.$$

应用极大似然估计法时，将遇到混合整数规划问题，难于实现，故应用矩估计

$$Ex=\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{\sum_{k=0}^{r}c_r^k(-1)^k(x+\beta+k)^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^{r}c_r^k(-1)^k\sum_{x=0}^{\infty}(x+\beta+k)^{-\alpha}},$$

$$Ex^2=\sum_{x=0}^{\infty}x^2\frac{\sum_{k=0}^{r}c_r^k(-1)^k(x+\beta+k)^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^{r}c_r^k(-1)^k\sum_{x=0}^{\infty}(x+\beta+k)^{-\alpha}}.$$

设在应力水平 s_i 下 $(i=\overline{1\cdots m})$，以往已做过 n 次试验，其数据为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$（略去指标 i），有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}x_i=\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{\sum_{k=0}^{r}c_r^k(-1)^k(x+\beta+k)^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^{r}c_r^k(-1)^k\sum_{x=0}^{\infty}(x+\beta+k)^{-\alpha}}$$

$$\approx\sum_{x=0}^{M}x\frac{\sum_{k=0}^{r}c_r^k(-1)^k(x+\beta+k)^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^{r}c_r^k(-1)^k\sum_{x=0}^{M}(x+\beta+k)^{-\alpha}},\tag{30}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{x=0}^{\infty}x^2\frac{\sum_{k=0}^{r}c_r^k(-1)^k(x+\beta+k)^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^{r}c_r^k(-1)^k\sum_{x=0}^{\infty}(x+\beta+k)^{-\alpha}}$$

$$\approx\sum_{x=0}^{M}x^2\frac{\sum_{k=0}^{r}c_r^k(-1)^k(x+\beta+k)^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^{r}c_r^k(-1)^k\sum_{x=0}^{M}(x+\beta+k)^{-\alpha}}.\tag{31}$$

其中 M 是充分大的正整数，r 为定数。

利用计算机可计算出同时满足式（30）、（31）的近似解 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$，$\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 作为参数 α，β 的矩估计值。

2．定理1中参数 a、b 的估计

因验前分布

$$\pi(p)=[B(a,b)]^{-1}p^{a-1}(1-p)^{b-1},$$

则 x 的边际分布为

$$g(x,a,b)=\left[\sum_{x=0}^{\infty}B(x+a,\ r+b)\right]^{-1}B(x+a,\ r+b).$$

与三、1同理有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}x_i=Ex=\sum_{x=0}^{\infty}xB(x+a,r+b)\Big/\sum_{x=0}^{\infty}B(x+a,r+b)$$

$$\approx\sum_{x=0}^{M}xB(x+a,r+b)\Big/\sum_{x=0}^{M}B(x+a,r+b), \tag{32}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}x_i^2=Ex^2=\sum_{x=0}^{\infty}x^2B(x+a,r+b)\Big/\sum_{x=0}^{\infty}B(x+x,r+b)$$

$$\approx\sum_{x=0}^{M}x^2B(x+a,r+b)\Big/\sum_{x=0}^{M}B(x+a,r+b), \tag{33}$$

其中 M 是充分大的正整数，r 是定数。

利用计算机可以计算出同时满足式（32）、（33）的近似解 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$。$\hat{a}$ 和 $\hat{b}$ 就是参数 a 和 b 矩估计值。

四、算　例

这里只举简单算例，借用一些数据说明上述方法的实际计算意义。

某种电子产品寿命长，价格昂贵，需要测试正常应力下承受某种冲击（如脉冲，振动等）的可靠度。对此，设计恒定应力加速寿命试验进行测试。设正常应力水 s_3，设计更高应力 s_1,s_2 满足 $s_1>s_2>s_3$，每个应力水平均投入同批产品三只。因应力加大，每次冲击试验成功的概率随应力加大而减小，即有 $0<p_1<p_2<p_3<1$。根据试验所得的数据，结合以往累积的信息估计该种产品的可靠度。有关测试的数据如表1所示。

表　1

应力水平	投入测试产品数	各被测试产品冲击成功的次数	各应力水平下产品冲击成功总次数
s_1	3	$z_1=262,\ z_2=253,\ z_3=302$	$x_1=\sum_{l=1}^{3}z_l=819$
s_2	3	$z_1=395,\ z_2=316,\ z_3=415$	$x_2=\sum_{l=1}^{3}z_l=1126$
s_3	3	$z_1=661,\ z_2=630,\ z_3=684$	$x_3=\sum_{l=1}^{3}z_l=1975$

因无验前信息，取参数 p_i 验前分布为

$$\pi(p_i)=1,\qquad 0<p_i<1,\qquad i=1,2,3.$$

这时利用定理2的特殊情况系3的结果来求解（以下计算公式参见（16）、（17）、（18）。所以

$a_i=b_i=1$，　$i=1,23$，　$u_1=x_1+a_1=820$，　$u_2=x_2+a_2=1127$，　$u_3=x_3+a_3=1976$，

$v_1=r+b_1=4$，　$v_2=r+b_2=4$，　$v_3=r+b_3=4$，　$g_1=u_1+v_1+g_0-1=823$；

$g_2=u_2+v_2+g_1-1=1953$，　$f_1=u_1+h_0=820$，　$f_2=u_2+h_1=1127+h_1$，

$f_3=u_3+h_2=1976+h_2$，

$$c_{h_1}=c_{g_1}^{h_1}B(f_1,g_0+v_1-h_0)=c_{823}^{h_1}B(820,4),$$

$$c_{h_2}=c_{g_2}^{h_2}B(f_2,g_1+v_2-h_1)=c_{1953}^{h_2}B(1127+h_1,827-h_1),$$

$$W(h_1,h_2)=\prod_{i=1}^{2}C_{h_i}=c_{823}^{h_1}B(820,4)c_{1953}^{h_2}B(1127+h_1,827-h_1),$$

$$W_3=\sum_{f_1=h_1}^{g_1}\sum_{h_2=f_2}^{g_2}W(h_1,h_2)B(f_3,g_2+v_3-h_2)$$

$$=\sum_{h_1=820}^{823}\sum_{h_2=f_1}^{1952}c_{823}^{h_1}B(820,4)c_{1953}^{h_1}B(1127+h_1,827-h_1)B(f_3,1957-h_2)$$

$$=\sum_{h_2=1947}^{1953}c_{823}^{820}B(820,4)c_{1953}^{h_2}B(1947,7)B(1976+h_2,1957-h_2)$$

$$+\sum_{h_2=1948}^{1953}c_{823}^{821}B(820,4)c_{1953}^{h_2}B(1948,6)B(1976+h_2,1957-h_2)$$

$$+\sum_{h_2=1950}^{1953}c_{823}^{822}B(820,4)c_{1953}^{h_1}B(1949,5)B(1976+h_2,1957-h_2$$

$$+\sum_{h_2=1950}^{1953}c_{823}^{823}B(820,4)c_{1953}^{h_2}B(1950,4)B(1976+h_2,1957-h_2),$$

$$\hat{p}_3=W_3^{-1}\left\{\sum_{h_1=f_1}^{g_1}\sum_{h_1=f_2}^{g_2}W(h_1,h_2)B(f_3+1,\ g_2+v_3-h_2)\right\}$$

$$=W_3^{-1}\left\{\sum_{h_1=820}^{823}\sum_{h_2=f_2}^{1953}c_{823}^{h_1}B(820,4)c_{1953}^{h_2}B(1127+h_1,827-h_1)\right.$$

$$\cdot B(1977,1957-h_2)$$

$$=W_3^{-1}\left\{\sum_{h_3=1947}^{1953}c_{823}^{820}B(820,4)c_{1953}^{h_2}B(1947,7)B(1977,1957-h_2)\right.$$

$$+\sum_{h_2=1948}^{1953}c_{823}^{821}B(820,4)c_{1953}^{h_2}B(1948,6)B(1977,1957-h_2)+$$

$$+\sum_{h_2=1950}^{1953} c_{823}^{823} B(820,4)\, c_{1953}^{h_2} B(1949,5) B(1966,1957-h_2)$$

$$+\sum_{h_2=1950}^{1953} c_{823}^{820} B(820,4)\, c_{1953}^{h_2} B(1950,4) B(1977,1957-h_2)\Big\}.$$

由计算机计算结果：$\hat{p}_3 \approx 0.9983$，这就求得该产品在正常应力水平下承受某种冲击的可靠度。

五、小　　结

从算例看到每次应力测试只用 3 只，3 个应力水平才用 9 只，故测试的数据也只有 9 个数据，根据这些数据就可求得产品可靠度。本文方法运用于小样本的测试模型，并且几乎设有什么约束条件，这是经典方法难于做到的，但本文方法无法用来外推预测。

参　考　文　献

〔1〕茆诗松、王玲玲，可靠性统计，华东师范大学出版社，（1984）。
〔2〕K.C 卡帕、L.R.兰伯森著，张智铁译，工程设计的可靠性，机械工业出版社，（1984）。
〔3〕戴树森等，可靠性试验及其统计分析，国防工业出版社，（1983）。

Bayes Aualysis of Reliability for Products of Negative Binomial Sampling under Constant Stress Accelerated Life Testing

Wu Daoming

Abstract

This paper deals with Bayes analysis of the reliability of products. The analysis was carried under constant stress accelerated life testing with a negative binomial sampling model, of which the parameters showing prior negative logarithmie gamma distribution, prior beta distribution and noninformation prior distribution. The main results are conclnded as Theorem 1 and 2. The examples are given finally.

Key words accelerated life testing-constants-stress, negative binomial sampling, reliability for prodacts, Bages analysis