第10卷 第3期 华侨大学学报自然科学版 Vol.10 No.3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1989年7月 (NATURAL SCIENCE) Jul.1989

紧密填装法

朱尔圆

（应用数学系）

摘要

本文提出一类平面填装问题的近似解法——紧密填装法，并且建立一个紧密填装与最优填装目标函数的渐近误差估计公式。

关键词 紧密填装，最优填装，误差估计

一、引言

在生产实际中有这样一些问题：如在水泥材料的合成中、要求在一个容器内，用各种规格的小颗粒来填装该容器，使其剩余空间最小；又如在计算机芯片生产中，要求在一块大的晶片上，切割下尽可能多的圆芯片πr^2。这类问题都是属于填装问题。在理论研究中，如组合数学中著名的"背包问题"、"装箱问题"[1]，也都属于填装问题。填装问题可分为空间问题和平面问题。这些问题都属于NP难题[2]，它们至今还未找到多项式时间算法。因此寻找这些问题的有效近似解法就显得十分必要。如文〔3〕中介绍一类平面填装的一个近似解法，也是一个图案安排问题，即要在一个$S\times S$的正方形中填入最多个互无迭置的单位正方形。R.L.Grahan证明了当S充分大时，存在一个安置方法，它使留下没有盖住的面积至多为$S^{(3-\sqrt{3})/2}$个平方单位。

本文讨论这样一个填装问题：对于所给长方形$\bar{V}=a\times b$，以及一系列半径依次为$c_1,c_2,\cdots,c_m$的圆$\pi c_1^2,\pi c_2^2,\cdots,\pi c_m^2$，其中$a,b\gg c_i, i=1,2,\cdots,m$。问这些圆如何填装使目标函数

$$f_{(x^*)}=\pi c_1^2x_1^*+\pi c_2^2x_2^*+\cdots+\pi c_m^2x_m^*, \qquad (1)$$

达到最大值，其中

$$x_1^*,x_2^*,\cdots,x_m^*,$$

分别表示填入$\bar{V}=a\times b$中半径为$c_1,c_2,\cdots,c_m$之圆的个数。这里我们提出一个近似解法，即所谓紧密填装法，并且建立一个紧密填装法与最优填装法目标函数的渐近误差估计式。

本文1988年9月1日收到。

二、紧密填装法

1. 紧密填装法步骤

给出矩形 $\bar{V}=a\times b$，和半径为 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 的圆，且 $a,b\gg c_i,i=1,2,\cdots,m$；$m\gg 1$，从 $\bar{V}$ 的左上角开始自左向右，自上而下紧密连接填装，如图1所示。这种紧密填装的优化过程是依次用所给的圆来填装，选取使总填装面积最大的那种圆作为第一轮填装圆，其半径记作 r_1，记沿 a 边第一行的圆的个数是 m_1，第二行圆的个数是 $m_2(0\leqslant m_1-m_2\leqslant 1)$，第三行是 m_1 个，第四行是 m_2 个，依次填下去到不能填为止。总行数记为 n_1，记 $n=\min\{m_1,m_2\}$。下面说明以下三个问题：第一，矩形 $\bar{V}$ 中填装半径为 r_1 的圆的个数记作 x_1，则当 n_1 是偶数时

$$x_1=(1/2)n_1(m_1+m_2),$$

当 n_1 为奇数时

$$x_1=(1/2)(n_1+1)m_1+(1/2)(n_1-1)m_2,$$

第二，在矩形 $\bar{V}$ 中第一轮填装了半径为 r_1 的 x_1 个圆之后，剩余部分所产生的独立小区域的个数记作 y_1，可以对行进行归纳证明，得

$$y_1=2x_1+2.$$

在图1中的阴影部分算作2个。由于 $x_1\gg 1$，故记

$$y_1=2x_1+1,$$

第三，这些独立小区域中数目最多的是那些面积最小的小区域，记作 S_2，他们的形状是由三个半径为 r_1 的圆相切而成的。其面积是 $S_2=(\sqrt{3}-(\pi/2))r_1^2$[1]，这样第一轮紧密填装完毕。

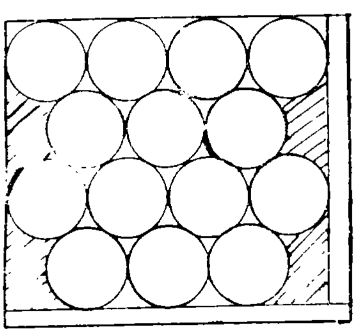


图　1

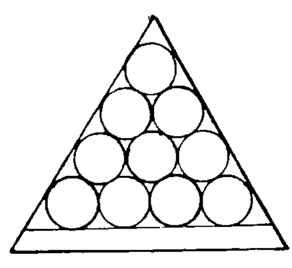


图　2

之后，进行第二轮紧密填装(图2)，方法如下：从上一轮填装完之后，取最坏情况，独立小区域面积都看成 S_2，$S_2=(\sqrt{3}-(\pi/2))r_1^2$，把 S_2 近似地看作以 S_2 为面积的等边三角形，其边长记作 a_2，则

$$a_2=2\sqrt{S_2}/\sqrt[4]{3},$$

把所给的诸圆(当然去掉半径为 r_1 的圆)依次紧密填入这个正三角形中，并且挑选使其填装总面积最大的那种圆，作为第二轮填装圆，半径记作 r_2，用 r_2 表示独立小区域中填入圆的

1) 这里把区域与其面积记成相同符号。

行数，也是最后一行填入圆的个数，这里有

$$n_2=[(a_2/2r_2)-\sqrt{3}+1],$$

方括号表示取整．小区域中填入圆的个数为 x_2

$$x_2=(1/2)n_2(n_2+1),$$

剩下的独立小区域的个数记作 y_2，则

$$y_2=2x_2+1,$$

独立小区域中面积最小者记作 S_3

$$S_3=[\sqrt{3}-(\pi/2)]r_2^2,$$

这时第二轮填装完毕，以后重复上面的方法，再作下一轮紧密填装，直到剩下的独立小区域不能再填入任何圆．

2．紧密填装的数学表达式

设已填入的圆半径为 $r_1,r_2,\cdots,r_k$，未填入的圆半径为 $r_{k+1},\cdots,r_m$．记 S_i 表示填入 $(i-1)$ 次之后的独立小区域，面积为

$$S_1=V=a\times b,$$

$$S_i=(\sqrt{3}-\pi/2)r_{i-1}^2,\qquad i=2,3,\cdots,k,$$

x_i 表示填入 S_i 中圆的个数 $i=1,2,\cdots,k$，记 a_i 表示面积为 S_i 的正三角形边长

$$a_i=2\sqrt{S_i}/\sqrt[4]{3},\qquad i=2,3,\cdots,k,$$

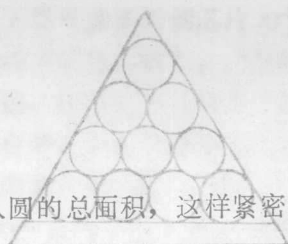
记 n_i 表示填入 i 次时，独立小区域中圆的行数

$$n_i=[(a_i/2r_i)-\sqrt{3}+1],\qquad i=2,3,\cdots,k,$$

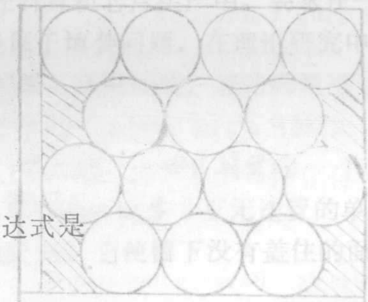
n_1 是第一轮圆的行数，记 m_1,m_2 分别是第一轮填装时第一行和第二行的填装个数．记

$$n=\min\{m_1,m_2\},$$

及



$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{bmatrix},$$



$f(x)$ 表示填入圆的总面积，这样紧密填装法的数学表达式是

$$S\cdot t\left\{\begin{array}{ll}\max f(x)=\sum\limits_{i=1}^{m}\pi r_i^2(\lambda_{1\,i-1}/\lambda_{2\,i-1}), & \\ \lambda_{1i}=\lambda_{1\,i-1}-\pi r_i^2x_i(\lambda_{1\,i-1}/\lambda_{2\,i-1}), & i=1,2,\cdots,k,\\ \lambda_{2i}=(\lambda_{2\,i-1}-\pi r_i^2x_i)/(2x_i+1), & i=1,2,\cdots,k,\\ \lambda_{10}=\lambda_{20}=V, & \\ \lambda_{1i}=\lambda_{2i}=1, & i=k+1,\cdots,m,\\ x_1=(1/2)n_1m_1+(1/2)n_1m_2, & (n_1\text{ 为偶数时}),\\ x_1=(1/2)(n_1+1)m_1+(1/2)(n_1-1)m_2, & (n_1\text{ 为奇数时}),\\ x_i=(1/2)n_i(n_i+1), & i=2,3,\cdots,k,\\ x_i=0, & i=k+1,\cdots,m,\end{array}\right.\qquad(2)$$

采用紧密填装法表示成问题（2）来近似地表达原始问题（1），即

$$f_{(x)}^{*}=\pi c_1^2 x_1^* + \pi c_2^2 x_2^* + \cdots + \pi c_m^2 x_m^*, \tag{3}$$

而问题（2）可以递推逐步求解。

三、误差分析

第一轮紧密填装个数的误差限：

定理 1 设在矩形 $V = a\times b$ 中，记 g 表示第一轮紧密填装的个数，g^* 为最优填装个数，则

$$g/g^* \geqslant nn_1\pi/2\sqrt{3}(n+2)[n_1+(2/\sqrt{3})].$$

证

$$g \geqslant nn_1,$$

而

$$\pi r_1^2 g^* \leqslant ab \leqslant (n+2)\cdot 2r_1\cdot(\sqrt{3}r_1n_1+2r_1),$$

$$g^* \leqslant \{2\sqrt{3}(n+2)[n_1+(2/\sqrt{3})]\}/\pi,$$

故

$$g/g^* \geqslant n_1n_2\pi/2\sqrt{3}(n+2)[n_1+(2/\sqrt{3})],$$

当 n，n_1 充分大时

$$g/g^* \approx 0.90,$$

第二轮紧密填装个数的误差限：

定理 2 与在半径为 r_1 的三个大圆相切围成的曲边三角形等积的正三角形中，设放入半径为r_2的小圆最优个数是 g^* 个，而紧密填装半径为 r_2 的小圆个数为 g，则

$$g/g^* \geqslant \pi n_2(n_2+1)/2\sqrt{3}(n_2+\sqrt{3})^2.$$

证 设曲边三角形的面积为 S_2，与它同积的正三形的边长为 a_2

$$a_2 = 2\sqrt{S_2}/\sqrt[4]{3}, \tag{4}$$

由于

$$\pi r_2^2 g^* \leqslant S_2, \qquad g^* \leqslant S_2/\pi r_2^2,$$

用 n_2 表示 S_2 中紧密填装的行数，也是最后一行圆的个数，则

$$g = (1/2)n_2(n_2+1),$$

又

$$n_2 = [(a_2/2r_2)-\sqrt{3}+1] = [(a_2/2r_2)-\sqrt{3}+1-y], \qquad (0\leqslant y<1)$$

$$a_2/2r_2 \leqslant n_2+\sqrt{3},$$

把式（4）代入，得

$$S_2/r_2^2 \leqslant \sqrt{3}(n_2+\sqrt{3})^2,$$

$$g^* \leqslant (1/\pi)\sqrt{3}(n_2+\sqrt{3})^2,$$

$$g/g^* \geqslant \pi n_2(r_2+1)/2\sqrt{3}(n_2+\sqrt{3})^2,$$

当 n_2 充分大时，

$g/g^* \approx 0.90$。

下面估计紧密填装与最优填装的目标函数的误差限：

定理 3 设在矩形 $V = a \times b$ 中，最优填装的目标函数值为 f^*，紧密填装的目标函数值为 f，则有

$$f/f^* \geqslant nn_1\pi/2\sqrt{3}(n+2)[n_1+(2/\sqrt{3})].$$

证

$$f^* = \pi c_1^2 x_1^* + \pi c_2^2 x_2^* + \cdots + \pi c_m^2 x_m^* \leqslant ab,$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} \pi r_i^2 x_i(\lambda_{1\,i-1}/\lambda_{2\,i-1}) \geqslant \pi r_1^2 x_1,$$

与定理 1 类似地证明

$$f/f^* \geqslant nn_1\pi/2\sqrt{3}(n+2)(n_1+2/\sqrt{3}),$$

当 n、n_1 充分大时

$$f/f^* \approx 0.90.$$

定理 3′ 如果紧密填装至少可以进行到第二轮，且第二轮至少存在一个半径为 r 的紧密填装圆[1]，那未，误差改进为

$$f/f^* \geqslant [(5\sqrt{3}-\pi^2)/18] \times [nn_1/(n+2)(n_1+2/\sqrt{3})].$$

证

$$f \geqslant \pi r_1^2 x_1 + \pi r_2^2 x_2 \lambda_{11}/\lambda_{21}$$
$$\geqslant nn_1 r_1^2 \pi + (2nn_1+2)\pi r^2,$$

其中

$$r = (\sqrt{3}/6)(2\sqrt{S_2}/\sqrt[4]{3}),$$
$$r^2 = S_2/3\sqrt{3} = (1/3\sqrt{3})(\sqrt{3}-\pi/2)r_1^2,$$

故

$$f \geqslant nn_1\pi r_1^2 + (2nn_1+2)\pi(1/3\sqrt{3})(\sqrt{3}-\pi/2)r_1^2,$$
$$f \geqslant [nn_1 + 2nn_1(\sqrt{3}-\pi/2)/3\sqrt{3}]\pi r_1^2,$$

而

$$f^* \leqslant ab \leqslant (2\sqrt{3}/\pi)(n+2)+(n_1+2/\sqrt{3})\pi r_1^2,$$

故

$$f/f^* \geqslant [(5\sqrt{3}\pi-\pi^2)/18] \times [nn_1/(n+2)(n_1+2/\sqrt{3})],$$

当 n, n_1 充分大时

$$f/f^* \approx 0.96,$$

可见，这时紧密填装与最优填装的目标函数相对误差不超过4%。

---

1)只要有一个圆，半径为 r，满足

$$r \leqslant [(\sqrt{3}-\pi/2)^{1/2}/\sqrt[4]{3^3}]r_1,$$

就必然有第二轮填装圆。

参考文献

〔1〕卢开澄，组合数学算法与分析，清华大学出版社，(1983)，352—370.
〔2〕Garey, M.R. and Johnson, D.S.著，张立昂等译，计算机和难解性——NP完全性理论导引，科学出版社，(1987)，19—53.
〔3〕Grahan, R.L.，高研译，组合时间表理论，运筹学杂志，2，2(1983).

The Method of Closely Loading

Zhu Eryuan

Abstract

This paper puts forward a method of closely loading for solving approximately the problem of planar loading. It establishes also an error estimate formula of closely loading approximate to the objective function of optimal loading.

Key words closely loading, optimal loading, error estimate