第10卷 第3期 华侨大学学报自然科学版 Vol.10 No.3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1989年7月 (NATURAL SCIENCE) Jul. 1989

截尾试验下指数部件可靠性指标的贝叶斯估计

卢 雯

(应用数学系)

摘 要

本文讨论指数部件可靠性的Bayes估计，对未知参数作了变换，从而使选择参数的验前分布更加灵活合理. 在截尾测试下，分别讨论了验前分布为负对数Gamma分布与Beta 分布的情况，获得了指数部件可靠性指标的表达式. 无信息验前分布的情况，仅作为特例. 最后，对无信息验前分布的情况给出了一个实例.

关键词 贝叶斯估计，可靠性，变换，截尾试验，验前分布

一、引 言

设部件的寿命T服从参数为λ的指数分布，其密度函数为

$$f(t/\lambda)=\lambda e^{-\lambda t}, \qquad (t>0,\ \lambda>0). \tag{1}$$

今对部件分别进行以下Ⅰ—Ⅳ等四种截尾试验.

1) Ⅰ(n，无，数)：子样容量为n，无替换的定数截尾寿命试验，截尾数为r. 记r个部件的失效时间依次为$t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_r$，$(t_1, t_2, \cdots, t_r)$为顺序统计量，它们的联合条件密度函数为

$$f_1((t_1, t_2, \cdots, t_r)/\lambda)\propto\lambda^r e^{-\lambda s_1}, \tag{2}$$

其中$s_1=t_1+t_2+\cdots+t_r+(n-r)t_r$为$n$个部件的总试验时间.

2) Ⅱ(n，无，时)：子样容量为n，无替换的定时截尾试验，截尾时间为t_0. 设在$[0, t_0]$内有r个部件失效，其失效时间依次为$t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_r$，$(t_1, t_2, \cdots t_r)$的联合条件密度函数为

$$f_2(t_1, t_2, \cdots, t_r/\lambda)\propto\lambda^r e^{-\lambda s_2}, \tag{3}$$

其中$s_2=t_1+t_2+\cdots+t_r+(n-r)t_0$为总试验时间.

3) Ⅲ(n，有，数)：子样容量为n，有替换的定数截尾试验，截尾数为r

本文1988年7月15日收到.

$$f_3((t_1, t_2, \cdots, t_r)/\lambda) \propto \lambda^r e^{-\lambda s_3}, \quad (4)$$

其中$s_3 = nt_r$为总试验时间。

4）Ⅳ（n，有，时）试验，截尾时间为t_0。

$$f_4((t_1, t_2, \cdots, t_r)/\lambda) \propto \lambda^r e^{\lambda s_4}, \quad (5)$$

其中$s_4 = nt_0$。

若把参数λ看作一个随机变量$\wedge$，记其分布为$\pi(\lambda)$。由于Bayes估计依赖于验前分布$\pi(\lambda)$为了使选择验前分布具有较大的灵活性，作变换

$$R = e^{-\lambda t_M}, \quad (6)$$

其中t_M为参考时间。于是R也是随机变量，其分布为

$$\pi(R) = \pi_\lambda((1/t_M)\ln\frac{1}{R})/t_M R, \quad (7)$$

$0<\lambda<+\infty$对应$0<R<1$。

在试验Ⅰ下，对应于式（2）的联合条件密度函数为

$$f_1((t_1, t_2, \cdots, t_r)/R \propto t_M^{-r}(\ln\frac{1}{R})^r R^{S_1/t_M}, \quad (8)$$

由式（7）、（8）可得$(t_1, t_2, \cdots, t_r, R)$的联合密度函数为

$$f_1(t_1, t_2, \cdots t_r, R) = \pi(R) f_1((t_1, t_2, \cdots, t_r)/R) \propto \pi(R) t_M^{-r}(\ln\frac{1}{R})^r R^{S_1/t_M}, \quad (9)$$

因而（$t_1, t_2, \cdots, t_r$）的联合边缘密度为

$$g_1(t_1, t_2, \cdots t_r) = \int_D f_1(t_1, t_2, \cdots t_r, R) dR, \quad (10)$$

其中$D = \{R: 0<R<1\}$。

于是，R的后验分布为

$$h_1(R/(t_1, t_2, \cdots t_r)) = \frac{f_1(t_1, t_2, \cdots, t_r, R)}{g_1(t_1, t_2, \cdots, t_r)}$$

$$= \frac{\pi(R)(\ln\frac{1}{R})^r R^{S_1/t_M}}{\int_D \pi(R)(\ln\frac{1}{R})^r R^{S_1/t_M} dR}, \quad (11)$$

在二次损失下，R的Bayes估计为

$$\hat{R} = \int_0^1 R \cdot h_1(R/(t_1, t_2, \cdots t_r)) dR. \quad (12)$$

二、试验Ⅰ下R的Bayes估计

下面，就R的不同验前分布，分别作出R的Bayes估计。

1. 负对数Gamma分布

1）设R具有验前负对数Gamma分布

$$\pi(R) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} t_M^{-\beta}(\ln\frac{1}{R})^{\beta-1} R^{(\alpha/t_M)-1}, \quad (13)$$

对应于λ的验前Gamma分布 $\pi(\lambda)=\frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\lambda^{\beta-1}e^{-\lambda\alpha}$. 式(13)中$\alpha>0$，$\beta>0$.

由式(11)、(13)得

$$h_1(R/(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_r))=\frac{\left(\ln\frac{1}{R}\right)^{r+\beta-1}R^{\frac{s_1+\alpha}{t_M}-1}}{\int_0^1\left(\ln\frac{1}{R}\right)^{r+\beta-1}R^{\frac{s_1+\alpha}{t_M}-1}dR}$$

$$=\frac{\left(\ln\frac{1}{R}\right)^{r+\beta-1}R^{\frac{s_1+\alpha}{t_M}-1}}{\left(\frac{s_1+\alpha}{t_M}\right)^{-(r+\beta)}\Gamma(r+\beta)},\tag{14}$$

由式(12)在二次损失下

$$\hat{R}=\frac{\int_0^1\left(\ln\frac{1}{R}\right)^{r+\beta-1}R^{\frac{s_1+\alpha}{t_M}}dR}{\left(\frac{s_1+\alpha}{t_M}\right)^{-(r+\beta)}\Gamma(r+\beta)}=\frac{\left(\frac{s_1+\alpha}{t_M}+1\right)^{-(r+\beta)}\Gamma(r+\beta)}{\left(\frac{s_1+\alpha}{t_M}\right)^{-(r+\beta)}\Gamma(r+\beta)}$$

$$=\left(1+\frac{t_M}{\alpha+s_1}\right)^{-(r+\beta)},\tag{15}$$

2）R的区间估计：设置信水平为$1-\rho$，令

$$P(R_{\rho/2}<R<R_{1-(\rho/2)})=\int_{R_{\rho/2}}^{R_{1-(\rho/2)}}h_1(R/t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_r)dR=1-\rho,$$

将式(14)代入之，得

$$\int_{R_{\rho/2}}^{R_{1-(\rho/2)}}\frac{\left(\ln\frac{1}{R}\right)^{r+\beta-1}R^{\frac{s_1+\alpha}{t_M}-1}}{\left(\frac{s_1+\alpha}{t_M}\right)^{-(r+\beta)}\Gamma(r+\beta)}dR=1-\rho,\tag{16}$$

对上述积分作变量替换

$$y=2\frac{\alpha+s_1}{t_M}\ln\frac{1}{R},\tag{17}$$

便得到

$$\int_a^b\frac{1}{2^{r+\beta}\Gamma(r+\beta)}\left(\frac{y}{2}\right)^{r+\beta-1}e^{-\frac{y}{2}}dy=1-\rho,\tag{18}$$

其中

$$a=2\frac{\alpha+s_1}{t_M}\ln\frac{1}{R_{\rho/2}},\qquad b=2\frac{\alpha+s_1}{t_M}\ln\frac{1}{R_{1-(\rho/2)}},$$

对于式(18)，利用不完全Gamma分布

$$I(x|\alpha)=\int_{x}^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt,$$

有

$$I(a|r+\beta)-I(b|r+\beta)=a^{r+\beta-1}\Gamma(r+\beta)(1-\rho),$$

由上式确定a，b尚有一定困难。

然而当式（18）中的β为正整数时，可以给出R的区间估计。因此时（18）式中被积函数恰是$x^2(2\beta+2r)$分布的密度函数，故有

$$a=x^2_{\rho/2}(2\beta+2r),\qquad b=x^2_{1-(\rho/2)}(2\beta+2r),$$

于是得

$$\ln\hat{R}_{\rho/2}=-\frac{t_M}{2(\alpha+s_1)}x^2_{\rho/2}(2\beta+2r),$$

$$\ln\hat{R}_{1-(\rho/2)}=-\frac{t_M}{2(\alpha+s_1)}x^2_{1-(\rho/2)}(2\beta+2r),\tag{19}$$

借用x^2-分布的上侧分位数表可查得$x^2_{\rho/2}(2\beta+2r)$及$x^2_{1-(\rho/2)}(2\beta+2r)$，这样就得到置信度为$\rho$的$R$的双侧置信区间。

实际应用中，人们更关心的是R的置信下限是多少，因为可靠度越大越好。设置信水平为（$1-\rho$），令

$$\int_{R_L}^{1}h_1(R/t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_r))dR=1-\rho,$$

作变换式（17），当β为正整数时，可得R的置信下限$\hat{R}_L$.

$$\ln\hat{R}_L=-\frac{t_M}{2(\alpha+s_1)}x^2{}_{\rho}(2\beta+2r).\tag{20}$$

2．Beta验前分布

设R具有验前Beta分布

$$\pi(R)=\frac{1}{B(a,\ b)}R^{a-1}(1-R)^{b-1},\tag{21}$$

其中$a>0$，b为正整数。

将式（21）代入式（11）、（12）求得

$$h_1(R/t_1,\ t_2,\ \cdots t_r)=\frac{(\ln\frac{1}{R})^r R^{\frac{s_1}{t_M}+a-1}(1-R)^{b-1}}{\int_0^1(\ln\frac{1}{R})^r R^{\frac{s_1}{t_M}+a-1}(1-R)^{b-1}dR},\tag{22}$$

$$\hat{R}=\frac{\int_0^1(\ln\frac{1}{R})^r R^{(s_1/t_M)+a}(1-R)^{b-1}dR}{\int_0^1(\ln\frac{1}{R})^r R^{(s_1/t_M)+a-1}(1-R)^{b-1}dR},\tag{23}$$

由二项式公式

$$(1-x)^{b-1}=\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k x^k,\tag{24}$$

式（23）可变形为

$$\hat{R}=\frac{\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k\int_0^1(\ln\frac{1}{R})^r R^{(s_1/t_M)+a+k}dR}{\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k\int_0^1(\ln\frac{1}{R})^r R^{(s_1/t_M)+a+k-1}dR}$$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k\left(\frac{s_1}{t_M}+a+k+1\right)^{-(r+1)}}{\sum_{k=0}^{b-1}\binom{b-1}{k}(-1)^k\left(\frac{s_1}{t_M}+a+k\right)^{-(r+1)}}. \tag{25}$$

3. 无信息验前分布

当对R的验前信息一无所知，即在没有历史数据可用或没有充分的历史数据可用时，可取R的验前分布为

$$\pi(R)=\frac{1}{R}(\ln\frac{1}{R})^{-1}[1], \tag{26}$$

其对应的结论，恰好是式（15）及（20）中$\alpha=\beta=0$的情形，此时

$$\hat{R}=(1+\frac{t_M}{s_1})^{-r}, \tag{27}$$

$$\ln\hat{R}_L=-\frac{t_M}{2s_1}x_\rho^2(2r). \tag{28}$$

在未知验前信息时，往往可取验前分布为均匀分布 $v(0,1)$，其对应的结论，恰好是式（25）中$a=b=1$的特殊情况，此时

$$\hat{R}=(1+\frac{t_M}{s_1+t_M})^{-(r+1)}. \tag{29}$$

设置信水平为$1-\rho$. 令$\int_{R_L}^1 h_1(R/(t_1,\ t_2,\ \cdots t_r))dR=1-\rho$

即

$$\int_{R_L}^1\frac{(\ln\frac{1}{R})^r R^{s_1/t_M}}{(\frac{s_1}{t_M}+1)^{-(r+1)}\Gamma(r+1)}dR=1-\rho,$$

作变换$y=2\left(\frac{s_1}{t_M}+1\right)\ln\frac{1}{R}$，可求得$R$的置信下限$\hat{R}_L$

$$\ln\hat{R}_L=-\frac{t_M}{2(t_M+s_1)}x_\rho^2(2+2r). \tag{30}$$

三、试验I下可靠性的Bayes估计

指数分布的可靠性指标有：失效率λ；平均寿命$\mu=1/\lambda$；可靠度$R(t)=e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t_M(t/t_M)}=$

R^{t/t_M}；可靠度为R的可靠寿命$t(R)=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{R}$。

由式（15）、（25）、（27）、（29）分别得到了不同验前分布下R的 Bayes 估计。因而在试验Ⅰ下可靠性指标的Bayes估计，其失效率、平均寿命、可靠度、可靠度为R的可靠寿命，分别为式（31）、（32）、（33）、（34）

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{t_M}\ln\frac{1}{\hat{R}}; \tag{31}$$

$$\hat{\mu}=\frac{1}{\hat{\lambda}}=t_M\ (\ln\frac{1}{\hat{R}})^{-1}; \tag{32}$$

$$\hat{R}(t)=\hat{R}^{t/t_M}; \tag{33}$$

$$\hat{t}(R)=\hat{\mu}\ln\frac{1}{R}. \tag{34}$$

四、试验Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ下可靠性的Bayes估计

比较式（2）、（3）、（4）、（5），可以发现式（3）仅将式（2）中的s_1换成s_2，其余不动；式（4）将式（2）中的s_1换成s_3，同时将常数$\frac{n!}{(n-r)!}$换成n^r，其余不动；式（5）将式（2）中的s_1换成s_4，同时将$\frac{n!}{(n-r)!}$换成n^r；而

$$f_i(t_1,\ t_2,\ \cdots t_r,\ R)=\pi(R)f_i((t_1,\ t_2,\ \cdots tr)/R), \tag{35}$$

$$g_i(t_1,\ t_2,\ \cdots t_r)=\int_D\pi(R)f_i((t_1,\ t_2,\ \cdots t_r)/R), \tag{36}$$

于是

$$h_i(R/(t_1,\ t_2,\ \cdots t_r))=\frac{\pi(R)(\ln\frac{1}{R})^r\ R^{s_i/t_M}}{\int_D\pi(R)\ (\ln\frac{1}{R})^r\ R^{s_i/t_M}dR}, \tag{37}$$

式（35）—（37）中的$i=1，2，3，4$。

这表明，在试验Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ下R的Bayes估计，只要将试验Ⅰ下结论中的s_1分别用s_2，s_3，s_4替换便得结论，不必另行推导公式。並且，将R的Bayes估计$\hat{R}$分别代入式（31）—（34）便得到试验Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ下可靠性的Bayes估计。

五、先验分布中未知参数的讨论

先验分布的确定一直是Bayes学派研究的重要问题。尽管本文作了变换（6），使验前分布的选择灵活一些，但当我们根据充分的历史信息确定先验分布后（例如电子元件的寿命服从指数分布$F(x)=1-e^{-\lambda x}$，失效率$\lambda>0$的先验分布常在Gamma分布族中选取），对可靠性作Bayes估计，这些估计均建立在验前分布中参数已知的条件下。

（1）根据专家意见确定先验分布，这是Lindley[2]在1983年总结前人的理论和实践提出

的一种确定先验分布的方法．他的构思：（i）引出专家意见；（ii）整理专家的意见；(iii）调整专家的意见．Lindley认为，假如你感兴趣的量θ是未知的，那末你可以向很多专家（包括历史数据）去咨询，对专家们提出的意见可根据你对专家的相信程度进行适当的整理和调整，最后获得先验分布．

（2）对参数α、β（或a，b）的估计．如果利用截尾试验的一次测试数据作经验Bayes估计，可以通过解似然方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln g_i(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_r)}{\partial \alpha}=0\\[2ex] \dfrac{\partial \ln g_i(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_r)}{\partial \beta}=0\end{cases} \tag{38}$$

来实现，其中$g_i(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_r)(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$由式（36）给出，分别表示试验Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ下$t_1$，$t_2$，…，$t_r$的联合边缘密度．求解式（38）需用最优化方法，譬如解非线性规划问题，甚至解非线性整数规划问题．求解过程比较复杂，而且在判断解的存在性上往往比较困难，有待于进一步探讨．

（3）当具有验前信息时，可以利用矩法估计参数．例如，试验Ⅰ下，曾作过m次试验，总测试时间$s_1=t_1+t_2+\cdots+t_r+(n-r)t_r$（是一个随机变量），依次取得数据$s_{11}$，$s_{12}$，…，$s_{1m}$．当$R$具有验前负对数Gamma分布时，由式（9）—（11）可得s_1的边缘分布密度

$$g_1(s_1,\ \alpha,\ \beta)=c\int_0^1\left(\ln\frac{1}{R}\right)^{\beta+r-1}R^{\frac{\alpha+s_1}{t_M}-1}dR,$$

其中c为待定常数．上式右端积分得

$$g_1(s_1,\ \alpha,\ \beta)=ct_M^{r+\beta}\Gamma(r+\beta)(\alpha+s_1)^{-(r+\beta)}=c_1(\alpha+s_1)^{-(r+\beta)}, \tag{39}$$

其中常数 $c_1=ct_M^{r+\beta}\Gamma(r+\beta)$可根据密度函数的性质确定出来．即由

$$\int_0^\infty g_1(s_1,\ \alpha,\ \beta)ds_1=1,$$

可得

$$c_1=(r+\beta-1)\alpha^{(r+\beta-1)},$$

代入式（39）得

$$g_1(s_1,\ \alpha,\ \beta)=(r+\beta-1)\alpha^{r+\beta-1}(\alpha+s_1)^{-(r+\beta)}. \tag{40}$$

下面给出参数α、β的矩估计

$$\begin{aligned}Es_1&=\int_0^\infty s_1g_1(s_1,\ \alpha,\ \beta)ds_1=(r+\beta-1)\alpha^{r+\beta-1}\int_0^\infty\frac{s_1}{(\alpha+s_1)^{r+\beta}}ds_1\\&=(r+\beta-1)\alpha^{r+\beta-1}\cdot\alpha^{-r-\beta+2}B(2,\ r+\beta-2)=\alpha(r+\beta-1)B(2,\ r+\beta-2)\\&=\frac{\alpha}{r+\beta-2},\qquad (r+\beta\neq 2,\ 下同)\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}Es^2{}_1&=\int_0^\infty s^2{}_1g_1(s_1,\ \alpha,\ \beta)ds_1=2\alpha^2/(r+\beta-2)(r+\beta-3),\ (r+\beta\neq 2,\ 3),\\ Ds_1&=Es^2{}_1-(Es_1)^2=\alpha^2(r+\beta-1)/(r+\beta-2)^2(r+\beta-3),\end{aligned} \tag{42}$$

$$A \triangleq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_{1_i}, \tag{43}$$

$$B \triangleq \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(s_{1_i}-A)^2, \tag{44}$$

利用矩法估计解下列方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{r+\beta-2}=A, \\ \dfrac{\alpha^2(r+\beta-1)}{(r+\beta-2)^2(r+\beta-3)}=B, \end{cases}$$

从而得到

$$\hat{\alpha}=A(r+\hat{\beta}-2), \tag{45}$$

$$\hat{\beta}=((A^2-3B)/(A^2-B))-r, \tag{46}$$

六、实 例

某电子产品服从指数分布，抽九个样本进行（n，无，数）试验，截尾数为$r=7$，试验结果如图1所示[8]。设验前分布无任何信息，参考时间为$t_M=600$h，试进行可靠性指标的Bayes估计，並求出置信度$\rho=0.1$的可靠度及平均寿命的单侧置信下限以及可靠度为0.9时产品的可靠寿命。

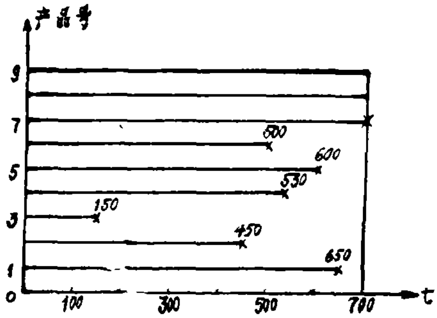

图1

解：$n=9$，$r=7$，$t_1=150$h，$t_2=450$h，$t_3=500$h，$t_4=530$h，$t_5=600$h，$t_6=650$h，$t_7=700$h。

由式（2）求得总试验时间 $s_1=4980h$，下面分别就先验分布 $\pi(R)=\frac{1}{R}(\ln\frac{1}{R})^{-1}$ 及$v(0, 1)$两种情形进行可靠性指标的Bayes估计。

由式（27）—（34），可得结果见表1。

表1

Bayes估计	验前分布 $\pi(R)=\frac{1}{R}(\ln\frac{1}{R})^{-1}$	验前分布 $v(0,1)$
失效率$\hat{\lambda}$h^{-1}	1.27×10^{-3}	1.362×10^{-3}
平均寿命$\hat{\mu}$(h)	753.5	734.4
可靠度$\hat{R}(t)$	$e^{-0.001327t}$	$e^{-0.001362t}$
可靠寿命$\hat{t}(0.9)$(h)	79.39	77.38
可靠度的置信下限$\hat{R}_L$	0.2811	0.2820
平均寿命的置信下限$\hat{\mu}_L$(h)	472.8	474.0

以上计算结果与文[3]用经典方法求得的$\hat{\mu}_L=472.8$h比较，显然选取$\pi(R)=\frac{1}{R}\left(\ln\frac{1}{R}\right)^{-1}$比选$v(0,1)$更符合实际。

参考文献

〔1〕周源泉，没有验前知识时的验前分布，数学学报，23，3(1980)，359—371.

〔2〕Lindley, D.V., Reconciliation of Probability Distribution, *Operations Reserch*, 31,5, (1983), 865—880.

〔3〕茆诗松、王玲玲，可靠性统计，华东师范大学出版社，(1984).

Bayes Estimate of Reliability Index for an Exponential Unit During Truncation Test

Lu Wen

Abstract

This paper deals with Bayes estimate of reliability index for an exponential unit during truncation test. The unknown parameters are transformed so that the prior distribution of parameters can be chosen more flexibly and rationally. The situation that prior distribution being negative logarithmic gamma-distribution or beta-distribution is discussed respectively under truncation testing. The paper is ended with the non-information prior distribution, which is exemplified and considered as a special case here.

Key Words Bayes estimations, reliability, transformation, truncation test, prior distribution