第10卷　第3期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol.10　No. 3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1989年7月　　(NATURAL SCIENCE)　　Jul. 1989

弱对角占优矩阵的Jacobi和Gauss-Seidel及SOR迭代法收敛准则

陈　恒　新

(应用数学系)

摘　　要

本文提出了一些新的、易于检验的迭代法收敛判别准则. 特别是放宽了Jacobi, Gauss-Seidel和SOR迭代法收敛的不可约弱对角占优矩阵这一条件.

关键词　矩阵，迭代法，收敛，弱对角占优矩阵

一、引　　言

熟知，对于线性代数方程组

$$Ax=b, \tag{1}$$

若把它化为等价形式$x=Bx+d$，则由迭代格式

$$x_{m+1}=Bx_m+d \tag{2}$$

所规定的迭代法收敛之充分必要条件是$\rho(B)<1$[1].

但这个条件较难检验，于是人们研究了各种易于检验的收敛判别法，如$\|B\|<1$，则式(2)收敛；当式(1)的系数矩阵A为不可约弱对角占优矩阵，则Jacobi, Gauss-Seidel和SOR (松驰因子$0<\omega\leqslant1$)迭代法收敛等等[1-3].

但当系数矩阵A为弱对角占优矩阵 (可能是可约的)，如

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

和$\|B\|\geqslant1$等，情况又如何呢? 本文着重讨论这些情况.

二、判别准则

定理1　对于任意正数$k\geqslant1$，若$\|B^k\|<1$，则迭代法 (2) 收敛，且有$\|B^k\|\leqslant\|B\|^k$.

本文1988年2月5日收到.

证　设λ_1为B之特征值按模最大的，x_1为相应的特征向量，则$x_1 \neq 0$，且有$Bx_1=\lambda_1 x_1$ 于是可推出$B^2x_1=\lambda_1^2 x_1$，$B^3x_1=\lambda^3{}_1 x_1$，…，$B^k x_1=\lambda^k{}_1 x_1$。而$|\lambda_1|^k\|x_1\|=\|\lambda^k{}_1 x_1\|=\|B^k x_1\|\leqslant\|B^k\|\cdot\|x_1\|$。因为$x_1\neq 0$，所以$\|x_1\|>0$，于是有$|\lambda_1|^k\leqslant\|B^k\|<1$，从而$\rho(B)=|\lambda_1|<1$，即迭代法（2）收敛。显然，由范数性质便有$\|B^k\|\leqslant\|B\|^k$。证毕。

事实上，有时往往会出现$\|B\|\geqslant 1$，但存在某个$k>1$，使$\|B^k\|<1$。这时亦可用定理1判别之，亦法简单。

如文〔4〕中例3

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -0.6 & 0.16 & 0.4 \\ -0.6 & 0 & 0.29 & 0.1 \\ 0.1 & 0.16 & 0 & 0.7 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0 \end{pmatrix},$$

其中$\mu=\|B\|_\infty=1.16>1$，$\nu=\|B\|_1=1.2>1$。

若用文〔4〕的定理2判则，因其定理不直观较繁锁，检验条件较复杂。但因$\|B^2\|_\infty=0.5996<1$，由本文定理1知迭代法（2）收敛。可见此例用本文定理1判别很直观简便。

定理2　设迭代矩阵$B=[b_{ij}]_{n\times n}$满足条件：$\|B\|_\infty\leqslant 1$，记$I_1=\left\{i\,\middle|\,\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|=1\right\}$，若存在某个$i_0$（$1\leqslant i_0\leqslant n$）使$\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{i_0 j}|<1$，且$b_{ii_0}\neq 0$，$i\in I_1$。则迭代法（2）收敛。

证　首先由$\|B\|_\infty\leqslant 1$，有$\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|\leqslant 1$，$i=1, 2, \cdots, n$。因为$B^2$的元素为$(B^2)_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}b_{ik}b_{kj}$，所以

$$\|B^2\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}b_{ik}b_{kj}\right|\overset{\text{记为}}{=\!=}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}b_{lk}b_{kj}\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|b_{lk}||b_{kj}|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{lk}||b_{kj}|=\sum_{k=1}^{n}|b_{lk}|\sum_{j=1}^{n}|b_{kj}|.$$

若$l\bar{\in} I_1$，即$\sum\limits_{k=1}^{n}|b_{lk}|<1$，则有

$$\|B^2\|_\infty\leqslant\sum_{k=1}^{n}|b_{lk}|\sum_{j=1}^{n}|b_{kj}|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|b_{lk}|<1.$$

若$l\in I_1$，则$b_{li_0}\neq 0$，于是有

$$\|B^2\|_\infty\leqslant\sum_{k=1}^{n}|b_{lk}|\sum_{j=1}^{n}|b_{kj}|=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i_0}}^{n}|b_{lk}|\sum_{j=1}^{n}|b_{kj}|+|b_{li_0}|\sum_{j=1}^{n}|b_{i_0 j}|$$

$$\leqslant\sum_{\substack{k=1\\k\neq i_0}}^{n}|b_{lk}|+|b_{li_0}|\sum_{j=1}^{n}|b_{i_0 j}|<\sum_{\substack{k=1\\k\neq i_0}}^{n}|b_{lk}|+|b_{li_0}|=\sum_{j=1}^{n}|b_{lk}|=1.$$

即总有$\|B^2\|_\infty<1$，由定理1知迭代法（2）收敛。证毕。

为应用方便，引入记号：对于任何方阵$C=[C_{ij}]_{n\times n}$，记$(C)_{ij}=C_{ij}$；对任何向量$x=[x_1,$

$x_2, \cdots x_n]^T$，记$(x)_i = x_i$；记 $r_i = \sum\limits_{j=1}^{i-1}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$，$t_i = \sum\limits_{j=i+1}^{\infty}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$，$r_1 = 0$，$t_n = 0$。则有$r_i + t_i = \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$，$r_i \geqslant 0$，$t_i \geqslant 0$。

对于n阶方阵A，将A劈分为$A = D - L - U$（假设文中的A均有此分解）。其中D为非奇异对角阵，L为严格下三角阵，U为严格上三角阵，则SOR法的迭代矩阵

$$L_w = (D - wL)^{-1}[(1-w)D + wU].$$

引理1　若矩阵$A = [a_{ij}]_{n\times n}$为弱对角占优矩阵[1)]，且$0 < \omega \leqslant 1$。则SOR法的迭代矩阵满足$\|L_w\|_\infty < 1$；并且对于任意的$i_0 \in I_0 = \left\{i \,\middle|\, \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}| < |a_{ij}|\right\}$，记$L_w = [S_{ij}]_{n\times n}$，则恒有$\sum\limits_{j=1}^{n}|S_{i_0j}| < 1$。

证　显然 $I_0 = \left\{i \,\middle|\, \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1\right\}$，因为

$$\|L_w\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1}\|L_w x\|_\infty \xlongequal{\text{记为}} \|L_w x^*\|_\infty (\|x^*\|_\infty = 1),$$

且记$y = L_w x^*$，$\|y\|_\infty = \max\limits_i |y_i| \xlongequal{\text{记为}} |y_l|$，即有$\|L_w\|_\infty = |y_l|$，并且假设$y_l$是$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$中第一个取到$\|y\|_\infty$的分量，即$|y_i| < \|L_w\|_\infty = |y_l|$，$i = 1, 2, \cdots, l-1$。由

$$y = L_w x^* = (D - wL)^{-1}[(1-w)D + wU]x^*,$$

有

$$\begin{aligned}
&(D - wL)y = (1-w)Dx^* + wUx^*,\\
&Dy = wLy + (1-w)Dx^* + wUx^*,\\
&y = wD^{-1}Ly + (1-w)x^* + wD^{-1}Ux^*,
\end{aligned} \tag{3}$$

因为

$$(D^{-1}L)_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & j < i,\\ 0 & j \geqslant i,\end{cases} \qquad (D^{-1}U)_{ij} = \begin{cases} 0 & j \leqslant i,\\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & j > i,\end{cases}$$

则式（3）的第l个方程为

$$y_l = -w\sum_{j=1}^{l-1}\frac{a_{lj}}{a_{ll}}y_l + (1-w)x_l^* - w\sum_{j=l+1}^{n}\frac{a_{lj}}{a_{ll}}x_j^*, \tag{4}$$

因此有

1）即A的元素a_{ij}满足条件：$\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \leqslant |a_{ii}|$，$i = 1, 2, \cdots, n$。且至少有某个$i_0$使$\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n}|a_{i_0j}| < |a_{i_0i_0}|$。

$$\|L_w\|_\infty = |y_l| \leqslant w\sum_{j=1}^{l-1}\left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\right| |y_j| + |1-w||x_l^*| + w\sum_{j=l+1}^{n}\left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\right| |x_j^*|$$

$$\leqslant w\|L_w\|_\infty\sum_{j=1}^{l-1}\left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\right| + 1 - w + w\sum_{j=l+1}^{n}\left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\right|, \qquad (\text{因}\|x^*\|_\infty = 1),$$

即有

$$(1-wr_l)\|L_w\|_\infty \leqslant 1 - w + wt_l. \tag{5}$$

因A为弱对角占优矩阵，则对任意i有$r_i+t_i\leqslant 1$，故有$r_l+t_l\leqslant 1$，且$0\leqslant r_l\leqslant 1$。

（i）当$0<w<1$时，因$0\leqslant wr_l<1$，由式（5）便有$\|L_w\|_\infty\leqslant(1-w+wt_l)/(1-wr_l)$。由$r_l+t_l\leqslant 1$可推出$w(r_l+t_l)\leqslant w$，

$1-w+w(r_l+t_l)\leqslant w+1-w=1$，

$1-w+wt_l\leqslant 1-wr_l$，　　$(1-w+wt_l)/(1-wr_l)\leqslant 1$，

所以

$$\|L_w\|_\infty\leqslant 1.$$

（ii）当$w=1$时，由式（5）便有

$$(1-r_l)\|L_w\|_\infty\leqslant t_l. \tag{6}$$

对于$l=1$，因$r_1=0$，故有$\|L_w\|_\infty\leqslant t_1\leqslant 1$。

下面再对$l=2$，3，…，n进行讨论。

若$r_l<1$，则由式（6）便有$\|L_w\|_\infty\leqslant t_l/(1-r_l)$，因$r_l+t_l\leqslant 1$，所以$t_l\leqslant 1-r_l$，$t_l/(1-r_l)\leqslant 1$，即有$\|L_w\|_\infty\leqslant 1$。

若$r_l=1$，因$r_l+t_l\leqslant 1$，则 $t_l=\sum\limits_{j=l+1}^{n}\left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\right|=0$，所以 $a_{lj}=0$，$j=l+1$，…，n。则式（4）变为 $y_l=-\sum\limits_{j=1}^{l-1}\frac{a_{lj}}{a_{ll}}y_j$，因$y_l$是第一个取到$\|y\|_\infty$的分量，故$|y_j|<|y_l|$，$j=1$，2，…，$l-1$。记$|y_{j_*}|=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant l-1}|y_j|$，显然$|y_l|>|y_{j_*}|$。但是$|y_l|=\left|\sum\limits_{j=1}^{l-1}\frac{a_{lj}}{a_{ll}}y_j\right|\leqslant\sum\limits_{j=1}^{l-1}\left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\right||y_j|$ $\leqslant |y_{j_*}|\sum\limits_{j=1}^{l-1}\left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\right|=|y_{j_*}|r_l=|y_{j_*}|$，与$|y_l|>|y_{j_*}|$矛盾，因此$t_l\neq 0$。

这说明l不可能取在$a_{ij}=0$，$j=i+1$，…，n这一行（即矩阵U的元素全为零这行）。即$r_l\neq 1$，所以$r_l<1$。

综上所述，不论何种情况都有$\|L_w\|_\infty\leqslant 1$。

对于任意的$i_0\in I_0$，有$r_{i_0}+t_{i_0}=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n}\left|\frac{a_{i_0j}}{a_{i_0i_0}}\right|<1$。

现证

$$\sum_{j=1}^{n}|S_{i_0j}|<1, \tag{7}$$

取 $x_0=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T$，其中 $x_j^{(0)}=\mathrm{sign}(S_{i_0j})$（即取 $x_j^{(0)}$ 为 S_{i_0j} 的符号，

$$\mathrm{sign}(u)=\begin{cases}1 & u>0\\ 0 & u=0\\ -1 & u<0\end{cases}$$
若所有 $S_{i_0j}=0$，$j=1,2,\cdots,n$ 则式（7）已成立。否则，便有 $\|x_0\|_\infty=1$。因为

$$\|L_w\|_\infty=\max_{\|x\|_\infty=1}\|L_wx\|_\infty\geq\|L_wx_0\|_\infty,$$

记

$y_0=L_wx_0$，　$y_0=(y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \cdots,\ y_n^{(0)})^T$，则有 $\|y_0\|_\infty\leq\|L_w\|_\infty\leq1$，且 $y_{i_0}^{(0)}=\sum_{j=1}^{n}S_{i_0j}\cdot\mathrm{Sign}(S_{i_0j})=\sum_{j=1}^{n}|S_{i_0j}|$。和前面证明 $\|L_w\|_\infty\leq1$ 类似，由

$$y_0=L_wx_0=(D-wL)^{-1}[(1-w)D+wU]x_0,$$

可推出

$$y_0=wD^{-1}Ly_0+(1-w)x_0+wD^{-1}Ux_0,\tag{8}$$

式（8）的第 i_0 个方程为

$$\sum_{j=1}^{n}|S_{i_0j}|=y_{i_0}^{(0)}=-w\sum_{j=1}^{i_0-1}\frac{a_{i_0j}}{a_{i_0i_0}}y_j^{(0)}+(1-w)x_{i_0}^{(0)}-w\sum_{j=i_0+1}^{n}\frac{a_{i_0j}}{a_{i_0i_0}}x_j^{(0)},$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|S_{i_0j}|=|y_{i_0}^{(0)}|&\leq w\sum_{j=1}^{i_0-1}\left|\frac{a_{i_0j}}{a_{i_0i_0}}\right||y_j^{(0)}|+(1-w)|x_{i_0}^{(0)}|\\&\quad+w\sum_{j=i_0+1}^{n}\left|\frac{a_{i_0j}}{a_{i_0i_0}}\right||x_j^{(0)}|\\&\leq w\|y_0\|_\infty r_{i_0}+(1-w)\|x_0\|_\infty+w\|x_0\|_\infty t_{i_0}\\&\leq wr_{i_0}+(1-w)+wt_{i_0}\ (\text{因}\|y_0\|_\infty\leq1,\ \|x_0\|_\infty=1)\\&=1-w+w(r_{i_0}+t_{i_0}),\end{aligned}$$

因为由已知 $r_{i_0}+t_{i_0}<1$，且 $0<w\leq1$，所以有

$$\sum_{j=1}^{n}|S_{i_0j}|\leq1-w+w(r_{i_0}+t_{i_0})<1-w+w=1.$$

证毕。

定理3　设矩阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 为弱对角占优矩阵，记 $I_2=\{i\mid\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|=|a_{ii}|\}$。若存在某个使得成立严格不等式 $\sum_{j=1,j\neq i_0}^{n}|a_{i_0j}|<|a_{i_0i_0}|$ 的 i_0，其相应的元素 $a_{ii_0}\neq0$，一切 $i\in I_2$，则下面三种迭代法收敛：1）Jacobi迭代法。迭代矩阵 $M_1=I-D^{-1}A$；2）Gauss-Seidel迭代法。迭代矩阵 $M_2=(D-L)^{-1}U$；3）SOR迭代法。迭代矩阵 $L_w=(D-wL)^{-1}[(1-w)D+wU)$，且 $0<w\leq1$。（当 $w=1$，即为2））。

这里 $A=D-L-w$；或 $P_{i_0n}AP_{i_0n}=D-L-U$，$i_0<n$ 时（仅对2）和3））。

D、L、U 意义同前面所述，而 P_{i_0n} 是一个排列矩阵，即

$$P_{i_0 n}=\begin{bmatrix}1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & & 0\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i_0\text{行。} \\ \\ \\ \\ \leftarrow n\text{行}\end{array}$$

证 定理3中 1）记$M_1=[m_{ij}]_{n\times n}$，由于$M_1=I-D^{-1}A$，则 $m_{ij}=\begin{cases}-\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & j\neq i,\\ 0 & j=i,\end{cases}$ 因

A为弱对角占优矩阵，则有$\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\leqslant 1$，$i=1$，2，…，$n$，所以

$$\|M_1\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^{n}|m_{ij}|=\max\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\leqslant 1,$$

由于

$$I_2=\{i\,|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|=|a_{ii}|\}=\{i\,|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|=1\}=\{i\,|\sum_{j=1}^{n}|m_{ij}|=1\},$$

由已知，对于矩阵A，存在i_0使$\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n}|a_{i_0j}|<|a_{i_0i_0}|$，而相应的$a_{ii_0}\neq 0$，一切$i\in I_2$。

从而对于矩阵M_1来说，存在i_0使$\sum\limits_{j=1}^{n}|m_{i_0j}|=\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n}\left|\dfrac{a_{i_0j}}{a_{i_0i_0}}\right|<1$，而相应之元素$m_{ii_0}=-\dfrac{a_{ii_0}}{a_{ii}}\neq 0$，一切$i\in I_2=\{i\,|\sum\limits_{j=1}^{n}|m_{ij}|=1\}$。故由定理2知Jacobi迭代法收敛。

因为当$\omega=1$时3）中的L_ω即为2）中的M_2，所以只需证明3）。

对于矩阵$L_\omega=[S_{ij}]_{n\times n}$，根据已知条件，由引理1知$\|L_\omega\|_\infty\leqslant 1$，且有$\sum\limits_{j=1}^{n}|S_{i_0j}|<1$。因此$\sum\limits_{j=1}^{n}|S_{ij}|\leqslant 1$，$i=1$，2，…，$n$。

现证相应之元素$S_{ii_0}\neq 0$，一切$i\in I_s=\{i\,\Big|\sum\limits_{j=1}^{n}|S_{ij}|=1\}$。

先证 $I_s\subset I_2$，因A为弱对角占优矩阵，则有$\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\leqslant 1$，$i=1$，2，…，$n$。

反证，设有$h\in I_s$，但$h\notin I_2$（$1\leqslant h\leqslant n$）即$\sum\limits_{j=1}^{n}|S_{hj}|=1$，但$\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq h}}^{n}\left|\dfrac{a_{hj}}{a_{hh}}\right|<1$。因为

$$I_2=\{i\,\Big|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|=|a_{ii}|\}=\{i\,\Big|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|=1\},$$

取$x_0=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)})^T$，其中$x_j^{(0)}=\mathrm{sign}(S_{hj})$，则有$\|x_0\|_\infty=1$，且

$$(L_w x_0)_h=\sum_{j=1}^{n}S_{hj}\cdot\mathrm{Sign}(S_{hj})=\sum_{j=1}^{n}|S_{hj}|=1,$$

类似引理 1 的证明，由

$$L_w x_0=(D-wL)^{-1}[(1-w)D+wU]x_0$$

可推出

$$L_w x_0=wD^{-1}L(L_w x_0)+(1-w)x_0+wD^{-1}Ux_0,$$

其第 h 个方程式为

$$(L_w x_0)_h=-w\sum_{j=1}^{h-1}\frac{a_{hj}}{a_{hh}}\cdot\sum_{k=1}^{n}S_{jk}x_k^{(0)}+(1-w)x_h^{(0)}-w\sum_{j=h+1}^{n}\frac{a_{hj}}{a_{hh}}x_j^{(0)},$$

则有

$$1=|(L_w x_0)_h|\leqslant w\sum_{j=1}^{h-1}\left|\frac{a_{hj}}{a_{hh}}\right|+(1-w)+w\sum_{j=h+1}^{n}\left|\frac{a_{hj}}{a_{hh}}\right|$$

$$=(1-w)+w\sum_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{n}\left|\frac{a_{hj}}{a_{hh}}\right|<1-w+w=1\qquad(\text{因}0<w\leqslant1)$$

矛盾，所以$I_s\subset I_2$。

现证对任意 $l\in I_s=\{i\mid\sum_{j=1}^{n}|S_{ij}|=1\}$，相应之$S_{li_0}\neq0$。因为当$l\in I_s$时有 $l\in I_2$，由已知相应之元素$a_{li_0}\neq0$。

现先证$i_0=n$的情况（即有$a_{ln}\neq0$）：

取 $x_l=(x_1^{(l)},\ x_2^{(l)},\ \cdots,\ x_n^{(l)})^T$，其中 $x_j^{(l)}=\mathrm{Sign}(S_{lj})$。

显然$\|x_l\|_\infty=1$，$(L_w x_l)_i=\sum_{j=1}^{n}S_{ij}x_j^{(l)}$ 。而

$$(L_w x_l)_l=\sum_{j=1}^{n}S_{lj}\cdot\mathrm{Sign}(S_{lj})=\sum_{j=1}^{n}|S_{lj}|=1,$$

由

$$L_w x_l=(D-wL)^{-1}[(1-w)D+wU]x_l$$

可推出

$$L_w x_l=wD^{-1}L(L_w x_l)+(1-w)x_l+wD^{-1}Ux_l,$$

其第l个方程为

$$1=(L_w x_l)_l=-w\sum_{j=1}^{l-1}\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\sum_{k=1}^{n}S_{jk}\cdot x_k^{(l)}+(1-w)x_l^{(l)}$$

$$-w\sum_{j=l+1}^{n}\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\mathrm{Sign}(S_{lj}),$$

所以有

$$1=|(L_w x_l)_l|\leqslant w\sum_{j=1}^{l-1}\left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\right|+(1-w)+w\sum_{j=l+1}^{n}\left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\mathrm{Sign}(S_{lj})\right|$$

$$=wr_l+1-w+w\sum_{j=l+1}^{n-1}\left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\mathrm{Sign}(S_{lj})\right|+w\left|\frac{a_{ln}}{a_{ll}}\mathrm{Sign}(S_{ln})\right|\leqslant$$

$$\leqslant wr_l+1-w+w\sum_{j=l+1}^{n-1}\left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\right|+w\left|\frac{a_{ln}}{a_{ll}}\mathrm{Sign}(S_{ln})\right|$$

$$=wr_l+1-w+w\left(t_l-\left|\frac{a_{ln}}{a_{ll}}\right|\right)+w\left|\frac{a_{ln}}{a_{ll}}\mathrm{Sign}(S_{ln})\right|$$

$$=1-w+w(r_l+t_l)-w\left|\frac{a_{ln}}{a_{ll}}\right|+w\left|\frac{a_{ln}}{a_{ll}}\mathrm{Sign}(S_{ln})\right|$$

（因A为弱对角占优阵，故$r_l+t_l\leqslant 1$）

$$\leqslant 1-w+w-w\left|\frac{a_{ln}}{a_{ll}}\right|+w\left|\frac{a_{ln}}{a_{ll}}\mathrm{Sign}(S_{ln})\right|$$

$$=1-w\left|\frac{a_{ln}}{a_{ll}}\right|+w\left|\frac{a_{ln}}{a_{ll}}\mathrm{Sign}(S_{ln})\right|,$$

若$S_{ln}=0$，因$a_{ln}\neq 0$，$0<w\leqslant 1$，则推出$1\leqslant 1-w|a_{ln}/a_{ll}|<1$矛盾，所以$S_{ln}\neq 0$。

由定理 2 可知当$i_0=n$时，Gauss-Seidel，SOR迭代法收敛。

当$i_0<n$时，引入排列矩阵P_{i_0n}（如前面所定义的）。由于$P_{i_0n}\cdot P_{i_0n}=I$，则方程组（1）可变为$(P_{i_0n}AP_{i_0n})P_{i_0n}x=P_{i_0n}b$。记$A'=P_{i_0n}AP_{i_0n}$，$x'=P_{i_0n}x$，$b'=P_{i_0n}b$。则式（1）变为

$$A'x'=b', \tag{10}$$

$$A'=P_{i_0n}AP_{i_0n}=P_{i_0n}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1i_0} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & & \\ \cdots\cdots & a_{i_0-1,i_0-1} & \cdots\cdots & & \cdots \\ a_{i_01} & \cdots\cdots & a_{i_0i_0} & \cdots\cdots & a_{i_0n} \\ \cdots\cdots & & a_{i_0+1,i_0+1} & \cdots & \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{ni_0} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}P_{i_0n}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} & \cdots\cdots & a_{1i_0} \\ & \ddots & & & \\ \cdots\cdots & a_{i_0-1,i_0-1} & \cdots\cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} & \cdots\cdots & a_{ni_0} \\ \cdots\cdots & & a_{i_0+1,i_0+1} & \cdots\cdots & \\ & & & \ddots & \\ a_{i_01} & \cdots\cdots & a_{i_0n} & \cdots\cdots & a_{i_0i_0} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i_0\text{行}. \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

记$A'=[a'_{ij}]_{n\times n}$，显然，A'仍为弱对角占优矩阵，且有$\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a'_{ij}|=\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\leqslant|a_{ii}|=|a'_{ii}|$，一切$i\neq i_0$，$n$以及

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n}|a'_{i_0j}|=\sum_{j=1}^{n-1}|a_{nj}|\leqslant|a_{nn}|=|a'_{i_0i_0}|,$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}|a'_{nj}|=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n}|a_{i_0j}|\leqslant|a_{i_0i_0}|=|a'_{nn}|,$$

因A'的第n列元素即为A的第i_0列元素。

所以其相应之元素$a'_{i_n}\neq 0$，一切 $i\in I'_2=\{i\,\Big|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a'_{ij}|=|a'_{ii}|\}$。

故Gauss-Seidel，SOR迭代法收敛（这时用$P_{i_0n}AP_{i_0n}=D-L-U$分解，$i_0<n$时）。证毕。

三、例子（定理3例子分析）

矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&3&1\\0&0&1\end{pmatrix}$是一个可约弱对角占优矩阵。因$A$的第3行成立严格不等式：$0+0<1$。取$i_0=n=3$，且相应之元素$a_{23}=1\neq 0$（只有第2行成立等式：$|-2|+1=3$）。由定理3知三种迭代法均收敛（这时用$A=D-L-U$分解）。

对于线性方程组

$$\begin{pmatrix}3&2&0\\2&2&0\\1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\8\end{pmatrix},\tag{11}$$

简记为$Ax=b$，其系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&0\\2&2&0\\1&3&4\end{pmatrix}$为可约弱对角占优矩阵。因$A$的第一行（$i_0=1$）成立严格不等式：$0+2<3$，且$a_{21}=2\neq 0$，$a_{31}=1\neq 0$。由定理3知三种迭代法均收敛（但对于2）和3）这时是用$P_{13}AP_{13}=D-L-U$分解）。

事实上，对于2）和3）因 $i_0=1<n=3$，为此引入排列矩阵 $P_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，将方程组（11）变为

$$(P_{13}AP_{13})P_{13}x=P_{13}b,\tag{12}$$

即

$$\begin{pmatrix}4&3&1\\0&2&2\\0&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\\5\end{pmatrix},$$

则$A'=\begin{pmatrix}4&3&1\\0&2&2\\0&2&3\end{pmatrix}$亦为可约弱对角占优矩阵。第三行（$i_0=n=3$）成立严格不等式：$0+2<3$，且 $a'_{13}=1\neq 0$（因$3+1=4$），$a'_{23}=2\neq 0$（因$0+2=2$）故对于方程组（12），Gauss-Seidel，SOR迭代法收敛（即用了$P_{13}AP_{13}=D-L-U$分解）。

参 考 文 献

〔1〕李庆扬等编，数值分析，华中工学院出版社，（1982）.
〔2〕武汉大学、山东大学计算数学教研室编，计算方法，人民教育出版社，（1980）.
〔3〕清华大学、北京大学《计算方法》编写组，计算方法（下册），（1980）.
〔4〕张鹏程，Jacobi和Gauss-Seidel迭代法收敛的新判别准则，高等学校计算数学学报，5，2(1983).

Convergence Criteria of Jacobi, Gauss-Seidel, and SOR Iteration Methods in Weak Diagonally Dominant Matrix

Chen Hengxin

Abstract

This paper poses some new and easy to test convergence criteria of iteration methods. It extends especially the condition of unreduced weak diagonally dominant matrix for the convergence of Jacobi, Gauss-Seidel, and SOR iteration methods.

Key words matrices, iteration method, convergence, weak diagonally dominant matrix