

# 热工对象模型降阶的一种时域算法

胡克定 洪秉钧

(南京工学院) (华侨大学)

## 摘 要

对高阶状态方程描述的热工对象,若使用通常的降阶方法,将会有很大的计算工作。本文从对象的输入输出特性出发,对于一类指定的降阶模型,证明了可以用二步线性最小二乘求得降阶模型的参数,方法简单。计算实例说明降阶模型较好地重现了原型的响应特性。

## 一、模型降阶概述

应用理论分析法并借助数字计算机建立热工对象的线性化集中参数模型时,模型常以阶次较高的状态方程式出现:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu, \\ Y &= CX + Du, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $X$ 、 $Y$ 、 $u$ 分别表示状态变量、输出和输入变量; $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 为与负荷有关的常数矩阵。例如在文[1]中为某大容量直流锅炉机组建立了阶数为36的线性化模型。随着将对象分成更细的区段,模型的阶次可以超过100。利用阶次如此之高的模型进行分析和综合,必然带来计算机容量、实时性和计算费用等方面的困难,因此必须降阶。

目前,关于模型降阶方法已有了大量的文章,综合起来,可以分为频域和时域两大类<sup>[2]</sup>。

以系统的传递函数或频率响应出发进行降阶,称为频域降阶法,这类方法一般是在得到系统的传递函数模型后才能进行。从理论上讲,只要有了系统的状态方程模型(1),就可以求取传递函数模型 $G(s)$ :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (2)$$

然而,这时必须进行大量的计算,尤其对于阶次较高的系统,矩阵求逆的运算 $(sI - A)^{-1}$ 绝非易事。因此,利用频域降阶法得到式(1)的低阶模型极为不便。

时域降阶方法从系统的状态方程或时域响应出发进行降阶,主要有摄动法、模态法、集结法等。摄动法的基本思想是根据参数在系统动态中相互作用的大小(非奇摄动)或根据系统所存在的快慢二种现象(奇摄动)进行降阶工作。这种方法必须事先对系统的工作原理有一定程度的了解,并且有时不一定能将模型降到希望的较低阶次。例如在文[1]的36阶模型

本文1987年9月3日收到。

中,以工质压力和焓作为状态变量,在动态过程中压力相对于焓变化是较快的,可以归为快现象。如果应用奇摄动方法降阶,即使舍弃全部压力变量,由遗留的焓变量得到的降阶模型仍有较高的维数。模态法(亦称优势极点法)通过保留高阶系统占优势的模式取得降阶模型,被舍弃的非优势模式对于系统中的快现象,这可以认为是奇摄动法的变型。该法需要事先计算高阶系统的特征值,而对于阶次较高的原系统,计算特征值的工作本身就是十分艰巨的。集结法降阶的主要难点在于确定集结阵,而且需要大量复杂的计算。

综上所述,常规的时域降阶或频域降阶方法应用于阶次较高的热工对象机理模型(1),将会遇到很大困难。因此希望寻求适合于所建模型的降阶算法。

任一系统,其动态特性必然表现在它的变化着的输入输出数据中。因此,可以在相同输入激励下,使高阶系统的输出与降阶模型的输出响应之间误差的某种指标达到最优而实现降阶。例如,当指标为二次型,离散输出取样步长为 $T$ 时,降阶模型应在使二次性能指标

$$J = \sum_{k=0}^N [y(KT) - \hat{y}(KT)]^2 \quad (3)$$

极小的意义下逼近原系统。当指定了简化模型 $\hat{y}(t)$ 的形式后,这一问题就是业已熟知的参数辨识问题。在本文中,将研究输出形如

$$\hat{y}(t) = a_0 + a_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + a_m e^{\lambda_m t} \quad (4)$$

的一类降阶模型,其中 $m$ 为降阶模型阶次,预先指定且小于原型阶次。参数 $a_i$ 和 $\lambda_i$ 均为复数,通过对式(3)极小化来确定,亦即

$$J = \sum_{k=0}^N [y(K) - \hat{y}(K)]^2 \\ = \sum_{k=0}^N [y(K) - (a_0 + a_1 e^{\lambda_1 T K} + \dots + a_m e^{\lambda_m T K})]^2 \rightarrow \min. \quad (5)$$

这是一个非线性最小二乘问题,应用通常方法求解将导致相当复杂的计算。

为了避免这一困难,本文提出应用二步线性最小二乘法替代式(5)的非线性最小二乘问题。第一次最小二乘求得参数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ,然后通过第二次线性二乘确定其余各参数 $a_0, a_1, \dots, a_m$ 。在推导这一算法之前,我们先证明下面的一个定理。

## 二、一个定理

**定理** 式(4)的离散形式

$$\hat{y}_K = a_0 + a_1 e^{\lambda_1 K T} + \dots + a_m e^{\lambda_m K T}$$

和差分方程

$$\hat{y}_K = p_0 - p_1 \hat{y}_{K-1} - \dots - p_m \hat{y}_{K-m} \quad (6)$$

是等价的。其中

$$p_0 = a_0(1 - e^{\lambda_1 T})(1 - e^{\lambda_2 T}) \dots (1 - e^{\lambda_m T}), \quad (7a)$$

而 $p_1, p_2, \dots, p_m$ 构成的 $m$ 次多项式

$$w^m + p_1 w^{m-1} + \dots + p_{m-1} w + p_m = 0 \quad (7b)$$

的 $m$ 个根分别为 $e^{\lambda_1 T}, e^{\lambda_2 T}, \dots, e^{\lambda_m T}$ 。

证明:

根据多项式的根和系数之间关系的韦达公式, 对式(7b)可以写出:

$$\begin{aligned} p_1 &= -(e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T} + \dots + e^{\lambda_m T}), \\ p_2 &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T} + e^{(\lambda_2 + \lambda_3)T} + \dots + e^{(\lambda_{m-1} + \lambda_m)T}, \\ &\vdots \\ p_{m-1} &= (-1)^{m-1} [e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{m-1})T} + e^{(\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_m)T}], \\ p_m &= (-1)^m e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)T}, \end{aligned} \quad (8)$$

现用数学归纳法证明. 对于  $m=1$  有

$$\hat{y}_k = a_0 + a_1 e^{\lambda_1 k}, \quad (9a)$$

$$\hat{y}_{k-1} = a_0 + a_1 e^{\lambda_1 + (k-1)}, \quad (9b)$$

将式(9a) - (9b)  $\times e^{\lambda_1 T}$ , 得到

$$\hat{y}_k - \hat{y}_{k-1} e^{\lambda_1 T} = a_0(1 - e^{\lambda_1 T}), \quad (10)$$

利用韦达公式( $m=1$ )和式(7a), 即有

$$\hat{y}_k = p_0 - p_1 \hat{y}_{k-1}. \quad (11)$$

设结论在  $m$  时已经成立, 则对于  $(m+1)$  有

$$\hat{y}_k = a_0 + a_1 e^{\lambda_1 T K} + \dots + a_{m+1} e^{\lambda_{m+1} T K}, \quad (12a)$$

$$\hat{y}_{k-1} = a_0 + a_1 e^{\lambda_1 T (K-1)} + \dots + a_{m+1} e^{\lambda_{m+1} T (K-1)}, \quad (12b)$$

将式(12a) - 式(12b)  $\times e^{\lambda_{m+1} T}$ , 得到

$$\begin{aligned} \hat{y}_k - \hat{y}_{k-1} e^{\lambda_{m+1} T} &= a_0(1 - e^{\lambda_{m+1} T}) + a_1 e^{\lambda_1 T (K-1)} (e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_{m+1} T}) + \dots \\ &\quad + a_m e^{\lambda_m T (K-1)} (e^{\lambda_m T} - e^{\lambda_{m+1} T}). \end{aligned} \quad (13)$$

令

$$\begin{aligned} Y_k &= \hat{y}_k - \hat{y}_{k-1} e^{\lambda_{m+1} T}, \\ \hat{a}_0 &= a_0(1 - e^{\lambda_{m+1} T}), \\ \hat{a}_1 &= a_1 e^{-\lambda_1 T} (e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_{m+1} T}), \\ &\dots \\ \hat{a}_m &= a_m e^{-\lambda_m T} (e^{\lambda_m T} - e^{\lambda_{m+1} T}), \end{aligned}$$

则式(13)可记为

$$Y_k = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 e^{\lambda_1 T K} + \dots + \hat{a}_m e^{\lambda_m T K}, \quad (14)$$

由于结论已假定在  $m$  时成立, 故上式有

$$Y_k = \hat{p}_0 - \hat{p}_1 Y_{k-1} - \dots - \hat{p}_m Y_{k-m}, \quad (15)$$

且有

$$\begin{aligned} \hat{p}_0 &= \hat{a}_0(1 - e^{\lambda_1 T}) \dots (1 - e^{\lambda_m T}), \\ \hat{p}_1 &= -(e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T} + \dots + e^{\lambda_m T}), \\ &\dots \\ \hat{p}_m &= (-1)^m e^{\lambda_1 T} e^{\lambda_2 T} \dots e^{\lambda_m T}, \end{aligned} \quad (16)$$

将关系式  $Y_k = \hat{y}_k - \hat{y}_{k-1} e^{\lambda_{m+1} T}$  代入式(14), 经过简单的运算后, 可整理得

$$\hat{y}_k = p_0 + p_1 \hat{y}_{k-1} - p_2 \hat{y}_{k-2} - \dots - p_{m+1} \hat{y}_{k-(m+1)}, \quad (17)$$

其中

$$p_0 = \hat{p}_0,$$

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \hat{p}_1 - e^{\lambda_{m+1}T}, \\
 p_2 &= \hat{p}_2 - \hat{p}_1 e^{\lambda_{m+1}T}, \\
 &\vdots \\
 p_m &= \hat{p}_m - \hat{p}_{m-1} e^{\lambda_{m+1}T}, \\
 p_{m+1} &= -\hat{p}_m e^{\lambda_{m+1}T}.
 \end{aligned} \quad (18)$$

现将式(16)和  $\hat{a}_0 = a_0(1 - e^{\lambda_{m+1}T})$  代入上式, 有

$$\begin{aligned}
 p_0 &= a_0(1 - e^{\lambda_1 T}) \cdots (1 - e^{\lambda_{m+1} T}), \\
 p_1 &= -(e^{\lambda_1 T} + \cdots + e^{\lambda_{m+1} T}), \\
 &\vdots \\
 p_{m+1} &= (-1)^{m+1} e^{\lambda_1 T} e^{\lambda_2 T} \cdots e^{\lambda_{m+1} T},
 \end{aligned}$$

从韦达公式可知, 由系数  $p_1, p_2, \dots, p_{m+1}$  所构成的  $(m+1)$  次多项式

$$w^{m+1} + p_1 w^m + p_2 w^{m-1} + \cdots + p_m w + p_{m+1} = 0,$$

其  $(m+1)$  个根就是  $e^{\lambda_1 T}, e^{\lambda_2 T}, \dots, e^{\lambda_{m+1} T}$ .

故在  $(m+1)$  时结论也成立, 这就证明了定理。

### 三、降阶算法

根据以上定理, 式(4)的离散形式等价于

$$\hat{y}_k = p_0 - p_1 \hat{y}_{k-1} - \cdots - p_m \hat{y}_{k-m} \quad (19a)$$

或

$$\hat{y}_k - a_0 = p_1(a_0 - \hat{y}_{k-1}) + \cdots + p_m(a_0 - \hat{y}_{k-m}), \quad (19b)$$

式(19a)和式(19b)的等价性(只要注意到韦达公式)是明显的。

假定在与高阶系统相同输入  $u(t)$  作用下, 降阶模型为式(4)或式(19b)的形式, 则二步线性二乘算法可以表达为

(1) 对于稳定于某一终值的情况, 要求降阶模型和原型有一致终值, 根据这一约束条件可以先确定系数  $a_0$

$$a_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t). \quad (20)$$

(2) 将式(19b)代入性能指标式(3), 并认为对每一时刻  $k$  有

$$\begin{aligned}
 y_k &\doteq \hat{y}_k, \\
 y_i &\doteq \hat{y}_i, \quad i < k,
 \end{aligned} \quad (21)$$

这样就有

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2 = \sum_{k=1}^N [(y_k - a_0) - (\hat{y}_k - a_0)]^2 \\
 &\doteq \sum_{k=m+1}^N \{ (y_k - a_0) - [p_1(a_0 - \hat{y}_{k-1}) + p_2(a_0 - \hat{y}_{k-2}) + \cdots + p_m(a_0 - \hat{y}_{k-m})] \}^2 \\
 &\doteq \sum_{k=m+1}^N \{ (y_k - a_0) - [p_1(a_0 - y_{k-1}) + \cdots + p_m(a_0 - y_{k-m})] \}^2,
 \end{aligned} \quad (22)$$

式中的近似相等号( $\doteq$ )在  $N \gg m$  时成立。

在 $J$ 最小的意义下, 得到参数 $p_1, p_2, \dots, p_m$ 的最小二乘估计

$$P = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \psi, \quad (23a)$$

式中

$$P = (p_1 p_2 \cdots p_m)^T, \quad (23b)$$

$$\psi = [(y_{m+1} - a_0)(y_{m+2} - a_0) \cdots (y_N - a_0)]^T, \quad (23c)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} a_0 - y_m & a_0 - y_{m-1} & \cdots & a_0 - y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 - y_{N-1} & a_0 - y_{N-2} & \cdots & a_0 - y_{N-m} \end{bmatrix}. \quad (23d)$$

如果特别重视某一时间区间的取样点, 也可得到相应的加权最小二乘解

$$P = (\phi^T W \phi)^{-1} \phi^T W \psi, \quad (24)$$

式中,  $W$ 为所希望的对称正定加权阵.

(3) 求多项式:

$$w^m + p_1 w^{m-1} + \cdots + p_m = 0$$

的 $m$ 个根 $e^{\lambda_1 T}, e^{\lambda_2 T}, \dots, e^{\lambda_m T}$ , 相应得到 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ .

(4) 根据所得 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 在性能指标

$$J = \sum_{k=1}^N [y_k - (a_0 + a_1 e^{\lambda_1 T k} + \cdots + a_m e^{\lambda_m T k})]^2 \quad (25)$$

最小时, 求得各系数 $a_1, a_2, \dots, a_m$ .

对于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 中有复根的情况, 式(25)可改写为

$$J = \sum_{k=1}^N \{ y_k - [a_0 + \sum_{i=1}^m a_i e^{\lambda_i k T} + \sum_{i=1}^m b_i e^{\alpha_i k T} \sin(\beta_i k T) + c_i e^{\alpha_i k T} \cos(\beta_i k T)] \}^2, \quad (26)$$

式中,  $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ 为实根, 其余为复根,  $\alpha_i, \beta_i$ 分别为复根 $\lambda_i$ 的实部和虚部.

在利用式(26)确定参数 $a_i, b_i, c_i$ 时, 同样可以考虑采用加权最小二乘法.

(5) 由所得参数 $a_0, a_1, \dots, a_m$ 和 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 得到降阶系统输出

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 e^{\lambda_1 i} + \cdots + a_m e^{\lambda_m i}. \quad (27)$$

当需要它的频域表示时, 利用Laplace变换式

$$G(s) = \frac{L[\hat{y}(t)]}{L[u(t)]},$$

得到相应的传递函数 $G(s)$ .

至此就实现了对一已知终值响应过程的低阶近似.

当不可能直接得到 $a_0$ 时, 只要在第二步中将式(6)代入性能指标, 得

$$J = \sum_{k=0}^N [y_k - \hat{y}_k]^2 = \sum_{k=m+1}^N [y_k - (p_0 - p_1 y_{k-1} - \cdots - p_m y_{k-m})]^2, \quad (28)$$

就可在 $J$ 最小意义下得到参数 $p_0, p_1, \dots, p_m$ , 再由式(7a)求得

$$a_0 = \frac{p_0}{(1 - e^{\lambda_1 T})(1 - e^{\lambda_2 T}) \cdots (1 - e^{\lambda_m T})} = \frac{p_0}{1 + p_1 + p_2 + \cdots + p_m}. \quad (29)$$

## 四、举 例

(1) 一个四阶系统, 其传递函数为

$$G(s) = \frac{81.6013375s^3 + 50.66496749s^2 + 99.832343s + 5}{s^4 + 105.21s^3 + 521.01s^2 + 101.05s + 5},$$

对系统加上单位阶跃输入, 差分步距  $T = 0.03 \text{ s}$ , 数据量  $N = 100$ , 应用本文方法, 当设定  $m = 2$  时, 阶跃响应和传递函数分别为

$$y_2(t) = -0.21075e^{-4.78586t} - 0.78925e^{-99.61055t},$$

$$G_2(s) = \frac{79.62829s + 477.68837}{s^2 + 104.40611s + 477.68832},$$

性能指标为  $J_2 = 2.34 \times 10^{-2}$ . 作为比较, 式(3)中用Pade法所得结果为

$$G_P(s) = \frac{23.1825s + 2.3596}{s^2 + 23.752s + 2.3596},$$

$$J_P = 1.18 \times 10^{-1}.$$

当设定  $m = 3$  时, 应用本文方法得到的低阶系统为

$$y_3(t) = 1 - 0.17292e^{-4.9999t} - 0.80734e^{-100t} - 0.01974e^{-0.09834t},$$

$$G_3(s) = \frac{81.60054s^2 + 498.3576s + 49.1719}{s^3 + 105.09834s^2 + 510.32512s + 49.1719},$$

性能指标为  $J_3 = 4.566 \times 10^{-10}$ , 已相当逼近原系统.

(2) 考虑文[1]中所建模型, 该模型为36阶的高阶系统.

所建模型100%负荷时, 给水量-5%阶跃扰动对高再出口的温度响应仿真曲线, 利用本文的降阶算法得到相应的二阶传递函数为

$$G(s) = -2.51329 \times \frac{-5.30029 \times 10^{-5}s + 7.94342 \times 10^{-6}}{s^2 + 6.16724 \times 10^{-3}s + 7.94342 \times 10^{-6}}.$$

降阶模型和原型的阶跃响应见图1.

所建模型100%负荷时, 燃料和给水同时阶跃5%对高再出口的温度响应, 本算法求得的相应复合扰动三阶传递函数为

$$G(s) = 0.93807 \times \frac{0.16884s^2 + 9.95348 \times 10^{-3}s + 2.07595 \times 10^{-6}}{s^3 + 0.1137s^2 + 8.22881 \times 10^{-4}s + 2.07595 \times 10^{-6}}.$$

降阶模型和原型的阶跃响应见图2.

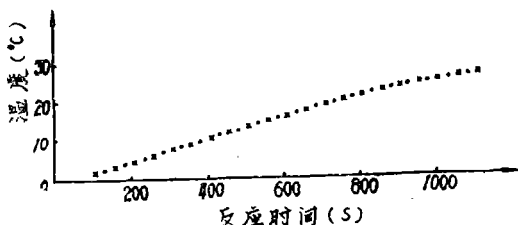


图1 降阶模型和原型阶跃响应比较(给水5%阶跃)

×——原型; ·——降阶模型

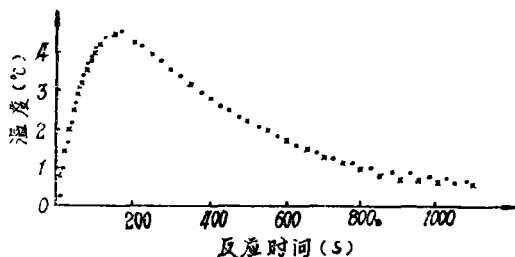


图2 给水和燃料复合扰动的阶跃响应

×——原型; ·——降阶模型

可见, 以上算例在应用较低阶次( $m = 2-3$ )的降阶模型时都能基本再现原型的阶跃响应.

## 五、结 束 语

直接利用系统的输入输出信息建立系统的低阶近似模型,避免了处理原高阶系统的矩阵求逆或求特征值等复杂运算。本文提出的降阶算法,将非线性最小二乘分解成二步线性最小二乘,这时式(23)中待处理矩阵均为 $m$ 阶( $m=2-3$ ),和非线性最小二乘的阶次 $2m$ 相比,进一步简化了计算。

保证降阶系统的稳定性,是模型降阶的一个重要方面。在工程应用中,一般模型阶次都不超过三阶,以上所进行的算例中,应用二阶或三阶模型都得到了稳定的降阶结果,但这里未给出算法的稳定性证明。在应用本算法进行低阶近似时,如不稳定,建议适当增加数据长度 $N$ ,或者使用加权最小二乘,还可考虑增添稳定性约束条件。

## 参 考 文 献

- [1] 洪秉钧、胡克定,大容量直流锅炉机理建模和数字仿真,动力工程,1(1986)。
- [2] 张启人,大系统模型降阶理论,信息与控制,4(1980)。
- [3] Shamash, Y., Critical Review of Methods for Deriving Stable Reduced-Order Models, 6th IFAC Symp. Identification and System Parameter Estimation, June(1982), U.S.A.

## A Time Domain Algorithm for a Thermo dynamic Process Model of Reduced Order

Hu Kedjing      Hong Bingjun

### Abstract

For a thermodynamic process model described by higher order state equation, the general method of reduction of order will meet with a vast amount of computation. In view of this, a simpler method based on the input/output characteristics of a plant is presented in this paper.

It is demonstrated that the parameters of a given model of reduced order can be obtained by means of two-step linear least square index. As shown by the computing examples, the model of reduced order clearly reproduces the response of the original model.