

弹性地基上弹性地基梁基础的 边界单元分析法

王履爽 麦叔良 施景勋 季进彬

(土木工程系)

摘 要

本文采用边界单元法分析弹性地基上的弹性地基梁,考虑地基与基础的相互作用,计算模型较符合实际.分析了有埋深及无埋深地基梁的情况,并通过实例比较了此法与热氏链杆法、双向链杆法及有限元法等的不同,可看到边界元法计算简便,精度高,是一种切实可行的计算分析方法.

一、概 述

建筑物都必须建筑在地基上,当地基条件不好且荷载较大时常需设置基础梁.基础梁的作用是将上部结构传来较集中的力分散到地基上,减小地基受压强度.基础造价在建筑物造价中常占很大比重,对其正确计算会给整个造价和确保建筑物安全起良好影响.因此,基础梁的理论分析和计算方法,在建筑工程设计中显得十分重要.

设计基础梁要计算其承受的剪力和弯矩,必须首先求出梁下地基反力的分布.梁下地基反力分布有以下几种不同的计算方法.

(1) 假设基础梁与地基之间的压力按直线分布,当对称基础梁受对称荷载时,地基反力成均匀分布;受偏心荷载时则为梯形分布,如图1所示.



图 1

(2) 温克尔(捷)于1867年提出一项假说:地基每单位面积上所受的壓力与地基沉陷成正比,而与受压面外的土体无关.这种假设是把土壤的受压作用,看作彼此不相连的弹簧体

本文1987年9月26日收到.

系的受压作用(图2)。

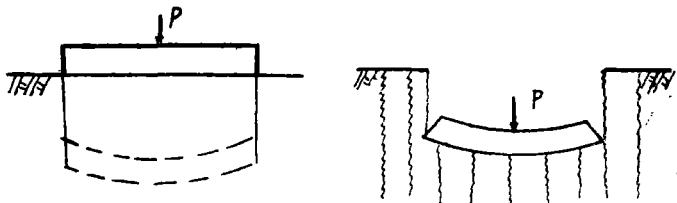


图 2

(3) 普罗克托尔(苏)于1919年首先提出按弹性半空间理论公式计算基础梁。它假设地基是半无限大的连续弹性体,即认为土壤是密实而匀质的弹性物体,应用弹性理论计算地基的沉陷,用材料力学公式计算梁的变形,然后根据平衡和接触条件确定地基的反力。

此外,关于地基弹性模型还有各向异性弹性连续介质和非均匀弹性连续介质模型,层状及纹理弹性介质模型,双参数弹性模型等。按弹性半空间理论计算基础梁,是目前采用较广泛的一种计算理论,其中尤以高氏法和热氏法应用较多。在编制表格方面做出较多贡献的高氏表,几乎包括了平面问题的各种情况,而热氏链杆法比其它一些近似解准确度更高些。按弹性半空间理论计算弹性地基梁的问题,实际上是解决接触问题。目前除承受集中力平面问题的长梁已求得准确解外,其余计算均为近似值,因平衡条件虽准确满足,但接触条件则是近似满足的。

(4) 本文应用边界单元方法分析了有埋深弹性地基梁和无埋深弹性地基梁,编制了相应的 BEMEB 及 BEMNEB 计算机程序。其计算模型合理,避免了上述各种方法的局限性,计算工作简单,能较方便地得到满意的结果。

二、弹性地基梁计算的边界单元法

1. 边界单元法

这是20世纪60年代中期开始兴起的一种新的计算方法,首先由 F. J. Rizzo 教授提出并应用于弹性静力学问题上,近10多年来逐步得到推广。本文在分析地基梁和地基时,分别采用了弹性平面全域边界元法和弹性半平面域的边界元法,建立了两种不同弹性介质共同作用的刚度方程。因而,在分析地基时,半无限域的边界只在与地基梁相互作用处进行剖分,并在半平面的无穷边界处自然满足边界条件,大大减少了分析过程中的单元数,排除了由于划定分析范围而引起的误差。对地基梁来说,则无需进行无限长梁、短梁以及刚性梁、非刚性梁的划分。完全可按地基梁的实际尺寸和地基的实际弹性性质进行分析计算,并假设地基梁与地基之间位移、力连续,从而严格满足了力和位移的协调条件,避免了因边界条件的取法而引起的误差。

(1) 边界积分方程:考虑一平面域 Ω , 其边界为 Γ , 在确定的荷载或位移条件下处于平衡状态,这一状态可由应力分量 σ_{ij} 、应变分量 ϵ_{ij} 、位移分量 u_i 、面力分量 p_i 和体力分量

b_i 表示。再假设另一区域 Ω^* 的边界为 Γ^* ，它包涵着 Ω 区域，(图 3)，其弹性性质与 Ω 相同，在新的弹性域 Ω^* 中可用 σ_{ij}^* 、 ϵ_{ij}^* 等表示这一平衡状态。由对称得

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* d\Omega \quad (1)$$

将静力平衡方程

$$\sigma_{ij,i} + b_i = 0 \quad (2)$$

和应变与位移的线性关系

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

代入式(1)并进行分部积分得

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma = \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma \quad (4)$$

式(4)对应于 Betti 功的互等定理，假设式中体力项 b_i^* 为一正的单位点荷载 p_i 作用于点 $s \in \Omega^*$ 而产生的，由此可得

$$b_i^* = \delta(s, q) P_i. \quad (5)$$

因此，如果 $s \in \Omega$ ，则式(4)的第一部分积分为

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = u_i(s) P_i. \quad (7)$$

同理，由于每一点荷载都是独立的，故带星号的位移和面力可表示为

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_{ij}^*(s, q) P_j, \\ p_j^* &= p_{ij}^*(s, q) P_i. \end{aligned} \quad (8)$$

从而式(4)可改写为

$$u_i(s) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, Q) P_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, q) b_j(q) d\Omega(q) \quad (9)$$

这里， $s, q \in \Omega$ 以及 $S, Q \in \Gamma$ ，式(9)称为 Somigliana 恒等式。 $u_{ij}^*(s, Q)$ 和 $p_{ij}^*(s, Q)$ 可用弹性基本解取代。

(2) 基本解系^[1]：本文分析基于二维各向同性平面应变假设，第一类弹性基本解为无限弹性平面域， Ω^* 假定为无限弹性介质， Γ^* 亦趋向于无穷，此时对应于 Kelvin 基本解：

当 (s, q) 为荷载点 s 到域内点 q 的距离，其导数为 q 点坐标的函数，

$$(10) \quad \left\{ \left(u_{ij}^*(s, q) - u_{ij}^*(q, s) \right) (2\alpha - 1) - \frac{u_{ij}^*(s, q)}{2\alpha} \left[\left(1 - 2\alpha \right) \delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2} \right] \right\} \frac{r^{2(\alpha-1)}}{1} = - (b^*(s, q))_{ij} \bar{q}$$

$$\left\{ \left(u_{ij}^*(s, q) - u_{ij}^*(q, s) \right) \delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2} \right\} \frac{r^{2(\alpha-1)}}{1} = - (b^*(s, q))_{ij} n$$

$$r = (r_i r_i)^{1/2}$$

$$r_i = x_i(q) - x_i(s)$$

$$r_{,i} = \partial r / \partial x_i(q) = r_i / r, \quad (i, j = 1, 2) \quad (11)$$

第二类弹性基本解为半无限弹性平面域(图 4)，一点荷载作用于均质各向同性弹性半平面域内，此时完全解的形式可写为

$$()^* = ()^* + ()^c \quad (12)$$

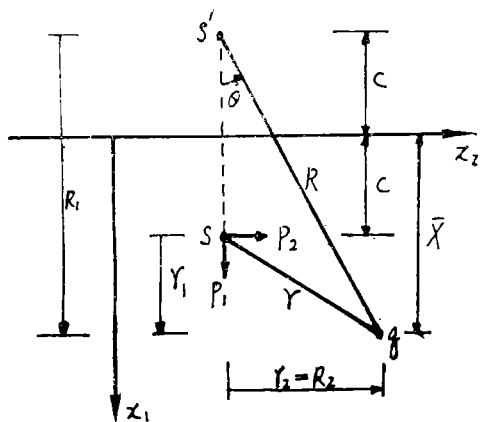


图 4

其中

其中 $()^k$ 对应于 Kelvin 解, $()^o$ 为一附加解, 这一平面应变的附加解为

$$\begin{aligned}
 u_{11}^c &= kd \left\{ -[8(1-v)^2 - (3-4v)] \ln R \right. \\
 &\quad \left. + \frac{[(3-4v)R_1^2 - 2\bar{x}]}{R^2} + \frac{4c\bar{x}R_1^2}{R^4} \right\} \\
 u_{12}^c &= kd \left\{ \frac{(3-4v)r_1r_2}{R^2} + \frac{4c\bar{x}R_1r_2}{R_4} \right. \\
 &\quad \left. - 4(1-v)(1-2v)\theta \right\} \quad (13) \\
 u_{21}^c &= kd \left\{ \frac{(3-4v)r_1r_2}{R^2} + \frac{4c\bar{x}R_1r_2}{R^4} \right. \\
 &\quad \left. + 4(1-v)(1-2v)Q \right\} \\
 u_{22}^c &= kd \left\{ -[8(1-v)^2 - (3-4v)] \ln R \right. \\
 &\quad \left. + \frac{[(3-4v)r_2^2 + 2c\bar{x}]}{R^2} - \frac{4c\bar{x}r_2^2}{R^4} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} r &= (r_i r_i)^{1/2} \\ R &= (R_i R_i)^{1/2} \\ r_i &= x_i(q) - x_i(s) \\ R_i &= x_i(q) - x_i(s') \\ c &= x_i(s) \geq 0 \\ \bar{x} &= x_1(q) \geq 0 \\ kd &= 1/[8\pi(1-\nu)G] \\ \theta &= \arctg(R_2/R_1), \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right. \quad (14)$$

应力附加解为:

$$\sigma_{111}^c = -k_S \left\{ \frac{(3\bar{x} + c)(1 - 2\nu)}{R^2} + \frac{2R_1(R_1^2 + 2(\bar{x}) - 4\bar{x}r_2^2(1 - 2\nu))}{R^4} - \frac{16c\bar{x}R_1r_2^2}{R^6} \right\} \quad (15a)$$

$$\sigma_{121}^2 = -k_s r_2 \left\{ -\frac{(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2[\bar{x}^2 - 2c\bar{x} - c^2 + 2\bar{x}R_1(1-2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}R_1^2}{R^8} \right\} \quad (15b)$$

$$\sigma_{221}^a = -k_s \left\{ \frac{(\bar{x} + 3c)(1 - 2\nu)}{R^2} + \frac{2[R_1(r_2^2 + 2c^2) - 2cr_2^2 + 2\bar{x}r_2^2(1 - 2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}R_1r_2^2}{P^3} \right\} \quad (15c)$$

$$\sigma_{112}^c = -k_s r_2 \left\{ \frac{1-2\nu}{R^2} - \frac{2[c^2 - \bar{x}^2 + 6c\bar{x} - 2\bar{x}R_1(1-2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}r_2^2}{R^6} \right\} \quad (15d)$$

$$\sigma_{122}^c = -k_s \left\{ \frac{(3\bar{x} + c)(1 - 2\nu)}{R^2} + \frac{2[(2c\bar{x} + r_2^2)R_1 - 2\bar{x}R^2(1 - 2\nu)]}{R^4} - \frac{16c\bar{x}Rr_2^2}{R^6} \right\} \quad (15e)$$

$$\sigma_{222}^c = -k_{s_2} \left\{ \frac{3(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2[r_2^2 - 4c\bar{x} - 2c^2 - 2\bar{x}R_1(1-2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}R_1^2}{R^6} \right\} \quad (15f)$$

这里

$$k_s = 1/[4\pi(1 - \nu)] \quad (16)$$

对应的面力

$$p_{ij}^c = \sigma_{ijk}^o n_k \quad (17)$$

经过推导整理, 无限域及半无限域中的边界积分方程可由 Somigliana 恒等式给出统一形式

$$C_{ij}(S)u_j(S) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q)u_j(Q)d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q)p_j(Q)d\Gamma(Q) \quad (18)$$

此时体积力不考虑. 假设边界 Γ 划分为 L 个单元 Γ_i , 则方程(18)对边界点, S_i 可写为

$$\tilde{C}(S_i)\tilde{u}(S_i) + \sum_{j=1}^L \left[\int_{\Gamma_j} \tilde{p}^* \tilde{N} d\Gamma \right] \tilde{u}^{(n)} = \sum_{j=1}^L \left[\int_{\Gamma_j} \tilde{u}^* \tilde{N} d\Gamma \right] \tilde{p}^{(n)} \quad (19)$$

式中 \tilde{N} 为插值形函数. 上式中的积分可由高斯数值积分得到, 则方程(19)可写为矩阵形式

$$(\tilde{C} + \hat{H})\tilde{u} = \tilde{G}\tilde{p}$$

矢量 \tilde{u} , \tilde{p} 包含边界元节点的所有位移及面力, 而对角线元素 \tilde{C} 系数合并 \hat{H} , 得矩阵 \tilde{H} , 则

$$\tilde{H}\tilde{u} = \tilde{G}\tilde{p} \quad (21)$$

这里 \tilde{H} 矩阵的对角线元素包含 C_{ij} 系数项, \tilde{H} 矩阵的对角线元素可直接由式(21)在无外力的刚体位移情况下求得. 对无限域情况有

$$\tilde{H}_{aa} = - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq a}}^{2n} \tilde{H}_{aq} \quad (a=1, 2, \dots, 2n) \quad (22)$$

对半无限域有

$$\tilde{H}_{aa} = \tilde{I} - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq a}}^{2n} \tilde{H}_{aq}, \quad (a=1, 2, \dots, 2n) \quad (23)$$

在计算时可将边界划分为不同的单元^[2], 可划分为常量单元, 线性单元及高次单元. 本文采用常量单元, 这种单元分析计算方便, 并且单元数达到一定数目仍可获得高精度结果.

常量单元设单元结点为该单元的中点 S , 如图 5 所示. S 点的位移及面力即为该单元的位移和面力, 每一单元的位移和面力为常量, 则此时的形函数可取为 $\tilde{N} = \tilde{I}$.

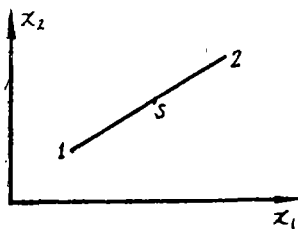


图 5

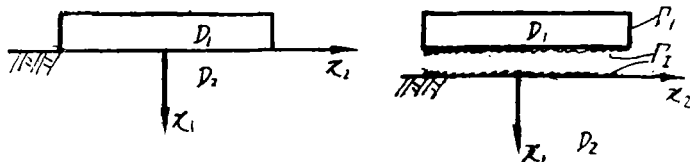


图 6

2. 无埋深基础梁

如图 6 所示, 有一基础梁放置在地基表面上, 设基础梁为介质 D_1 , 此域中的弹性基本解满足全域解系; 地基为介质 D_2 , 其域中弹性基本解满足半无限域解系. 基础梁及地基域的边界积分方程皆同式(10).

地基梁与地基相互作用设为 Γ_1 , 梁的其它边界设为 Γ_1 , 对梁域 D_1 可得边界积分平衡矩阵方程

$$\begin{bmatrix} H^{111} & H^{11n} \\ H^{n11} & H^{n1n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{11} \\ u^{n1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{111} & G^{11n} \\ G^{n11} & G^{n1n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^{11} \\ P^{n1} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

对地基域可得边界积分平衡矩阵方程

$$[H^{I12}][u^{I2}] = [G^{I12}][p^{I2}] \quad (25)$$

边界相互作用条件为位移、力连续, 则得

$$\begin{aligned} u^{I1} &= u^{I2} = u^I \\ p^{I1} &= -p^{I2} = p^I \end{aligned} \quad (26)$$

将边界连续条件式(26)代入式(24)、(25), 并将未知位移及拉力移到等式左边, 已知项移到右边, 合并整理得

$$\begin{bmatrix} H^{111} & H^{111} & -G^{111} \\ H^{111} & H^{111} & -G^{111} \\ 0 & H^{112} & G^{112} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^I \\ p^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{111} \\ G^{111} \\ 0 \end{bmatrix} \{p^1\} \quad (27)$$

此式即为无埋深弹性地基梁与地基共同作用的边界元平衡方程。

3. 有埋深基础梁

如图7所示, 有一弹性地基梁埋置于地基表面以下, 设地基梁的介质 D_1 , 地基为介质 D_2 , 基础梁及地基的边界积分方程仍同式(10), 地基梁以弹性全平面域模拟, 地基以弹性半平面域模拟, 此时, 基础梁边界皆为与地基的相互作用边界, 设已知应力边界条件的边界为 Γ_1 , 未知边界为 Γ_I , 则对梁域 D_1 可得边界元平衡方程

$$\begin{bmatrix} H^{111} & H^{112} \\ H^{112} & H^{112} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{11} \\ u^{1I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{111} & G^{111} \\ G^{111} & G^{111} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{11} \\ P^{1I} \end{bmatrix} \quad (28)$$

对地基域可得边界元平衡方程:

$$\begin{bmatrix} H^{111} & H^{112} \\ H^{112} & H^{112} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{12} \\ u^{I2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{111} & G^{112} \\ G^{112} & G^{112} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{12} \\ P^{I2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

接触边界仍取为完全接触状态, 则有:

$$\begin{aligned} u^I &= u^{I2} = u^I \\ p^{I1} &= -p^{I2} = p^I \end{aligned} \quad (30)$$

将边界连续条件式(30)代入式(28)、(29), 整理合并得

$$\begin{bmatrix} H^{111} & H^{111} & -G^{111} \\ H^{111} & H^{111} & -G^{111} \\ H^{112} & H^{112} & G^{112} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^I \\ p^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{111} \\ G^{111} \\ -G^{112} \end{bmatrix} \{p^1\} \quad (31)$$

此式即为有埋深弹性地基梁与地基共同作用的边界元矩阵平衡方程。

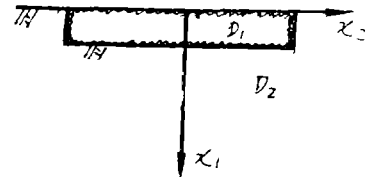


图 7

三、计算机程序计算及实例分析

本文作者编制了计算无理埋深弹性地基梁的边界元通用程序 BEMNEB 和计算有埋深弹性地基梁的边界元通用程序 BEMEB。这两个通用程序可计算出梁底反力及水平剪力分布。

梁底边界的水平与竖向相对位移,可在 IBM-PC 机上运行。

例 1^[3]: 设有一无埋深弹性地基梁,处于平面变形状态,如图8(a)所示,梁长2.8m、宽1 m,高0.2m,梁的弹性模量 $E_1=20.6\times 20^6\text{kpa}$,泊松比 $\mu_1=0.167$,地基的弹性模量 $E_2=9810\text{kpa}$,泊松比 $\mu_2=0.34$,由弹性关系可得梁的剪切模量 $G_1=0.8826\times 10^7\text{kpa}$,地基的弹性模量为 $G_2=3660.4\text{kpa}$ 。

边界元分析法的单元划分及节点编号如图8(b)所示,每单元长为0.2m,由于计算中边界条件以线应力输入,则将点荷载转化为局部均布荷载分布在两个单元上,其相应值 q 为

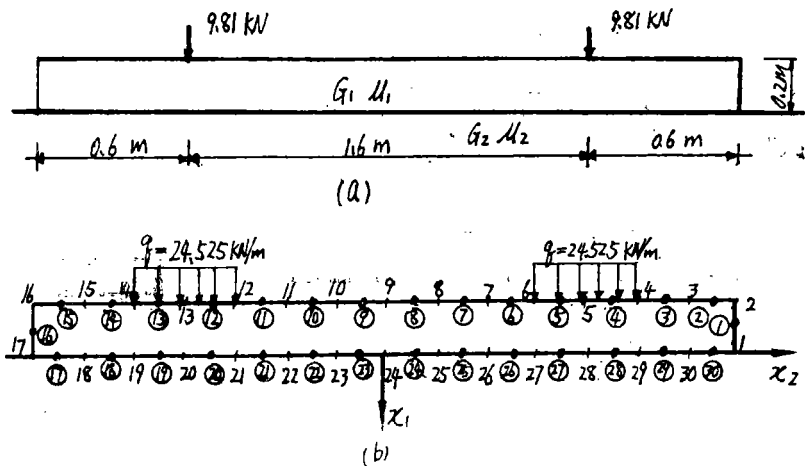


图 8

24.525kN/m,在图8(b)中无园圈数码为单元端点编号,有园圈数码为单元结点编号,单元结点为每一单元的中点.通过无埋深梁计算程序BEMNEB计算得地基梁底反力 σ_1 及剪力 σ_2 (如表1),由于对称性只列出一半应力。

表 1 (应力单位为kN/m)

点号	17	18	19	20	21	22	23
σ_1	-15.746	-7.914	-6.422	-5.687	-5.246	-4.995	-4.880
σ_2	6.586	1.001	0.503	0.487	0.297	0.163	0.052

此例若用有限元模拟地基,用弹性链杆模拟梁与地基的接触条件,计算简图如图9所示,采用梁单元8个,刚性链杆7个,地基三角形单元292个,结点总数180个,计算结果如图10(a),若采用热莫契金的链杆法计算得反力分布如图10(b)所示。如将本文计算结果化为相应值则得图10(c)所示的地基反力。图10中地基反力单位为kN/m。

由此可看出,边界元法分析出的地基反力结果与其它

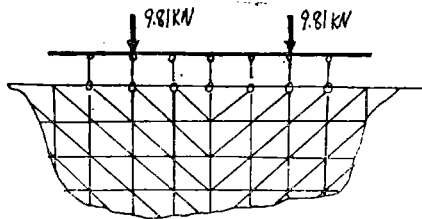


图 9

方法结果基本一致,但边界元法方便得多,这里只划分了三十个边界单元。

例2^[4]:设有一弹性地基梁如图11(a)所示,梁长为12m,宽1m,高2m,梁的剪切模量

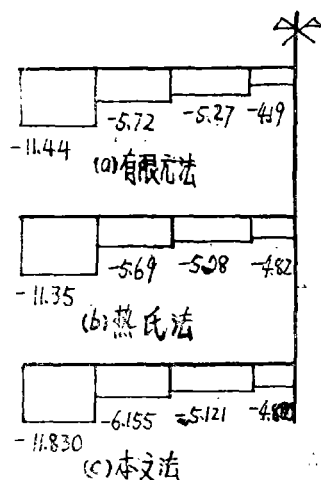


图 10

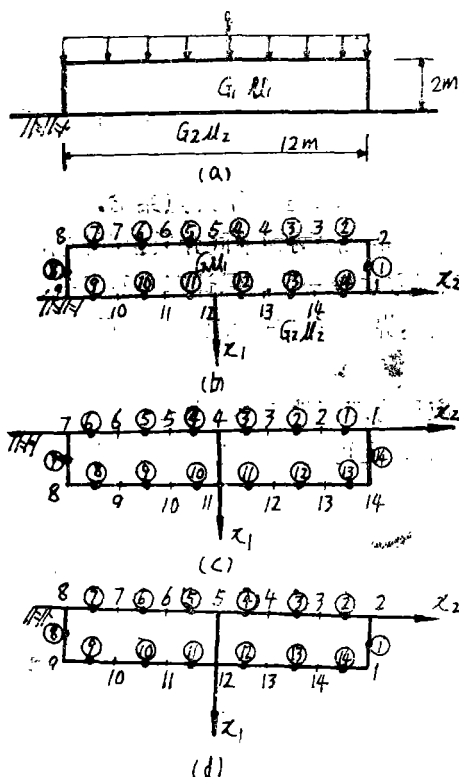


图 11

$G_1 = 0.75 \times 10^6 \text{ t/m}^2$, 泊松比 $\nu_1 = 0.2$, 地基的剪切模量 $G_2 = 0.3846 \times 10^6 \text{ t/m}^2$, 泊松比 $\nu_2 = 0.3$, 梁受均布荷载 $q = 1 \text{ t/m}$ 。按无埋深梁的边界元分析法,单元划分及结点编号如图11(b)所示;按有埋深梁的梁侧考虑与地基完全接触的边界元单元划分及结点编号如图11(c)所示;按有埋深梁的梁侧考虑无拉力亦无剪力的边界元分析法,单元划分及结点编号如图11(d)所示。

无埋深地基梁按双向链杆法计算,链杆结点号同图11(b)结点号。

以上各种情况的分析结果由图12表示,此图中表示梁底竖向反力,单位 t/m 。

由图12计算结果可看出,地基梁无埋深时,边界元分析结果与双向弹性链杆法基本一致。当梁有埋深时,若考虑梁侧与地基完全接触,由于梁侧土的限制,基础底面反力与一般分析结果不同,但

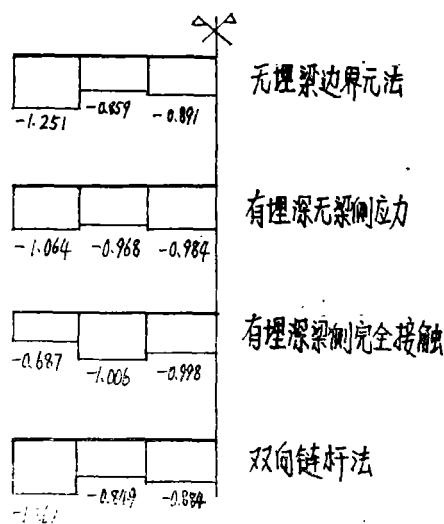


图 12

在实际工程中,当产生变形后,梁侧粘着力不会很大,而无法限制梁的变形,故可按梁侧无应力状态近似模拟有埋深地基梁的受力。分析中可看出,有埋深地基梁的基底反力趋于平缓。

由上述边界元法确定基底反力后,可按材料力学的一般公式得出地基梁的弯矩及剪力,从而可进行地基梁的工程实际设计。

四、结 语

通过以上分析得出以下几点结论。

1. 用边界元的两种不同介质相互作用原理分析弹性地基梁是一种较好的方法,计算结果与其它分析方法较一致,但计算方便很多,从理论上来说边界元法精度较高。

2. 用边界元方法分析地基梁,可模拟有埋深及无埋深情况,并且可分析不同的接触边界情况。

3. 应用有埋深地基梁分析原理,可进一步分析桩与土的共同作用问题及桩加承台的共同工作问题,还可进一步增加上部结构。分析高层建筑上部结构、地基、基础的协同工作具体分析另文介绍。

4. 为了分析方便,本文是以弹性地基梁为例进行分析,实际上本文的方法实用于各种不埋或浅埋式基础,如片筏、箱基等,只是将其进行刚度等代化为平面问题即可。

参 考 文 献

- [1] Tells, J. C. F., *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems*, Prince in Germany, (1983).
- [2] Brebbia, C. A., *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, (1973).
- [3] 李传才, 用计算机程序对弹性地基和上部框架进行整体分析, 武汉水利电力学院学报, 3(1985).
- [4] 潘家铮, 弹性地基上的梁和框架, 上海科技卫生出版社, (1960).

Study on Elastic Ground Beam by Boundary Element Method

Wang Lushuang Mai Shuliang Shi Jingxun Ji Jinbin

Abstract

This paper studies the elastic ground beam with the aid of boundary element method. It analyses the interaction of elastic ground beam with elastic foundation and works out a computation module in conformity to actual condition. It also analyses the ground beams both under or not under embeded condition.

As compared with CAO-brace piece method, two-dimensional method, and finite element method, the boundary element method used in this paper has proved itself to be a precise, simple, practical and effective computation method.