

弹塑性动态 J 积分的有限元分析

林国裕 董友成

(华侨大学) (浙江大学)

摘 要

本文介绍用有限元估算弹塑性动态 J 积分值的方法。对具有中心裂纹的矩形板作了线弹性和弹塑性分析,并与静态情况作比较,得到了积分基本守恒和随时间的变化规律。同时分析了动态 J 积分的一些性质。

一、引 言

近年来,受动态荷载作用的结构断裂问题,已引起广泛的重视。由于数学上的困难,对于这类问题的解析解很难得到,只有少数几个特殊情况才能得出解析解,大多数解答总通过有限元法、有限差分法等数值计算方法得到的。在这些问题中,动态应力强度因子起着重要的作用。但是,在实际工程中,许多重要结构总是由韧性材料构成,在裂纹扩展前,其尖端已存在相当大范围的塑性变形,这时动态应力强度因子已经不能应用。对于这类问题动态 J 积分可望成为一个有效的断裂参数,很多研究者提出了不少 J 积分或能量释放率表达式[1-8]。

裂纹尖端的弹性能量释放率的回路积分表达式最早由 Atkinson 和 Eshelby [1] 提出,他们认为裂纹动态扩展同准静态扩展具有相同的形式,只是将弹性应变能密度换为总的机械能密度,即弹性能加上动能。Freund^[2] 得到了由裂纹尖端场量表示的同样表达式。Kishimoto 等^[3,4] 及 Atluri^[5] 和 Nishioka^[6-8] 采用围绕尖端有限区域的积分来进行动态能量释放率的计算,目前,大多数计算分析仍限于线弹性情况。本文采用八节点等参有限元对受阶跃拉伸载荷作用的矩形裂纹板作了线弹性及弹塑性分析,采用 Newmark 逐步积分法进行时间积分,考察了线弹性及弹塑性情况下的 J 积分的守恒性,得到了 J 积分随时间的变化情况,分析了动态弹塑性情况下 J 积分的一些性质。

二、动态 J 积分公式

考虑图 1 所示的平面裂纹体,坐标系选取也示于图中,则 J 积分或动态能态释放率有如

本文1987年7月5日收到。

下式子^[9]

$$J_1 = \int_{\Gamma} (wn_1 - Tu_{,1}) d\Gamma + \int_A \rho \dot{u} u_{,1} dA, \quad (1)$$

以及

$$J_1' = \int_{\Gamma} (wn_1 - Tu_{,1} + \frac{1}{2} \rho \dot{u} \dot{u} n_1) d\Gamma + \int_A (\rho \dot{u} u_{,1} - \rho \dot{u} u_{,1}) dA. \quad (2)$$

式中, Γ 为包围裂纹尖端的任意曲线; A 为曲线 Γ 和裂面包围的区域; w 为应变能密度; n 为 Γ 上的外法线矢; T 为 Γ 上的张力矢; u 为位移矢; ρ 为材料密度。本文的计算结果表明无论是在线弹性情况下还是在弹性情况下, J_1 和 J_1' 都近乎一致。

在线弹性情况下, 动态 J 积分同动态应力强度因子有如下关系:

$$J_1 = qK_1^2/E.$$

式中, 对于平应变问题 $q = 1 - \nu^2$, ν 为材料的泊松比, E 为材料的弹性模量。

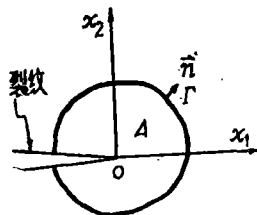


图 1

三、动态有限元分析

目前关于有限元动力分析问题已有较为系统的研究^[10-13], 本文仅就具体的计算方法表自己的做法。

1. 本构关系

对于弹塑性材料来说, 本构关系取决于整个应力和应变历史。本文采用满足 Von-Mises 屈服条件的增量流动法则, 应力应变关系为

$$d\sigma_{ij} = \frac{E}{1-2\nu} de\delta_{ij} + 2Gd\varepsilon'_{ij} - \alpha^* \frac{3G\sigma'_{kl}d\varepsilon'_{kl}}{\bar{\sigma}^2[(H'/3G)+1]} \sigma'_{ij} \quad (4)$$

式中, $de = (1/3)d\varepsilon_{ij}$, $d\varepsilon'_{ij} = d\varepsilon_{ij} - de\delta_{ij}$; σ'_{ij} 为应力偏量; $\bar{\sigma}$ 为等效正应力; H' 为材料硬化曲线的斜率; G 和 ν 分别为剪切弹性模量和泊松比, α^* 由下面式子确定: 当 $\bar{\sigma} = c$ 而 $\sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij} \geq 0$ 时, $\alpha^* = 1$; 当 $\bar{\sigma} < c$ 或 $\bar{\sigma} = c$ 而 $\sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij} < 0$ 时, $\alpha^* = 0$ 。硬化规律由下式表示

$$\bar{\sigma} = H(\int d\varepsilon^p), \quad (5)$$

$$d\varepsilon^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ii}^p d\varepsilon_{ii}^p}. \quad (6)$$

2. 有限元动力分析

本文采用八节点等参元进行有限元动力分析, 对于任意时刻 t , 坐标和单元位移模式由

$$\begin{cases} {}^t x_j = \sum_{k=1}^8 N_k {}^t x_j^k, & {}^{t+\Delta t} x_j = \sum_{k=1}^8 N_k {}^{t+\Delta t} x_j^k, \\ {}^t u_j = \sum_{k=1}^8 N_k {}^t u_j^k, & {}^{t+\Delta t} u_j = \sum_{k=1}^8 N_k {}^{t+\Delta t} u_j^k. \end{cases} \quad (j=1,2) \quad (7)$$

式中, ${}^t x_j^k$ 表示在时刻 t 单元节点 k 在 j 方向的坐标, 其它符号类推, N_k 为单元的形函数, 单元刚度矩阵和等效节点力均采用 2×2 高斯积分形成, 经过离散化后的运动方程在

写成矩阵形式后为

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{R\}. \quad (8)$$

其中, $[M]$ 为一致质量阵, $[C]$ 为阻尼阵, k 为刚度阵, \ddot{u} 、 \dot{u} 和 u 分别为加速度向量、速度向量和位移向量, R 为载荷向量.

采用 Newmark 逐步积分法进行时间积分, 对式 (8) 进行时间离散后得

$$[M]\{u_{i+\Delta t}\} + [c]\{\dot{u}_{i+\Delta t}\} + [k]\{u_{i+\Delta t}\} = \{R_{i+\Delta t}\} \quad (9)$$

位移和速度由下面公式确定^[10].

$$\{u_{i+\Delta t}\} = \{u_i\} + \{\dot{u}_i\}\Delta t + (1-\beta)\{\ddot{u}_i\}(\Delta t^2/2) + 2\beta\{\ddot{u}_{i+\Delta t}\}(\Delta t^2/2), \quad (10)$$

$$\{\dot{u}_{i+\Delta t}\} = \{\dot{u}_i\} + \{\ddot{u}_i\}\Delta t + \gamma\{\ddot{u}_{i+\Delta t}\}\Delta t. \quad (11)$$

这里 β , γ 是满足下面两个式子的参数

$$\gamma \geq 0.5, \quad (12a)$$

$$\beta \geq 0.25(0.5 + \gamma^2). \quad (12b)$$

当式 (12) 的条件得到满足时, 算法是无条件稳定的.

四、数 值 计 算

本文对图 2 所示的带裂纹的矩形板作了计算, 板的上下表面在时刻 $t=0$ 受到均布拉应力 σ 的作用, 荷载同时间关系满足 Heaviside 函数, 板的长度为 $2l=104\text{mm}$, 高为 $2H=40\text{mm}$, 裂纹的长度为 $2a=24\text{mm}$, 利用对称性仅取其 $1/4$ 进行计算, 单元网格划分及 J 积分路径均

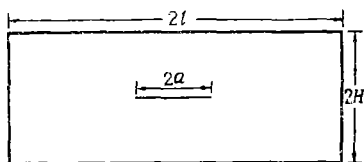


图 2

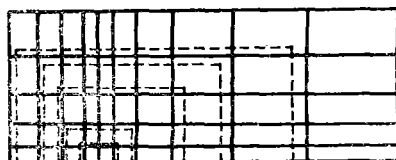


图 3 有限元网格

示于图 3. 由于高斯点的应力应变值的精度较高, 因此, J 积分路径均取在高斯点上, 对于单元中的 $u_{i,1}$, $\dot{u}_{i,1}$, \ddot{u}_i 及 \ddot{u}_i 等值的计算均采用式 (7) 中的形函数由单元节点值插值得到, 共划分 50 个单元, 181 个节点, 单元最小尺寸为 2mm , 在进行时间积分时取 $\gamma=0.5$, $\beta=0.25$, 时间步长 $\Delta t=0.2\mu\text{s}$, 计算按平面应变进行, 不考虑阻尼.

本文对线弹性以及弹塑性情况均作了计算, 对于弹塑性情况, 假定材料具有线性强化的特性. 材料的特性常数为: 弹性模量 $E=7.35 \times 10^{10}\text{Pa}$; 泊松比 $\nu=0.25$; 密度 $\rho=0.00245\text{Kg/mm}^3$; 屈服应力 $\sigma_y=2.352 \times 10^8\text{Pa}$; 硬化曲线斜率 $H'=1.47 \times 10^9\text{Pa}$.

图 4 为线弹性情况的结果. (a) 图给出了各个路径的 J 积分值, 从图中可看出 J 积分具有很好的守恒性; (b) 给出了由 J 积分换算得的应力强度因子随时间的变化关系. 图中还示出了文 [14] 的解析解, 可看出本文的结果与解析解吻合的很好, 从而也说明了程序的正确

性, 对式(1)、(2)两个动态 J 积分表达式均作了计算, 结果表明相差不大, 最大误差不超过 3%。

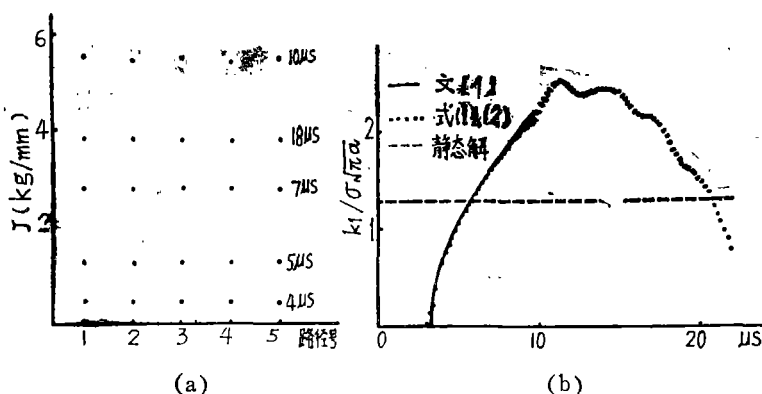


图 4 J 积分同路径关系与应力强度因子随时间变化关系

图 5、6 为相应于载荷 $\sigma = 10 \text{ Kg/mm}^2$ 和 $\sigma = 15 \text{ Kg/mm}^2$ 两种情况下的动态弹塑性分析的结果, 从图中可看出看出动态 J 积分仍然具有较好的守恒性。

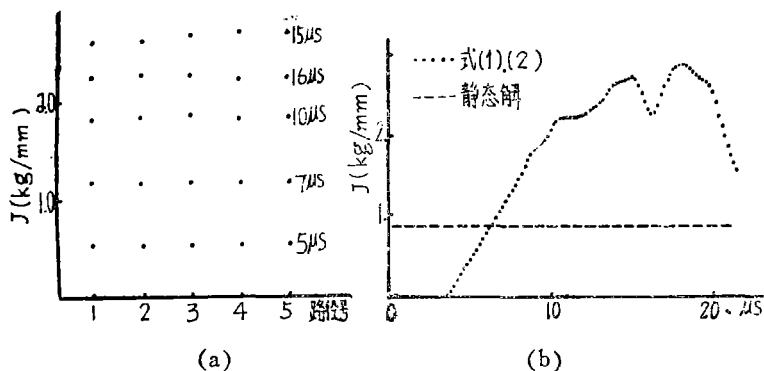


图 5 J 积分同路径关系($\sigma = 10 \text{ kg/mm}^2$)与 J 积分随时间变化关系($\sigma = 10 \text{ kg/mm}^2$)

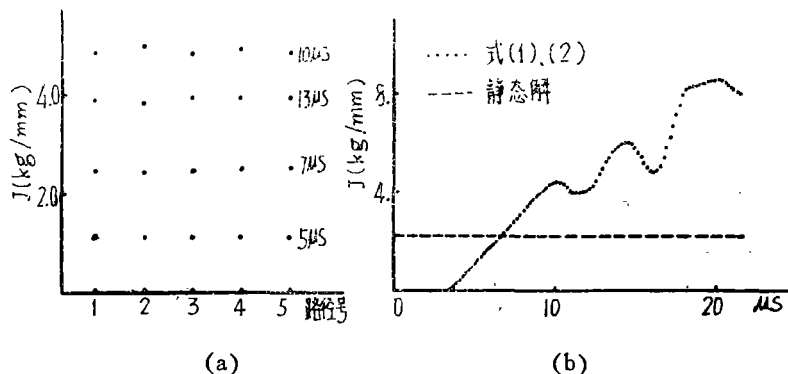


图 6 J 积分和路径关系($\sigma = 15 \text{ kg/mm}^2$)与 J 积分随时间变化关系($\sigma = 15 \text{ kg/mm}^2$)

五、结果分析与讨论

J 积分的最大优点是能够避开裂纹尖端的高应力集中区域来进行断裂分析。它已在静态断裂力学中得到广泛的应用, 本文的计算结果表明 J 积分经过修改后仍能应用于动态断裂问题, 对于线弹性情况或弹塑性情况, 动态 J 积分均具有轻好的守恒性, 且具有如下优点:

(1) 采用相当粗糙的网格(图2), 即可得到轻为精确的 J 积分值, 从而可以节省大量的计算时间; (2) 对于裂纹尖端区域不需要另作特殊的处理, 适用性广; (3) 便于进行有限元程序设计。

从图4、5、6中均可看出, 在同样的载荷幅值下, 动态冲击载荷产生的 J 积分的最大值约为静态值的4倍, 说明动态冲击情况要比静态加载情况危险得多。比较图4(a)与图5(a), 可看出在同样的载荷下, 线弹性情况的 J 积分要大于弹塑性情况的 J 积分, 说明韧性材料比脆性材料安全。

另外可看出, 在所计算的三种情况下, J 积分随时间的变化规律有所不同。在图4的弹性情况下, J 积分在达到最大值前是单调上升的而且最早达到最大值。而对于图5和图6的弹塑性情况, J 积分在达到最大值前出现了波动, 而且外加载荷越大波动的幅度也越大。这可以由尖端区的应力情况来解释, 由于在弹塑性情况下, J 积分在达到最大值前, 裂纹尖端已经出现了屈服, 相应的尖端屈服区的应力会因屈服而下降, 从而导致 J 积分值的下降, 且所加载荷越大, 屈服程度也就越深, 相对于弹性情况, 应力下降也越厉害, 因而 J 积分值也必下降得厉害, 波动幅度当然越大。另一方面, 说明在线弹性情况下因应力不会下降(由屈服造成)致使 J 积分必会最早达到最大值而不会象弹塑性情况那样出现波动现象。

六、结 论

本文在介绍用动力有限元估算动态 J 积分值的方法中, 经过有关的分析和计算结果表明动态 J 积分为基本守恒, 公式(1)和(2)均可用来计算动态弹塑性 J 积分, 二者误差很小。还得到了动态 J 积分随时间变化的规律。

参 考 文 献

- [1] Atkinson, C. & Eshelby, J. D., *Int. J. Fract. Mech.*, 4 (1968), 3—8.
- [2] Freund, L. B., *J. Elasticity*, 2 (1972), 341—349.
- [3] Kishimoto, K., Aoki, S. & Sakata, M., *Engng. Fract. Mech.*, 13 (1980), 387—394.
- [4] Aoki, S., Kishimoto, K. & Sakata, M., *Engng. Fract. Mech.*, 19 (1984), 827—836.

- [5] Atluri, S. N. , *Engng. Fract. Mech.* , 16 (1982) , 341—364.
- [6] Nishioka, t. & Atluri, S. N. , *Engng. Fract. Mech.* 18 (1983) , 1—12.
- [7] Nishioka, t. & Atluri, S. N. , *Engng. Fract. Mech.* 18 (1983) , 23—33.
- [8] Nishioka, t. & Atluri, S. N. , *AIAAJ* , 22 (1984) , 409414.
- [9] Nakamura, T. , Shih, C. F. & Freund, L. B. , *Engng. Fract. Mech.* 22 (1985) , 437—452
- [10] Zienkiewicz, O. C. , *The Finite Element Method in Engineering science*, McGraw-Hill, London, (1971) .
- [11] Bathe, K. J. , Ramm, E. & Wilson, E. L. , *Int. J. Num. Meth. Engng.* , 9 (1975) , 353—386.
- [12] Bathe, K. J. & Ozdemir, H. , *Compt. Struct.* , 6 (1976) , 81—92.
- [13] Nagarajan, S. & Popov, E. P. , *Compt. truct.* 4 (1974) , 1117—1134.
- [14] Thau, S. A. & Lu, T. H. , *Int. J. Solids Struct.* , 7 (1971) , 731—750.

Finite Element Analysis on Elastic-Plastic Dynamic J Integral

Lin Guoyu Dong Youcheng

Abstract

This paper presents a method for estimating the elastic-plastic dynamic J integral value by finite element analysis. The linear elastic and elastic-plastic analysis are conducted on a rectangular plate with central crack, and a comparison is made under static state.

J integral is shown by the result to be conservative on the whole, and to be time-dependent regularly.