第10卷 第2期 华侨大学学报自然科学版 Vol.10 No.2
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1989年4月 (NATURAL SCIENCE) Apr. 1989

结构分析中的病态矩阵

王全凤

(土木工程系)

摘　　要

对结构分析中可能存在的病态矩阵，如不采取必要的措施会造成计算结果的严重失真.本文研究解的准确性，指出在结构分析中病态矩阵可能存在条件和其本质以及电算过程中应采取的措施.

一、问题的提出

高层框架-剪力墙结构作为一种有效的抗侧移结构体系，现在被广泛应用于建筑结构中。带边框的剪力墙如能导出与框架构件一样的单元刚度矩阵，那末用有限单元法求解，就容易组成阶数比一般把剪力墙离散成矩形单元，或三角形单元小得多的结构总刚度矩阵。

文[1]提出将带边框剪力墙用交叉杆系代替可达到上述目的。首先假定剪力墙与围绕着它的框架构件形成一体共同作用，将层间剪力墙用截面为Ae的交叉杆系代替；把框架柱用柱头及柱脚皆铰接而只承担轴向力的等价截面Ac的杆件代替；同时假定围着它的框架梁截面积A_b及截面惯性矩I_b均为无穷大（图1）.

这样如图2左边所示的框架-剪力墙结构可置换成为如图2右边所示替代结构，使得结构单元形式统一、单元个数减少，大大降低了总刚度的阶数.

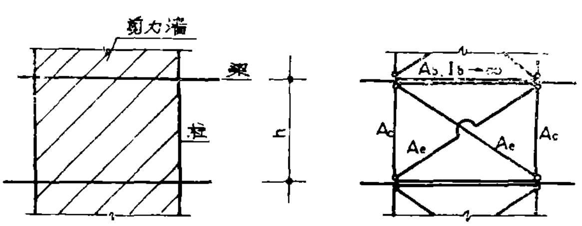

图 1

图2置换结构能够用刚度方程表达力的平衡条件为

$$[K]\cdot\{D\}=\{P\}, \tag{1}$$

本文1987年9月1日收到.

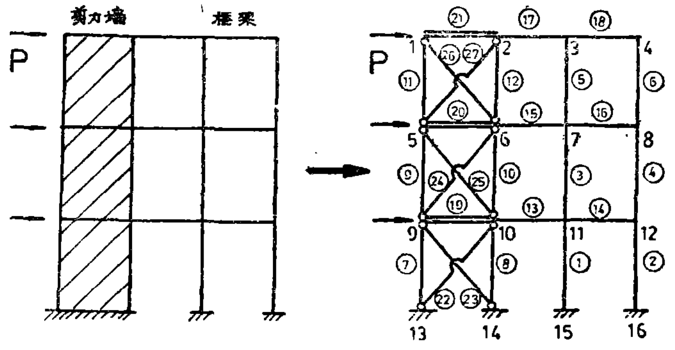

图 2

式中，[K]是结构的总刚度矩阵；{D}是结点的位移向量；{P}是结点的等效荷载向量。其解

$$\{D\}=[K]^{-1}\cdot\{P\}, \tag{2}$$

考查一下象上述那样结构对应的刚度方程中，刚度矩阵[K]的元素微小变化对解{D}的影响。设[2]

$$[K]=\begin{pmatrix}5 & 7 & 6 & 5\\ 7 & 10 & 8 & 7\\ 6 & 8 & 10 & 9\\ 5 & 7 & 9 & 10\end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\{P\}=[23 \quad 32 \quad 33 \quad 31]^T,$$

刚度方程的真实解{D}=[1 1 1 1]^T。现在假设矩阵[K]中的第一行第一列元素k_{11}有一点小变化，减少了0.01。这时，方程的解为

$$\{D\}=[161.07 \quad -38.22 \quad -15.62 \quad 9.25]^T$$

从上述算例可看出，矩阵[K]中的诸元素那怕只有一个发生微小的变化，对解{D}的影响也很大。而[K]中诸元素在数值上的微小变化，在用电子计算机进行运算的过程中是一定会发生的。在电子计算机上进行算术运算时，$(a+b+c)$可能不等于$(a+b+c)$；$(a+b)c$可能不等于$(ac+bc)$，发生这种现象的根本原因是电子计算机只能对有限位数进行运算，因此在电子计算机上集成总刚度[K]含着一定的误差。如果在这矩阵里的元素值有微小变化，它能引起解{D}产生很大的变化，那末这个矩阵就是病态矩阵，上述式(3)中矩阵[K]就是一个病态矩阵。如文[3]所示，对一个三跨十层框架-墙板结构欲求出墙板的最优位置，使得该结构抗侧移刚度为最大，需要解刚度方程(1)近10^4次。这无疑对刚度方程(1)的稳定性是很大的考验，很难保证在每次求解方程(1)的过程中，当矩阵[K]的元素有微小变化时，对它的解不会影响。

另外，在上述的置换结构中，带边框剪力墙的边框梁刚度假定为无限大，而边框柱和交叉杆的刚度是有限的。当刚度方程中某两个未知量值非常接近时，也就是说邻近结点位移未知量相等时，或者在一个刚度很大的单元周围被许多柔性单元包围时，由于刚度系数变化幅度很大，则刚度方程都可能出现病态。所以上述置换结构本身潜伏着不稳定性的因素。

二、问题的实质

如上所述，如果一个刚度方程出现病态，它的必要条件之一是刚度矩阵中诸元素的值发生微小的变化。如果刚度矩阵元素的误差或者在解刚度方程时，对解的影响很大，这个刚度矩阵就是病态矩阵。现在用一个如图3所示的简单例子来说明这个问题的本质[4]。

如果刚度矩阵的行或列是线性相关，此矩阵是奇异的，那末方程无解。这个情况被图3(a)中两条平行线证实，除非结构是几何可变的或者对结构的力平衡和位移条件表达不正确，一般是不会碰到这种情况的。如果两条直线如图3(b)所示那样正交，这是最优的情况，即使它的

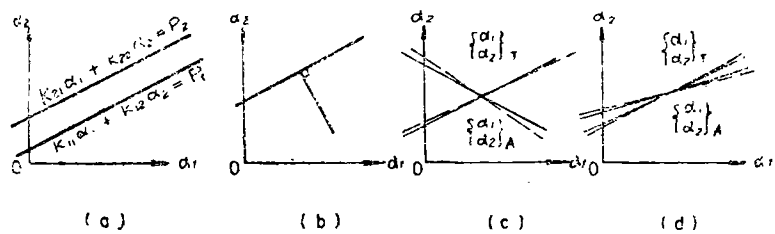

图 3

解的误差不会被自动修正，这个误差也是很小的。非病态矩阵正如图3(c)两条直线在中间相交，虽然解的误差是不可避免的，它的解既不会象两条实线相交点那样数学上的精确解$\{D\}_T$，也不会象两条虚线相交点那样不符合实际情况的解$\{D\}_A$，这种情况解的误差是在一个允许的范围内。也就是说，计算结果$\{D\}_A$与精确解$\{D\}_T$非常接近。当这两条相交直线的夹角如图3(d)所示是很小时，那末问题成为病态，它的解对计算过程中的误差是非常敏感的，因此，它的解是相当不准确。

病态矩阵作为极端情况是接近于它的奇异性，一般用矩阵系数行列式值为零来表示矩阵这种性质。从这里可以得到启发，矩阵系数行列式的值，其大小可以作为病态程度的度量。也就是说，矩阵行列式的值越小，那末矩阵病态就越严重。由于电子计算机只能用有限的位数来表示一个数，若刚度矩阵行列式值愈小，在计算过程中积累的误差就越大，造成了计算结果的严重失真。

三、问题的解决

对结构分析的结果，我们最关心的应是它的正确性，得到的解应能比较有效地保证结构的安全和经济性，或者对结构的特性有个比较合理的估计。显然，在求解刚度方程的过程中，要永远保证刚度方程的稳定性才能达到上述的目的。因此，在设计这样一个数值程序时，首先应该设置一个校核系统，一旦不合理的解被求出，就应该立即被告知。这样可以及时发现，找出原因，避免做许多无用功。其次，既然已知道病态矩阵的病因，不管它是由何种原因引起刚度方程不稳定，则应尽量想办法减少运算误差。因为电子计算机只能用有限的位数来表示数，因此要设法保护数字的有限位数，下列的一些措施必须被采取。

1. 避逃两个相近的数相减

例如$A=0.52363$、$B=0.52351$都是五位有效数字，那末$A-B=0.00012$则只有两位有效数字，这启发了在两个很接近的数进行减法运算时，精度可能大大减低。为了避免精度下降，可对公式进行处理，尽量避免减法。

2．注意保护数量级小的数

在编制程序时，要注意某个数量级小的物理量在计算过程中可能被吃掉。例如上述置换结构，在集成总刚度过程中，若框架梁刚度是个数量大的数，而围绕它的框架柱及交叉杆刚度是个数量级小的数，那末这个数量级小的数就可能被数量级大的数吃掉，引起计算结果失真。如对下列A、B和C三个数进行加法运算，$A=10^{12}$、$B=10$、$C\approx -A$，若按$(A+B)+C$的次序来编程序，在电子计算机上A就可能吃掉B，且A、C互相抵消，其结果接近于零。但若按$(A+C)+B$的次序，其结果接近于10。

3．注意计算步骤简化，减少算术运算的次数

由于实际计算是按有限位数进行的，所以数值解每一步都可能有误差。减少算术运算的次数，就意味着减少误差的积累。例如要算乘方x^{255}，一共要做254次乘法运算。如果把它分解成$x^{255}=x\cdot x^2\cdot x^4\cdot x^8\cdot x^{16}\cdot x^{32}\cdot x^{64}\cdot x^{128}$，只要做14次乘法运算。

用数值方法，解上述有n个未知量的刚度方程(1)中包含着大量的算术运算次数。例如，用高斯消元法需要做除法$\frac{(n+1)\cdot n}{2}$次，乘法和加法各$\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}\right.$次$\left.\right)$，才能得到该方程的解。因此，在有限单元法分析中利用子结构法可以减少总刚度矩阵的阶数n，进而大大减少了由于运算次数累积的误差。

4．用双精度减少舍入误差

有效数字的位数可以刻划出近似数的精确度，绝对误差与小数点后的位数有关，相对误差与有效数字的位数有关[5]。由于电子计算机只能用有限的位数表示一个数，因此在不同类型的电子计算机中，一个数的准确性就不一样。为了改进解的误差，必须在形成总刚度矩阵$[K]$和求解$\{D\}$的过程中都采用双精度，这样就会避免严重的计算结果失真。如果在形成总刚度时采用单精度，在求解联立方程时采用双精度，或者只采用单精度计算出未知量，此时计算结果已有了误差，即使用迭代法等改进方法也改善不了精度。

对图2右边的置换结构，结点编码用阿拉伯数字表示，取边框梁断面惯性矩及面积值均为一个大数10^7，等效边框柱及交叉杆面积可分别根据等效关系算出有限小的值。把用单精度、双精度与形成总刚度时的单精度、解联立方程时的双精度，等三种不同的有效数字处理方法计算得到的结果——结点侧向位移值D_L比较在表1。

表 1

结点编码	有效数字处理方法($D_L\times10^{-4}$m)		
	单精度	只在解方程时用双精度	双精度
1	−0.2743	−0.4705	0.6845
13	−0.2437	0.2874	0.5448
25	−0.07685	2.427	0.3051

从表1可明显看出，由于刚度方程呈现出病态，用单精度或只是在解刚度方程时用双精度，引起解产生很大的误差，不符合结构在水平荷载作用下结点位移的实际情况，位移方向与荷载作用方向不一致，造成严重的失真。而同一结构自始至终采用双精度进行运算，得到的结果符合结构变形的实际情况。横向水平位移随着结构高度的增加而增加。结构各终点同时能满足力的平衡和位移连续条件，所得的结果是可信的。由此可得出结论：采用双精度可有效地保证计算结果的可靠性，对有病态征兆的方程组更应该如此。

参　考　文　献

〔1〕小橋守，最新建筑构造力学，森北株式会社，（东京），（1978）.

〔2〕Hosking, R.J.Joyce, D.C.and Turner, J.C., *First Steqs in Numerical Analysis*, Hodder and Stoughton, First edition, (1978).

〔3〕王全凤，高层框架-墙板结构中墙板的最优位置，建筑科学，1(1988).

〔4〕Willian, M.and Richard, H.C., *Matrix Structural Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., Canada, (1979).

〔5〕华岳生、黄友谦，数值逼近，人民教育出版社，7(1978).

〔6〕赵超燮，结构矩阵分析原理，人民教育出版社，9(1982).

Ill-Conditioned Matrix in Structural Analysis

Wang Quanfeng

Abstract

This paper studies the accuracy of solution for a structure. Owing to the probable existence of ill-conditioned matrix, some countermeasures have to be taken so as to avoid the lack of fidelity.

With respect to the ill-conditioned matrix in structural analysis, this paper points out the conditions for its existence, it properties, and its countermeasures which ought to take for ensuring the accuracy of solution in the course of computing.