

# 磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律 及其应用

王建成 陈燊年

(应用物理系)

## 提 要

本文给出磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律,可求出在线性各向异性介质中若干种电流分布的磁场,为稳恒电流在线性各向异性介质中激发磁场提供了一个基本规律。

## 一、引 言

随着近代非线性电子元件的出现和超大规模集成电路的研制,促进了非线性网络理论的迅速发展<sup>[1]</sup>。但是这门学科的个别基本定律是从线性网络相应的基本定律经拓扑推广得到的,因而不能圆满地解决介质非线性所带来的一些基本物理问题。为摆脱这一困难,近年已有文章<sup>[2,3]</sup>从场论方面探讨这个问题,认为网络内电磁场与构成网络元件的非线性或线性介质之间的相互作用,只不过是电磁场与物质间的相互作用的一种特例。据此,本文作者在推导非线性网络运动方程过程中,首先建立了在磁线性各向异性介质中磁矢势  $\vec{A}$  所满足的微分方程及其解。把此结果应用于研究稳恒磁场问题上,从而导出在磁线性各向异性介质中的毕奥-萨伐尔定律,并由该定律计算在磁线性各向异性介质中若干种电流分布的磁场及其它结果,为研究各向异性电磁学提供一个新的途径。

## 二、磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律

在磁线性各向异性介质中,磁矢势  $\vec{A}$  满足的微分方程为  $\nabla \times (\vec{\mu}^{-1} \cdot \nabla \times \vec{A}) = \vec{j}$ 。式中并矢  $\vec{\mu}^{-1}$  为  $\vec{\mu}^{-1} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mu_{ij}^{-1} \vec{e}_i \vec{e}_j$ ,  $\mu_{ij}^{-1}$  是磁导率张量逆矩阵  $[\mu_{ij}]^{-1}$  的元素。

本文1988年8月3日收到。

当各向异性介质的三个主轴与直角坐标X、Y、Z三个轴互为平行时,磁矢势方程的解的三个分量是

$$\begin{aligned} A_1(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_{22}\mu_{33}}{\mu_{11}}} \int \frac{j_1(\vec{x}') dV'}{\sqrt{(R_1^2/\mu_{11}) + (R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})}}; \\ A_2(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{33}}{\mu_{22}}} \int \frac{j_2(\vec{x}') dV'}{\sqrt{(R_1^2/\mu_{11}) + (R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})}}; \\ A_3(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{22}}{\mu_{33}}} \int \frac{j_3(\vec{x}') dV'}{\sqrt{(R_1^2/\mu_{11}) + (R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})}}, \end{aligned}$$

式中 $\vec{R}$ 为源点 $\vec{x}'$ 到观察点 $\vec{x}$ 的矢径,即 $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'$ 。若令

$$a_1 = \sqrt{\frac{\mu_{22}\mu_{33}}{\mu_{11}}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{33}}{\mu_{22}}}, \quad a_3 = \sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{22}}{\mu_{33}}}, \quad (1)$$

则磁矢势的三个分量合并在一起表为

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{J}'(\vec{x}') dV'}{R_\mu}, \quad (2)$$

式中

$$\vec{J}'(\vec{x}') = a_1 j_1(\vec{x}') \vec{e}_1 + a_2 j_2(\vec{x}') \vec{e}_2 + a_3 j_3(\vec{x}') \vec{e}_3; \quad (3)$$

$$R_\mu = [(R_1^2/\mu_{11}) + (R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})]^{1/2}, \quad (4)$$

$\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 、 $\vec{e}_3$ 分别是三个直角坐标轴的单位矢量。现对式(2)两边求旋度,因 $\vec{J}'(\vec{x}')$ 与 $\vec{x}$ 无关,故得

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \nabla \frac{1}{R_\mu} \times \vec{J}'(\vec{x}') dV', \quad (5)$$

因有

$$\frac{\partial R_1}{\partial x_1} = \frac{\partial R_2}{\partial x_2} = \frac{\partial R_3}{\partial x_3} = 1$$

和

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{R_\mu} &= -\frac{R_1}{\mu_{11}} \left( \frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}} \right)^{-3/2}; \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{R_\mu} &= -\frac{R_2}{\mu_{22}} \left( \frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}} \right)^{-3/2}; \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{R_\mu} &= -\frac{R_3}{\mu_{33}} \left( \frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}} \right)^{-3/2}, \end{aligned}$$

故式(5)中 $1/R_\mu$ 的梯度为

$$\nabla \frac{1}{R_\mu} = -\frac{(R_1/\mu_{11})\vec{e}_1 + (R_2/\mu_{22})\vec{e}_2 + (R_3/\mu_{33})\vec{e}_3}{(R_1^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33})^{3/2}}.$$

作变换

$$y_1^2 = R_1^2/\mu_{11}, \quad y_2^2 = R_2^2/\mu_{22}, \quad y_3^2 = R_3^2/\mu_{33} \quad (6)$$

后,前式表为

$$\nabla(1/R_\mu) = -\vec{y}'/y^3, \quad (7)$$

式中

$$\vec{y}' = y_1' \vec{e}_1 + y_2' \vec{e}_2 + y_3' \vec{e}_3, \quad (8)$$

而且

$$y_1' = \frac{y_1}{\sqrt{\mu_{11}}}, \quad y_2' = \frac{y_2}{\sqrt{\mu_{22}}}, \quad y_3' = \frac{y_3}{\sqrt{\mu_{33}}}, \quad (9)$$

因而, 把式(7)代入式(5)得

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{J}' \times \vec{y}'}{y'^3} dV'. \quad (10)$$

此为磁各向异性毕奥-萨伐尔定律的一种形式, 由下面变换还可以得到另一种显含磁导率张量的形式. 由式(6)、(8)和(9)可写出  $\vec{y}' = (R_1/\mu_{11})\vec{e}_1 + (R_2/\mu_{22})\vec{e}_2 + (R_3/\mu_{33})\vec{e}_3$ , 于是

$$\begin{aligned} \vec{J}' \times \vec{y}' = & (a_2 j_2 \frac{R_3}{\mu_{33}} - a_3 j_3 \frac{R_2}{\mu_{22}}) \vec{e}_1 + (a_3 j_3 \frac{R_1}{\mu_{11}} - a_1 j_1 \frac{R_3}{\mu_{33}}) \vec{e}_2 \\ & + (a_1 j_1 \frac{R_2}{\mu_{22}} - a_2 j_2 \frac{R_1}{\mu_{11}}) \vec{e}_3, \end{aligned}$$

再以式(1)代入上式得

$$\vec{J}' \times \vec{y}' = \vec{\mu}' \cdot (\vec{j} \times \vec{R}), \quad (11)$$

式中并矢  $\vec{\mu}'$  为

$$\vec{\mu}' = \sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}}} \vec{e}_1 \vec{e}_1 + \sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}}} \vec{e}_2 \vec{e}_2 + \sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}}} \vec{e}_3 \vec{e}_3, \quad (12)$$

于是把式(6)、(11)代入式(10), 得通过并矢  $\vec{\mu}'$  表出的磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\vec{\mu}'}{4\pi} \cdot \int \frac{\vec{j} \times \vec{R}}{[(R_1^2/\mu_{11}) + (R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})]^{3/2}} dV'. \quad (13)$$

若  $I$  代表电流强度, 则当电流作线分布时, 上式写成

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\vec{\mu}'}{4\pi} \cdot \int \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{[(R_1^2/\mu_{11}) + (R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})]^{3/2}}, \quad (14)$$

当各向异性三个主轴不与直角三个坐标轴互为平行时, 可由上式推广得

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\vec{\mu}'}{4\pi} \cdot \int \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{\left( \sum_{i,k=1}^3 \mu_{ik}^{-1} R_i R_k \right)^{3/2}}, \quad (15)$$

式中并矢  $\vec{\mu}'$  现是

$$\begin{aligned} \vec{\mu}' = & \sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}}} \vec{e}_1 \vec{e}_1 + \sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}}} \vec{e}_2 \vec{e}_2 + \sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}}} \vec{e}_3 \vec{e}_3 \\ & + \frac{2}{\sqrt{\mu_{33}}} \vec{e}_1 \vec{e}_2 + \frac{2}{\sqrt{\mu_{22}}} \vec{e}_1 \vec{e}_3 + \frac{2}{\sqrt{\mu_{11}}} \vec{e}_3 \vec{e}_2. \end{aligned}$$

我们称式(13)–(15)为磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律. 由此定律可见, 表征线性各向异性介质的磁导率已不再是一个标量, 而是由9个量组成的并矢  $\vec{\mu}'$ .

### 三、各向异性介质中载流直导线的磁场

设载流直导线位于Z轴上, 求Y轴上距原点为a的p点的磁场(图1).

在距坐标原点  $l$  处取电流元  $I d\vec{l}$ , 按题意有  $\vec{R} = a\vec{e}_2 - l\vec{e}_3$ . 因而  $I d\vec{l} \times \vec{R} = -I a dl \vec{e}_1$ , 并由图可见  $l = a \tan \beta$ ,  $dl = a \sec^2 \beta d\beta$ . 以上各式代入式(14)的积分中, 得

$$\int \frac{I d\vec{l} \times \vec{R}}{[(R_1^2/\mu_{11}) + (R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})]^{3/2}} = -\frac{\mu_{22}^{3/2} I}{a} \int \frac{\sec^2 \beta d\beta}{[1 + (\mu_{22}/\mu_{33}) \tan^2 \beta]^{3/2}} \vec{e}_1,$$

作变换

$$\sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{33}}} \tan \beta = \tan \theta;$$

$$\sec^2 \beta d\beta = \sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{22}}} \sec^2 \theta d\theta,$$

因而, 可求出积分为

$$\int \frac{I d\vec{l} \times \vec{R}}{(R_1^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33})^{3/2}} = -\frac{\mu_{22} \sqrt{\mu_{33}}}{a} I (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \vec{e}_1,$$

式中

$$\theta_1 = \arctg \left( \sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{33}}} \tan \beta_1 \right); \quad \theta_2 = \arctg \left( \sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{33}}} \tan \beta_2 \right),$$

代入式(14), 得所求的磁感应强度

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\mu_{22} \sqrt{\mu_{33}} \vec{\mu}' \cdot \left[ \frac{I}{4\pi a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \vec{e}_1 \right], \quad (16)$$

或再以式(12)代入, 得

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{22}}{4\pi a}} I (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \vec{e}_1. \quad (17)$$

当导线为“无限长”时, 因有  $\theta_1 \rightarrow -\pi/2$ ,  $\theta_2 \rightarrow \pi/2$ , 于是式(17)化为

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{22}}{2\pi a}} I \vec{e}_1, \quad (18)$$

由式(17)或(18)见到, 介质的各向异性对磁场分布的影响, 有赖于载流直导线相对于各向异性介质的三个主轴的方位. 若载流直导线不是位于  $Z$  轴上, 而是分别位于  $X$  轴和  $Y$  轴上, 则式(17)或(18)中的  $\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}} \vec{e}_1$  应分别由  $\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}} \vec{e}_2$  和  $\sqrt{\mu_{11}\mu_{33}} \vec{e}_3$  替换之.

当介质为线性各向同性时, 因有  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$ ,  $\mu$  是磁导率常数. 于是式(17)、(18)分别化为通常情况下的直导线和“无限长”直导线的磁场公式

$$B(\vec{x}) = (\mu/4\pi a) I (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$B(\vec{x}) = (\mu/2\pi a) I$$

这是通常公认的结果.

#### 四、各向异性介质中载流圆线圈轴线上的磁场

设有半径为  $a$  的圆线圈, 通有电流  $I$ , 求轴线上距圆心为  $x$  的  $P$  点的磁场. 圆上任一电流

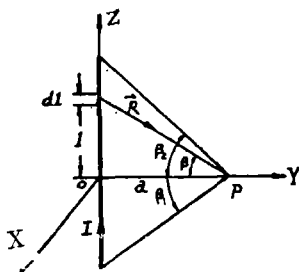


图 1

元  $Id\vec{l}$  与此电流元到  $P$  点的矢径  $\vec{R}$  之间的夹角为  $90^\circ$ ，因而有

$$Id\vec{l} \times \vec{R} = IRdl\sin\beta\vec{e}_1 + IRdl\cos\beta\vec{e}_\perp,$$

式中  $\vec{e}_\perp$  为在  $d\vec{B}$  与  $X$  轴所组成平面上垂直于  $X$  轴方向的单位矢量。由于对称性，上式右边第二项积分后互相抵消，而第一项积分互相加强。而且由图 2 可见

$$R_1 = x, \quad R\sin\beta = a.$$

以上各式代入式(14)的积分中，得

$$\int \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{[(R_1^2/\mu_{11}) + (R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})]^{3/2}} = \frac{2\pi a^2 I}{[(x^2/\mu_{11}) + (R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})]^{3/2}} \vec{e}_1,$$

代入式(14)，得所求的磁感应强度

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\vec{\mu}'}{2\pi} \cdot \frac{IS}{[(x^2/\mu_{11}) + (R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})]^{3/2}} \vec{e}_1, \quad (19)$$

或再以式(12)代入，得

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}}} \frac{IS}{[(x^2/\mu_{11}) + (R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})]^{3/2}} \vec{e}_1, \quad (20)$$

式中， $S = \pi a^2$  为圆线圈的面积。

在圆心处， $x = 0$ ，式(20)化为

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}}} \frac{IS}{[(R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})]^{3/2}} \vec{e}_1. \quad (21)$$

当介质为线性各向同性时，因有  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$ ，于是式(20)和(21)分别化为通常情况下载流圆线圈轴线上和圆心处的磁场公式

$$B(\vec{x}) = (\mu/2\pi)IS/(x^2 + a^2)^{3/2},$$

$$B(\vec{x}) = \mu I/2a,$$

这是通常公认的结果。显然，若圆线圈不是位于  $Y-Z$  平面上，而是分别位于  $Z-X$  平面和  $X-Y$  平面上。则在式(20)中的  $(\mu_{11}/\mu_{22}\mu_{33})^{1/2}\vec{e}_1$  应分别由  $(\mu_{22}/\mu_{11}\mu_{33})^{1/2}\vec{e}_2$  和  $(\mu_{33}/\mu_{11}\mu_{22})^{1/2}\vec{e}_3$  替换之，表明各向异性介质对磁场分布的影响。

## 五、各向异性介质中载流直螺线管内部的磁场

设长为  $L$ 、半径为  $a$  的螺线管，其轴线与  $X$  轴平行。通有电流  $I$ ，每单位长度有  $n$  匝线圈，求螺线管轴线上某点  $P$  的磁场。

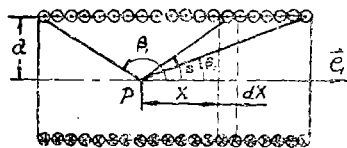


图 3

在螺线管上，距离  $P$  点为  $x$  的地方取一小段  $dx$ ，这小段上的线圈相当于电流为  $Indx$  的一个圆形电流。应用公式(19)，可得这小段上的线圈在  $P$  点产生的磁感应强度为

$$d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\vec{\mu}'}{2\pi} \cdot \frac{nISdx}{[(x^2/\mu_{11}) + A^2]^{3/2}} \vec{e}_1, \quad A^2 = (R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33}).$$

因为螺线管的各小段在 $P$ 点所产生的磁感应强度的方向相同, 因此整个螺线管所产生的总磁感应强度, 由上式得

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\vec{\mu}'}{2\pi} \cdot \int \frac{nISdx}{[(x^2/\mu_{11}) + A^2]^{3/2}} \vec{e}_1.$$

由图3见到 $x = a \operatorname{ctg} \beta$ ,  $dx = -a \operatorname{csc}^2 \beta d\beta$ , 代入化简得

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{\vec{\mu}'}{2\pi} \cdot \frac{n a I S}{A^3} \int \frac{\operatorname{csc}^2 \beta d\beta}{[1 + (a^2/\mu_{11} A^2) \operatorname{ctg}^2 \beta]^{3/2}} \vec{e}_1,$$

作变换

$$\sqrt{\frac{a^2}{\mu_{11} A^2}} \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \theta,$$

微分之

$$\operatorname{csc}^2 \beta d\beta = \sqrt{\frac{\mu_{11} A^2}{a^2}} \operatorname{csc}^2 \theta d\theta.$$

因而, 积分后得所求的磁感应强度

$$\vec{B} = [(\mu_{11})^{1/2} S / 2\pi A^2] \vec{\mu}' \cdot nI (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \vec{e}_1, \quad (22)$$

或以 $A$ 的值和式(12)代入, 得

$$\vec{B} = \frac{\mu_{11} S}{2\pi \sqrt{\frac{\mu_{22} \mu_{33}}{[(R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})]}}} nI (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \vec{e}_1, \quad (23)$$

式中

$$\theta_1 = \operatorname{arccctg}(\sqrt{\frac{a^2}{\mu_{11} A^2}} \operatorname{ctg} \beta_1); \quad \theta_2 = \operatorname{arccctg}(\sqrt{\frac{a^2}{\mu_{11} A^2}} \operatorname{ctg} \beta_2).$$

当螺线管为“无限长”时, 因有 $\theta_1 \rightarrow \pi$ ,  $\theta_2 \rightarrow 0$ , 于是得无限长直螺线管内部的磁感应强度

$$\vec{B} = \frac{\mu_{11} S n I}{\pi \sqrt{\mu_{22} \mu_{33}} [(R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})]} \vec{e}_1. \quad (24)$$

当介质为线性各向同性时, 因有 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$  和  $R_2^2 + R_3^2 = a^2$ ,  $\beta_1 = \theta_1$ ,  $\beta_2 = \theta_2$ . 于是, 式(23)和(24)分别化为通常情况下载流直螺线管和无限长直螺线管的磁场公式

$$B(\vec{x}) = (\mu/2) nI (\cos \beta_2 - \cos \beta_1); \quad B(\vec{x}) = \mu nI,$$

这是所预期的结果。

## 六、各向异性介质中的亥姆霍兹线圈

通有电流 $I$ 的一对相同的圆形线圈, 彼此平行且共轴, 并取轴线与 $X$ 轴平行, 两线圈的半径为 $a$ , 相距 $l$ . 设轴线上 $p$ 点离位于两线圈中间的坐标原点的距离为 $x$ , 则 $p$ 点到两线圈中心的距离分别为 $x_1 = x + (l/2)$

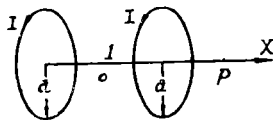


图 4

和  $x_2 = x - (l/2)$ 。考虑到两线圈在  $p$  点产生的磁感应强度的方向是一致的, 因而由式(20)得两线圈在  $p$  点产生的总磁感应强度大小为

$$B = \sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}}} \frac{IS}{2\pi} \left[ \frac{1}{[(x_1^2/\mu_{11}) + (R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})]^{3/2}} - \frac{1}{[(x_2^2/\mu_{11}) + (R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})]^{3/2}} \right]. \quad (25)$$

它的一阶和二阶导数分别为

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dx} &= -\sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}}} \frac{3IS}{2\pi} \left\{ \frac{x + (l/2)}{[(x + (l/2))^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33}]^{5/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x - (l/2)}{[(x - (l/2))^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33}]^{5/2}} \right\}; \\ \frac{d^2B}{dx^2} &= \sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}}} \frac{3IS}{2\pi} \left\{ \frac{4(x + (l/2))^2/\mu_{11} - R_2^2/\mu_{22} - R_3^2/\mu_{33}}{[(x + (l/2))^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33}]^{7/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(x - (l/2))^2/\mu_{11} - R_2^2/\mu_{22} - R_3^2/\mu_{33}}{[(x - (l/2))^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33}]^{7/2}} \right\}. \end{aligned}$$

令  $x = 0$  处的  $d^2B/dx^2 = 0$ , 即得在坐标原点附近磁场最均匀的条件是

$$l^2/\mu_{11} = (R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33}),$$

或

$$l = [\mu_{11}((R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33}))]^{1/2}. \quad (26)$$

当介质为线性各向同性时, 固有

$$\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$$

和

$$R_2^2 + R_3^2 = a^2,$$

于是, 式(26)化为通常情况下最均匀的条件

$$l = a$$

这是正确的结果。

## 七、充满磁各向异性介质的无限长直螺线管的自感系数

长为  $L$ 、半径为  $a$  的无限长直螺线管, 共有  $N$  匝, 其内充满磁各向异性介质。当忽略漏磁和线圈两端磁场不均匀性时, 管内各点的磁感应强度由式(24)给出。总磁通量为  $\Phi = NBS$ 。以式(21)、螺线管体积  $V = SL$  和  $N = nL$  代入上式得

$$\Phi = \frac{\mu_{11}n^2SVI}{\pi\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}[(R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})]},$$

按自感系数  $L$  的定义, 得

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_{11}n^2SV}{\pi\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}[(R_2^2/\mu_{22}) + (R_3^2/\mu_{33})]}. \quad (27)$$

若螺线管的轴线分别与  $Y$  轴和  $Z$  轴平行, 则有

$$L = \frac{\mu_{22}n^2SV}{\pi\sqrt{\mu_{11}\mu_{33}}[(R_3^2/\mu_{33}) + (R_1^2/\mu_{11})]}, \quad (28)$$

$$L = \frac{\mu_{33} n^2 S l}{\pi \sqrt{\mu_{11} \mu_{22}} [(R_1^2/\mu_{11}) + (R_2^2/\mu_{22})]} \quad (29)$$

当介质为线性各向同性时,  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$  和  $R_1^2 + R_2^2 = a^2$ 。于是, 式(27)化为通常情况下的无限长直螺线管的自感系数公式

$$L = \mu n^2 V, \quad (30)$$

结果正是所预料的。

式(27)、(28)和(29)也显示了各向异性介质的特性, 即螺线管的轴线相对张量  $\mu_{ij}$  的三个主轴方向不同时, 同一螺线管也具有不同的自感系数。

众所周知, 绝对纯的各向同性介质是没有的, 所有介质只是程度不同的各向异性而已。因而, 仅当  $\mu_{11}$ ,  $\mu_{22}$  和  $\mu_{33}$  这三者数值近似相等时, 由式(30)所表示的自感系数才接近于真实情况。

### 参 考 文 献

- (1) Chua, L.O. and Rohrer, R.A., On the Dynamic Equations of a Class of Nonlinear RLC Networks, *IEEE Trans, Circuit Theory*, CT-12, 4, (1965), 475-489.
- (2) 陈圣年, 电网络基本方程的场论, *电子学报*, 2(1987)。
- (3) Chen Xinnian, A Set of New Formulæ of Capacitance of a Capacitor with Nonlinear, Anisotropic or Isotropic Dielectrics, *Journal of Electronics (China)*, 69, 9 (1982)。
- (4) Piergiorgio, L.E. Uslenghi, *Nonlinear Electromagnetics*, Academic Press, INC., (1989)。
- (5) Plonka, M.A., *Applied Electromagnetics*, McGraw-Hill Book Company, (1978)。

## Biot-Savart Law of Magnetic Anisotropy and Its Application

Wang Jiancheng Chen Xinnian

### Abstract

This paper deals with Biot-Savart law of magnetic anisotropy, which provides a fundamental law for computing magnetic fields produced by steady current in magnetic anisotropic media. Several examples of how to use the law are also given here.