第10卷 第2期 华侨大学学报自然科学版 Vol.10 No.2
1989年4月 JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Apr. 1989

关于Orlicz空间中多项式最佳逼近的存在定理

石 川

（华东工学院）

提 要

本文在Orlicz空间中引进了多项式最佳逼近的概念，研究了在Orlicz空间中多项式最佳逼近的存在定理，并提出了Orlicz空间中多项式最佳逼近的一些例子。

一、记号与定义

记$G=[a,b]$为R^1中一有限区间，$M(u)$为N函数，$N(v)$为其余N函数，L_M^*为以Orlicz范数赋范的Orlicz空间，$L_{(M)}^*$为以Luxembury范数赋范的Orlicz空间。

定义 1 设$\{\varphi_j(x)\}_1^n$为定义在G上的函数系。

（i）若$\{\varphi_j(x)\}_1^n\subseteq L_M^*$且不存在不全为零的常数$C_j(1\leqslant j\leqslant 1)$，使

$$\|C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x)\|_M=0,$$

则称$\{\varphi_j(x)\}_1^n$在L_M^*中线性无关，否则称为线性相关。

（ii）若$\{\varphi_j(x)\}_1^n\subseteq L_{(M)}^*$且不存在不全为零的常数$C_j(1\leqslant j\leqslant n)$，使

$$\|c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)\|_{(M)}=0,$$

则称$\{\varphi_j(x)\}_1^n$在$L_{(M)}^*$中线性无关，否则称为线性相关。

定义 2 设$\{\varphi_j(x)\}_1^n$为定义在G上的函数系，若$\{\varphi_j(x)\}_1^n$在L_M^*(或$L_{(M)}^*$)中线性无关，则称线性组合

$$P(x)=\sum_{j=1}^n a_j\varphi_j(x)\qquad (a_j\in R^1,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

为L_M^*(或$L_{(M)}^*$)中关于函数系$\{\varphi_j(x)\}_1^n$的多项式。

定义 3 设$\{\varphi_j(x)\}_1^n$为定义在G上的函数系。

（i）若$\{\varphi_j(x)\}_1^n$在L_M^*中线性无关，$f(x)\in L_M^*$，则当多项式

本文1987年1月3日收到。

$$P^*(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^*\varphi_j(x)$$

使

$$\|f(x)-P^*(x)\|_M=\inf_{(a_j)}\|f(x)-\sum_{j=1}^{n}a_j\varphi_j(x)\|_M=E_n(f)$$

成立，则称$P^*(x)$为$f(x)$在L_M^*中关于函数系$\{\varphi_j(x)\}_1^n$的最佳逼近多项式.

（ii）若$\{\varphi_j(x)\}_1^n$在$L_{(M)}^*$中线性无关，$f(x)\in L_{(M)}^*$，则当多项式

$$P^*(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^*\varphi_j(x)$$

使

$$\|f(x)-P^*(x)\|_{(M)}=\inf_{(a_j)}\|f(x)-\sum_{j=1}^{n}a_j\varphi_j(x)\|_{(M)}=E_n(f)$$

成立，则称$P^*(x)$为$f(x)$在$L_{(M)}^*$中关于函数系$\{\varphi_j(x)\}_1^n$的最佳逼近多项式.

定义 4 设$\{\varphi_j(x)\}_1^n$为定义在G上的函数系，若$\{\varphi_j(x)\}_1^n$在L_M^*(或$L_{(M)}^*$)中线性无关，则称集合

$$\Phi=\{P(x)\,|\,P(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j\varphi_j(x),a_j\in R',\qquad j=1,2,\cdots,n\}$$

为L_M^*(或$L_{(M)}^*$)中由$\{\varphi_j(x)\}_1^n$生成的线性流形.

定义 5 L_M^*(或$L_{(M)}^*$)中子集A称为是列紧的是指A中任一无穷序列均具有收敛的子序列.

二、存在定理

引理 1 设Φ为定义4中定义之集合，则Φ为L_M^*(或$L_{(M)}^*$)中n维线性闭子空间.

证明 Φ为L_M^*(或$L_{(M)}^*$)之线性子空间，显然，故只需证Φ是n维的和闭的.

由$\Phi=S_{Pan}\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$及$\{\varphi_j(x)\}_1^n$按定义1线性无关，以及范数$\|\cdot\|_M$（或$\|\cdot\|_{(M)}$）之性质

$$\|u\|_M=0\Leftarrow\Rightarrow u(x)=0,\qquad P\cdot P于G,$$

知Φ是n维的. 下面证明Φ是闭的.

设$P^*(x)\in\Phi'$，则存在$P_k(x)\in\Phi(k=1,2,\cdots)$使$\|P_k(x)-P^*(x)\|_M\to 0(k\to+\infty)$. 令

$$P_k(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^k\varphi_j(x)\qquad(k=1,2,\cdots),$$

则由$\|P_k(x)\|_M\leqslant\|P_k(x)-P^*(x)\|_M+\|P^*(x)\|_M$，知存在常数$M$使$\|P_k(x)\|_M\leqslant M(k=1,2,\cdots)$.

下面证明存在正常数N使得

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j^K|\leqslant N\qquad(k=1,2,\cdots).\tag{1}$$

若不然，定可选出$K_m(m=1,2,\cdots)$使$k_1<k_2<\cdots<k_m<\cdots$，$\lim\limits_{m\to\infty}k_m=+\infty$，且

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j^{K_m}|=\lambda_m\geqslant m \qquad (m=1,2,\cdots).$$

作函数

$$Q_{K_m}(x)=\frac{P_{K_m}(x)}{\lambda_m}$$

则当 $m\to+\infty$时，

$$\|Q_{K_m}(x)\|_M=\frac{1}{\lambda_m}\|P_{K_m}(x)\|_M\leqslant\frac{M}{\lambda_m}\leqslant\frac{M}{m}\to 0. \tag{2}$$

另一方面，由

$$Q_{K_m}(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^{K_m}}{\lambda_m}\varphi_j(x)$$

知

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{a_j^{K_m}}{\lambda_m}\right|=\frac{1}{\lambda_m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_j^{K_m}\right|=1 \qquad (m=1,2\cdots). \tag{3}$$

这说明对任一 $j(1\leqslant j\leqslant n)$，$\{a_j^{K_m}/\lambda_m\}(m=1,2,\cdots)$为有界序列，于是根据 Bolzano-Weierstrass 引理，对每一个 $j(1\leqslant j\leqslant n)$，$\{a_j^{K_m}/\lambda_m\}(m=1,2,\cdots)$ 存在一收敛的子序列收敛到 d_j^*，又因为 $j=1,2,\cdots,n$ 只取有限个数，故可设收敛子序列的足标相同，但为了书写方便，认为这子序列的足标是$\{k_m\}$，于是就有

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{a_j^{K_m}}{\lambda_m}=d_j^* \qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

在式(3)中对 $m\to+\infty$ 取极限，得

$$\sum_{j=1}^{n}|d_j^*|=1. \tag{4}$$

设

$$Q^*(x)=\sum_{j=1}^{n}d_j^*\varphi_j(x),$$

$$\|Q_{K_m}(x)-Q^*(x)\|_M\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{a_j^{K_m}}{\lambda_m}-d_j^*\right|\|\varphi_j(x)\|_M$$

$$\leqslant\max_{(i)}\|\varphi_j(x)\|_M\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{a_j^{K_m}}{\lambda_m}-d_j^*\right|\to 0 \qquad (m\to+\infty), \tag{5}$$

于是由

$$\|Q^*(x)\|_M\leqslant\|Q^*(x)-Q_{K_m}(x)\|_M+\|Q_{K_m}(x)\|_M$$

及式(2)、(5)知 $\|Q^*(x)\|_M=0$，即

$$\|d_1^*\varphi_1(x)+d_2^*\varphi_2(x)+\cdots+d_n^*\varphi_n(x)\|_M=0.$$

又由式(4)知 d_j^* 不全为零，但这与 $\{\varphi_j(x)\}_1^n$ 在 L_M^* 中线性无关相矛盾，故式(1)中之 N 存在无疑．由

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j^K|\leqslant N \qquad (k=1,2,\cdots)$$

可推出，对每一个 j，数列 $\{a_j^K\}(k=1,2,\cdots)$有界。根据 Bolzano-Weierstrass 引理存在收敛子序列收敛到一个数，又因 $j=1,2,\cdots,n$，只取有限个数，故不妨设对所有的 $j=1,2,\cdots,n$，

$\{a_j^K\}(k=1,2,\cdots)$之收敛子序列的足标均为$\{k_v\}$，使

$$\lim_{v\to\infty} a_j^{K_v}=a_j^* \qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

于是由

$$\|P^*(x)-\sum_{j=1}^{n}a_j^*\varphi_j(x)\|_M\leqslant\|P^*(x)-P_{K_v}(x)\|_M+\|P_{K_v}(x)-\sum_{j=1}^{n}a_j^*\varphi_j(x)\|_M$$

及

$$\|P^*(x)-P_{K_v}(x)\|_M\to 0 \qquad (k_v\to+\infty)$$

与

$$\|P_{K_v}(x)-\sum_{j=1}^{n}a_j^*\varphi_j(x)\|_M\leqslant\|\sum_{j=1}^{n}a_j^{K_v}\varphi_j(x)-\sum_{j=1}^{n}a_j^*\varphi_j(x)\|_M$$

$$\leqslant\max_{(i)}\|\varphi_j(x)\|_K\sum_{j=1}^{n}|a_j^{K_v}-a_j^*|\to 0 \quad (v\to+\infty),$$

知

$$\|P^*(x)-\sum_{j=1}^{n}a_j^*\varphi_j(x)\|_M=0,$$

即

$$P^*(x)-\sum_{j=1}^{n}a_j^*\varphi_j(x)=0, \qquad P\cdot P \text{ 于 } G,$$

故

$$P^*(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^*\varphi_j(x), \qquad P\cdot P \text{ 于 } G.$$

这说明$P^*(x)\in\Phi$，故Φ为闭集。

引理 2 设Φ为定义 4 中之集合，则Φ中任一有界集必为L_M中之列紧集。

证明 由引理 1 知Φ为L_M^*之n维线性闭子空间，故其中任一有界集必为列紧集。

引理 3 $\{\varphi_j(x)\}_1^n$在L_M^*中线性无关，当且仅当$\{\varphi_j(x)\}_1^n$在$L_{(M)}^*$中线性无关。

证明 若$\{\varphi_j(x)\}_1^n$在L_M^*中线性无关要证$\{\varphi_j(x)\}_1^n$在$L_{(M)}^*$中也线性无关。用反证法，如果$\{\varphi_j(x)\}_1^n$在$L_{(M)}^*$中线性相关，则存在不全为零的常数$C_j(j=1,2,\cdots,n)$使

$$\|C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x)\|_{(M)}=0.$$

但由

$$\|u\|_{(M)}\leqslant\|u\|_M\leqslant 2\|u\|_{(M)}$$ [2]

知

$$\|C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x)\|_M=0,$$

此与$\{\varphi_j(x)\}_1^n$在L_M^*中线性无关相矛盾，故$\{\varphi_j(x)\}_1^n$不能不在$L_{(M)}^*$中线性无关。同理可证若$\{\varphi_j(x)\}_1^n$在$L_{(M)}^*$中线性无关，则$\{\varphi_j(x)\}_1^n$也必在L_M^*中线性无关。

定理 1 设函数系$\{\varphi_j(x)\}_1^n$在L_M^*中线性无关，则对任一$f(x)\in L_M^*$必存在定义 3(i) 意义下的最佳逼近多项式。

证明 设

$$E_n(f)=\inf_{(a_j)}\|f(x)-\sum_{j=1}^{n}a_j\varphi_j(x)\|_M,$$

由下确界定义知存在一组数列 $\{a_j^K\}(k=1,2,\cdots)$ 使

$$\lim_{K\to+\infty}\left\|f(x)-\sum_{j=1}^{n}a_j^K\varphi_j(x)\right\|_M=E_n(f). \tag{6}$$

设

$$P_K(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^K\varphi_j(x)\quad(k=1,2,\cdots),$$

则

$$P_K(x)\in\Phi\qquad(k=1,2,\cdots),$$

且由

$$\|P_K(x)\|_M\leqslant\|P_K(x)-f(x)\|_M+\|f(x)\|_M$$

知 $\{P_K(x)\}$ $(k=1,2,\cdots)$ 为 Φ 中之有界集。于是由引理 2 知其为列紧集，因此存在收敛子序列

$$P_{K_m}(x)\to P^*(x)\qquad(m\to+\infty). \tag{7}$$

再由 $P_{K_m}(x)\in\Phi$ $(m=1,2,\cdots)$ 以及 Φ 的闭性便知 $P^*(x)\in\Phi$，对此 $P^*(x)$，由

$$\|f(x)-P^*(x)\|_M\leqslant\left\|f(x)-\sum_{j=1}^{n}a_j^{K_m}\varphi_j(x)\right\|_M+\left\|\sum_{j=1}^{n}a_j^{K_m}\varphi_j(x)-P^*(x)\right\|_M$$

以及式(6)、(7)知

$$\|f(x)-P^*(x)\|_M\leqslant E_n(f).$$

另一方面由下确界的定义知

$$\|f(x)-P^*(x)\|_M\geqslant E_n(f),$$

故

$$\|f(x)-P^*(x)\|_M=E_n(f).$$

这说明 $P^*(x)$ 确为 $f(x)$ 在 L_M^* 中关于 $\{\varphi_j(x)\}_1^n$ 的最佳逼近多项式。

定理 2　设函数系 $\{\varphi_j(x)\}_1^n$ 在 $L_{(M)}^*$ 中线性无关，则对任一 $f(x)\in L_{(M)}^*$ 必存在定义3(ii)意义下的最佳逼近多项式。

证明　$L_{(M)}^*$ 与 L_M^* 作为函数类相同，线性运算相同，由引理 4 知函数系线性无关性也相同，于是引理 1、引理 2、引理 3 对 $L_{(M)}^*$ 同样适用，因此采用与定理 3 完全相同的方法便能证明本定理成立。

推论 1　设 $\{\varphi_j(x)\}_1^n$ 定义在 G 上，若 $\{\varphi_j(x)\}_1^n$ 在 $L_G^P(1<P<+\infty)$ 中线性无关，则对任一 $f(x)\in L_G^P$ 存在定义 3 (i)意义下的最佳逼近多项式。

证明　设 $M(u)=|u|^P/P$，则作为函数类 $L_M^*=L_G^P$，作为范数有 $\|u\|_M=C\|u\|_P$，C为常数因子[1]，故 $\{\varphi_j(x)\}_1^n$ 在 L_G^P 中线性无关也必在在 L_M^* 中线性无关，由定理 2 知存在 $P^*(x)\in\Phi$ 使

$$\|f(x)-P^*(x)\|_M=\inf_{(a_j)}\left\|f(x)-\sum_{j=1}^{n}a_j\varphi_j(x)\right\|_M,$$

于是

$$\begin{aligned}\|f(x)-P^*(x)\|_P&=\frac{1}{C}\|f(x)-P^*(x)\|_M=\frac{1}{C}\inf_{(a_j)}\left\|f(x)-\sum_{j=1}^{n}a_j\varphi_j(x)\right\|_M\\&=\inf_{(a_j)}\left\{\frac{1}{C}\left\|f(x)-\sum_{j=1}^{n}a_j\varphi_j(x)\right\|_M\right\}=\inf_{(a_j)}\left\|f(x)-\sum_{j=1}^{n}a_j\varphi_j(x)\right\|_P.\end{aligned}$$

这说明 $P^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 L_G^P 中关于 $\{\varphi_j(x)\}_1^n$ 的最佳逼近多项式。

三、例 子

例 1 设函数系为$\{1,x,x^2,\cdots,x^i,\cdots,x^n\}$，因$n$次方程$a_0+a_1x+\cdots+a_jx^i+\cdots+a_nx^n=0$不可能有多于$n$个根。由

$$a_0+a_1x+\cdots+a_jx^i+\cdots+a_nx^n=0 \qquad (P\cdot P\text{于}G),$$

可推出$a_0=a_1=\cdots=a_j=\cdots=a_n=0$，所以$\{x^i\}_0^n$在$L_M^*$中与$L_{(M)}^*$中线性无关。由此得下面定理。

定理 3 在L_M^*中或$L_{(M)}^*$中对任一$f(x)$存在着n次多项式的最佳逼近。

例 2 设函数系为$\{1,\cos(k\pi/l)x, \sin(k\pi/l)x, k=1,2,\cdots,n\}$ $l=(b-a)/2$，这函数系中任两个相乘在$[a,b]$上的积分为零，自身的平方在$[a,b]$上的积分为l。故若

$$a_0+\sum_{j=1}^{n}\left[a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right]=0 \ (P\cdot P\text{于}G),$$

两边同乘$\cos(m\pi/l)x(m=1,2,\cdots n)$，然后在$[a,b]$上积分，则有

$$a_m\int_a^b\left[\cos\frac{m\pi}{l}x\right]^2dx=0 \qquad (m=1,2,\cdots,n),$$

即$a_m=0(m=1,2,\cdots,n)$。同理可知$b_m=0(m=1,2,\cdots,n)$，$a_0=0$。这说明此函数系在L_M^*中与$L_{(M)}^*$中线性无关，由此得下面定理。

定理 4 在L_M^*或$L_{(M)}^*$中对任一$f(x)$存在着n次三角多项式的最佳逼近。

例 3 设函数系为$\{l_i(x)\}_0^{n+1}$，其中$l_j(x)$定义如下：对$[a,b]$作任一分划，$a=x_0<x_1<\cdots<x_j<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$，又定义

$$l_0(x)=\begin{cases}(x_1-x)(x_1-a)^{-1}, & 0\leqslant x\leqslant x_1,\\ 0, & x_1\leqslant x\leqslant b,\end{cases}$$

$$l_j(x)=\begin{cases}(x-x_{j-1})(x_j-x_{j-1})^{-1}, & x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j,\\ (x_{j+1}-x)(x_{j+1}-x_j)^{-1}, & x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1},\\ 0, & a\leqslant x\leqslant x_{j-1}\text{ 或 }x_{j+1}\leqslant x\leqslant b,\end{cases}$$

$$l_{n+1}(x)=\begin{cases}(x-x_n)(\mathrm{b}-x_n)^{-1}, & x_n\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant x_n.\end{cases}$$

多项式$f(x)=\sum_{j=0}^{n+1}a_jl_j(x)$为$[a,b]$上连续函数，而且$f(x_j)=a_j(j=0,1,\cdots,n+1)$。故若$f(x)=\sum_{j=0}^{n+1}a_jl_j(x)=0(P\cdot P\text{于}G)$，则必有$a_j=f(x_j)=0(j=0,1,\cdots,n+1)$。事实上若有$j_0$使$a_{j_0}=f(x_{j_0})>0$(或$<0$)，则由$f(x)$在$x_{j_0}$连续知存在$x_{j_0}$的某一邻域$(x'x'')$，使$f(x)>0$，$x\in(x',x'')$。此与$f(x)=\sum_{j=0}^{n+1}a_jl_j(x)=0 \quad (P\cdot P\text{于}G)$相矛盾。

因为由$l_j(x)(j=0,1,2,\cdots,n)$生成的多项式函数是分段线性而连续的函数，它们由有限

个数 $a_j(j=0,1,\cdots,n+1)$ 完全确定，因此称这种函数为线性有限元函数，于是得下面定理。

定理 5　在 L_M^* 或 $L_{(M)}^*$ 中对任一 $f(x)$ 存在着线性有限元函数的最佳逼近。

例 4　设 $\{h_j(x),\ h_j^0(x)\}_0^{n+1}$ 为函数系，其中函数定义如下：对 $[a,b]$ 作任一分划，$a=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$。设

$$h_0(x)=\begin{cases}2(x_1-a)^{-3}(x-a)^3-3(x_1-a)^{-2}(x-a)^2+1, & 0\leqslant x\leqslant x_1,\\ 0, & x_1\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

$$h_j(x)=\begin{cases}-2(x_j-x_{j-1})^{-3}(x-x_{j-1})^3+3(x_j-x_{j-1})^{-2}(x-x_{j-1})^2, & x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j,\\ 2(x_{j+1}-x_j)^{-3}(x-x_j)^3-3(x_{j+1}-x_j)^{-3}(x-x_j)^2+1, & x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1},\\ 0, & x\in[a,b]-[x_{j-1},x_{j+1}],\end{cases}$$

$$h_{n+1}(x)=\begin{cases}-2(b-x_n)^{-3}(x-x_n)^3+3(b-x_n)^{-2}(x-x_n)^2, & x_n\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & a\leqslant x\leqslant x_n,\end{cases}$$

$$h_0^0(x)=\begin{cases}(x_1-a)^{-2}(x-a)(x_1-x)^2, & a\leqslant x\leqslant x_1,\\ 0, & x_1\leqslant x\leqslant b,\end{cases}$$

$$h_j^0(x)=\begin{cases}(x_j-x_{j-1})^{-2}(x-x_{j-1})^2(x-x_j), & x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j,\\ (x_{j+1}-x_j)^{-2}(x-x_j)(x_{j+1}-x)^2, & x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1},\\ 0, & x\in[a,b]-[x_{j-1},x_{j+1}]\end{cases}$$

$$h_{n+1}^0(x)=\begin{cases}(b-x_n)^{-2}(x-x_n)^2(x-b), & x_n\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant x_n.\end{cases}$$

由 $h_j(x)$ 与 $h_j^0(x)$ 生成的多项式 $f(x)=\sum\limits_{j=1}^{n+1}[a_jh_j(x)+b_jh_j^0(x)]$，为 $[a,b]$ 上分段三次多项式且具有一阶连续的导函数，还有下面性质：$f(x_j)=a_j$，$f'(x_j)=b_j(j=0,1,\cdots,n+1)$。故若

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n+1}[a_jh_j(x)+b_jh_j^0(x)]=0,\qquad (P\cdot P 于 G),$$

由连续性知

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n+1}[a_jh_j(x)+b_jh_j^0(x)]\equiv 0,\qquad x\in G,$$

由 $a_j=f(_j)=0(j=0,1,\cdots,n+1)$ 而知 $a_j=0(j=0,1,2,\cdots,n+1)$。由 $b_j=f'(x_j)=0(j=0,1,\cdots,n+1)$ 而知 $b_j=0(j=0,1,\cdots,n+1)$，于是 $\{h_j(x),h_j^0(x)\}_0^{n+1}$ 在 L_M^* 或 $L_{(M)}^*$ 中线性无关。

定理 6　在 L_M^* 或 $L_{(M)}^*$ 中对任一 $f(x)$ 存在着连续可微的分段三次 Hermite 多项式的最佳逼近。

参 考 文 献

〔1〕M.A.克拉斯诺西尔斯基、Я.Б.鲁季茨基著，吴从炘译，凸函数和奥尔里奇空间，科学出版社，(1962)，69.
〔2〕吴从炘、王廷辅，奥尔里奇空间及其应用，黑龙江科学技术出版社，(1983)，18.
〔3〕吴从炘、王廷辅、陈述涛、王玉文、Orlicz空间几何理论，哈尔滨工业大学出版社，(1986).
〔4〕沈燮昌，多项式最佳逼近的实现，上海科学技术出版社，(1984).
〔5〕M.H.胥尔兹著，赵根榕译，样条分析，上海科学技术出版社，(1979).

Existence Theorem With Respect to Optimal Approximation of Polynomial in Orlicz Space

Shi Chuan

Abstract

This paper brings in the concept of optimal approximation of polynomial in Orlicz space.

It studies existence theorem on optimal approximation of polynomial in Orlicz space, and it proposes several examples.