

色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的两个半显式 绝对稳定差分格式

苏 远 生

(应用数学系)

摘 要

本文对色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 构造了两个半显式的、绝对稳定的差分格式。其截断误差阶为 $O(\tau h + \tau h + h^4)$ 。数值例子证实这两个差分格式是很有效的。

一、引 言

对色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的差分格式, 在文[1]—[5]讨论过。文[2]构造了两个三层显式差分格式, 其截断误差阶为 $O(\tau h + h^2)$, 稳定条件为 $|r| \leq 0.7016$, $r = a\tau/h^3$ 。文[3]构造了两个显式格式 H_3 , 稳定条件为 $|r| \leq 1.1851$, 截断误差阶同文[2]。显然, 稳定条件对 $|r|$ 值的限制, 将限制时间步长 τ 的选取, 从而增加计算量。文[4]、[5]构造了三层、五对角线型、绝对稳定的隐式差分格式。

本文对色散方程构造了两个三层的、二对角线型的、半显式绝对稳定差分格式, 它可以显式地进行计算, 由于稳定性对 $|r|$ 值没有限制, τ 值可选取大些, 计算量可大为减少。其截断误差阶为 $O(\tau\tau h + \tau h + h^4)$, 比文[2]、[3]高 $O(h^2)$ 。中间层只用4个节点的 u 值, 比文[3]少用二个点, 比文[4]、[5]少用一个点。通过数值例子进行差分格式与文[2]、[3]的比较, 数值结果表明本文的差分格式的精度和稳定性都比文[2]、[3]好。

二、格式的构造

考察色散方程 $u_t = au_{xxx}$, 其中 a 为常数, a 可正可负。设时间步长为 τ , 空间步长为 h , 网域由求解区域上的点集 (x_m, t_n) 构成, 这里 $x_m = x_0 + mh$, $t_n = t_0 + n\tau$, m, n 为整数。在节点 (x_m, t_n) 处, 用 $[u]_n$ 表示微分方程的解, 用 u_n 表示差分方程的解。根据 Taylor 展开, 有

本文1987年12月29日收到。

$$[u_t]_{m+1/2}^n = \frac{1}{2} ([u_t]_{m+1}^n + [u_t]_m^n) - \frac{h^2}{8} [u_{txx}]_{m+1/2}^n + O(h^4) \quad (1)$$

$$[u_t]_{m+1}^n = -\frac{1}{\tau} ([u]_{m+1}^{n+1} - [u]_{m+1}^n) - \frac{\tau}{2} [u_{tt}]_{m+1}^n + O(\tau^2) \quad (2)$$

$$[u_t]_m^n = -\frac{1}{\tau} ([u]_m^n - [u]_m^{n-1}) + \frac{\tau}{2} [u_{tt}]_m^n + O(\tau^2) \quad (3)$$

$$[u_{xxx}]_{m+1/2}^n = \frac{1}{h^3} ([u]_{m+2}^n - 3[u]_{m+1}^n + 3[u]_m^n - [u]_{m-1}^n) - \frac{h^2}{8} [u_{x5}]_{m+1/2}^n + O(h^4) \quad (4)$$

$$-2[u]_{m+1}^n + 2[u]_m^n = -[u]_{m+1}^{n+1} - [u]_{m+1}^{n-1} + [u]_m^{n+1} + [u]_m^{n-1} + O(\tau^2 h) \quad (5)$$

将式(2)、(3)代入式(1),得

$$[u_t]_{m+1/2}^n = \frac{1}{2\tau} ([u]_{m+1}^{n+1} - [u]_{m+1}^n + [u]_m^n - [u]_m^{n-1}) - \frac{h^2}{8} [u_{txx}]_{m+1/2}^n + O(\tau h + h^4) \quad (6)$$

根据式(5),可将式(4)写成

$$[u_{xxx}]_{m+1/2}^n = -\frac{1}{h^3} ([u]_{m+2}^n - [u]_{m+1}^n + [u]_m^n - [u]_{m-1}^n - [u]_{m+1}^{n+1} - [u]_{m+1}^{n-1} + [u]_m^{n+1} + [u]_m^{n-1}) - \frac{h^2}{8} [u_{x5}]_{m+1/2}^n + O(\frac{\tau^2}{h^2} + h^4) \quad (7)$$

将式(6)与式(7)代入方程 $[u_t]_{m+1/2}^n = a[u_{xxx}]_{m+1/2}^n$ 中,由于 $-\frac{h^2}{8} [u_{txx}]_{m+1/2}^n$

$= -a\frac{h^2}{8} [u_{x5}]_{m+1/2}^n$, 则得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\tau} ([u]_{m+1}^{n+1} - [u]_{m+1}^n + [u]_m^n - [u]_m^{n-1}) \\ &= \frac{a}{h^3} ([u]_{m+2}^n - [u]_{m+1}^n + [u]_m^n - [u]_{m-1}^n - [u]_{m+1}^{n+1} - [u]_{m+1}^{n-1} \\ &+ [u]_m^{n+1} + [u]_m^{n-1}) + O(a\frac{\tau^2}{h^2} + \tau h + h^4) \end{aligned}$$

令 $r = a\tau/h^3$, 于上式中舍去 $O(a\frac{\tau^2}{h^2} + \tau h + h^4)$ 的项, 即得本文构造的第一个格式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n + u_m^n - u_m^{n-1}) \\ &= r(u_{m+2}^n - u_{m+1}^n + u_m^n - u_{m-1}^n - u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^{n-1} + u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) \end{aligned} \quad (8)$$

即

$$\begin{aligned} & (\frac{1}{2} + r) u_{m+1}^{n+1} - r u_m^{n+1} \\ &= r u_{m+2}^n + (\frac{1}{2} - r) u_{m+1}^n - (\frac{1}{2} - r) u_m^n - r u_{m-1}^n \\ & \quad - r u_{m+1}^{n-1} + (\frac{1}{2} + r) u_m^{n-1} \end{aligned} \quad (9)$$

其截断误差阶为 $O(r\tau h + \tau h + h^4)$, 这里 $r\tau h = a\tau^2/h^2$.

如果在导出差分格式 (8) 的过程中, 将式 (2) 与式 (3) 换成

$$\begin{aligned} [u_t]_{m+1}^n &= \frac{1}{\tau}([u]_{m+1}^n - [u]_{m+1}^{n-1}) + \frac{\tau}{2}[u_{tt}]_{m+1}^n + O(\tau^2) \\ [u_t]_m^n &= \frac{1}{\tau}([u]_m^{n+1} - [u]_m^n) - \frac{\tau}{2}[u_{tt}]_m^n + O(\tau^2) \end{aligned}$$

则可得本文的第二个差分格式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(u_{m+1}^n - u_{m+1}^{n-1} + u_m^{n+1} - u_m^n) \\ &= r(u_{m+2}^n - u_{m+1}^n + u_m^n - u_{m-1}^n - u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^{n-1} + u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) \end{aligned} \quad (10)$$

即

$$\begin{aligned} & r u_{m+1}^{n+1} + (\frac{1}{2} - r) u_m^{n+1} \\ &= r u_{m+2}^n - (\frac{1}{2} + r) u_{m+1}^n + (\frac{1}{2} + r) u_m^n - r u_{m-1}^n \\ & \quad + (\frac{1}{2} - r) u_{m+1}^{n-1} + r u_m^{n-1} \end{aligned} \quad (11)$$

其截断误差阶也是 $O(r\tau h + \tau h + h^4)$.

三、稳定性分析

为分析差分格式的稳定性, 先叙述 Miller 准则^[6]. 设 $f(\lambda)$ 是复平面上的 n 次多项式, $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$, $a_0 a_n \neq 0$. 定义多项式 $f^*(\lambda) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}\lambda + \cdots + \bar{a}_0\lambda^n$, 这里 \bar{a}_i 为 a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) 的共轭复数, 则多项式 $f(\lambda)$ 所有根相异且其模等于 1 的充要条件是 $f^*(0)f(\lambda) \equiv f(0)f^*(\lambda)$, 且 $f(\lambda)$ 只有按模小于 1 的根.

用分离变量法分析差分格式的稳定性^[7].

令

$$u_m^n = \lambda^n e^{im\theta}, \quad i^2 = -1 \quad (12)$$

将其代入式(9), 化简后得到

$$a\lambda^2 - ib\lambda + c = 0$$

式中, $a = (1/2)e^{i\theta/2} + i2r\sin(\theta/2)$, $b = \sin(\theta/2) + 4r\cos\theta \cdot \sin(\theta/2)$, $c = -(1/2)e^{-i\theta/2} + i2r\sin(\theta/2)$. 记

$$f(\lambda) = a\lambda^2 - ib\lambda + c \quad (13)$$

差分格式(9)稳定的充要条件是它的特征方程 $f(\lambda) = 0$ 的全部根按模小于等于 1, 且模为 1 的根是单根. 与式(13)对应, 有

$$f^*(\lambda) = \bar{c}\lambda^2 + ib\lambda + \bar{a} \quad (14)$$

由式(13)、(14), 容易验证 $f^*(\lambda)f(\lambda) \equiv f(0)f^*(\lambda)$. 而 $f'(\lambda) = 2a\lambda - ib$ 的根为

$$\lambda = \frac{ib}{2a} = \frac{i \sin \frac{\theta}{2} (1 + 4r \cos \theta)}{\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} (1 + 4r)}$$

它的模

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{\sin^2(\theta/2)(1+4r\cos\theta)^2}{\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)(1+4r)^2}}$$

当 $a > 0$ 时, 则 $r = a\tau/h^3 > 0$, 易证此时 $|\lambda| < 1$, 根据 Miller 准则, $f(\lambda) = 0$ 的根相异且其模等于 1. 因此, 当 $a > 0$ 时, 差分格式(9)绝对稳定.

将式(12)代入差分格式(11), 可得特征方程

$$f_1(\lambda) = a_1\lambda^2 + ib_1\lambda + c_1 = 0 \quad (15)$$

式中, $a_1 = (1/2)e^{-i\theta/2} + i2r\sin(\theta/2)$, $b_1 = \sin(\theta/2) - 4r\cos\theta \cdot \sin(\theta/2)$, $c_1 = -(1/2)e^{i\theta/2} + i2r\sin(\theta/2)$. 与式(15)对应, 有

$$f_1^*(\lambda) = \bar{c}_1\lambda^2 - ib_1\lambda + \bar{a}_1 \quad (16)$$

容易验证 $f_1^*(\lambda)f_1(\lambda) \equiv f_1(0)f_1^*(\lambda)$. 而 $f_1'(\lambda) = 2a_1\lambda + ib_1$ 的根为

$$\lambda = -\frac{ib_1}{2a_1} = -\frac{i \sin(\theta/2)(1-4r\cos\theta)}{\cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2)(1-4r)}$$

它的模

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{\sin^2(\theta/2)(1-4r\cos\theta)^2}{\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)(1-4r)^2}}$$

当 $a < 0$ 时, 则 $r = a\tau/h^3 < 0$, 易证此时 $|\lambda| < 1$, 根据 Miller 准则, $f_1(\lambda) = 0$ 的根相异且其模等于 1. 因此, 当 $a < 0$ 时, 差分格式(11)绝对稳定.

四、数值例子

考虑定解问题: $u_t = u_{xxx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$; $u(x, 0) = e^x$, $0 \leq x \leq 1$; $u(0, t) = e^t$, $u(1, t) = e^{t+1}$, $t > 0$. 它的精确解为 $u(x, t) = e^{x+t}$.

取 $h = 0.1$, 用式(9)及文[2]、[3]的格式计算. 定义误差 $E_m = [u]_m - u_m^*$, 今将 $x = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ (即 $m = 4, 5, 6, 7$) 处的 E_m 数值列表 1—5 比较于后. 表中符号 $aE \pm b = a * 10^{\pm b}$.

表 1 r 为0.7时用式(9)和文〔2〕格式的计算表

m	n				
	143	286	429	572	715
用式(9)格式计算结果					
4	$1.28E-6$	$1.46E-6$	$1.79E-6$	$1.89E-6$	$1.70E-6$
5	$1.84E-6$	$1.96E-6$	$2.13E-6$	$2.64E-6$	$2.52E-6$
6	$2.27E-6$	$2.50E-6$	$2.72E-6$	$3.47E-6$	$4.51E-6$
7	$2.43E-6$	$2.76E-6$	$3.13E-6$	$3.25E-6$	$4.06E-6$
用文〔2〕格式计算结果					
4	$3.36E-5$	$3.71E-5$	$4.10E-5$	$4.53E-5$	$5.01E-5$
5	$5.96E-5$	$6.59E-5$	$7.28E-5$	$8.05E-5$	$8.90E-5$
6	$7.03E-5$	$7.80E-5$	$8.61E-5$	$9.52E-5$	$1.05E-4$
7	$8.51E-5$	$9.39E-5$	$1.04E-4$	$1.15E-4$	$1.27E-4$

表 2 r 为0.8时用式(9)和文〔2〕格式的计算表

m	n				
	125	250	375	500	625
用式(9)格式计算结果					
4	$1.60E-6$	$1.64E-6$	$1.30E-6$	$3.40E-7$	$1.78E-6$
5	$2.35E-6$	$2.62E-6$	$2.79E-6$	$1.64E-6$	$-6.25E-6$
6	$2.87E-6$	$3.32E-6$	$4.00E-6$	$4.26E-6$	$-2.20E-6$
7	$3.03E-6$	$3.24E-6$	$3.38E-6$	$4.15E-6$	$1.90E-5$
用文〔2〕格式计算结果					
4	$-4.29E+12$	$3.99E+32$	溢 出 停 机		
5	$-1.17E+13$	$-5.54E+32$			
6	$2.40E+13$	$3.14E+32$			
7	$-1.57E+13$	$4.22E+32$			

表 3 r 为1时用式(9)和文〔3〕格式的计算表

m	n				
	100	200	300	400	500
用式(9)格式计算结果					
4	$2.44E-6$	$2.75E-6$	$3.76E-6$	$8.56E-6$	$2.55E-5$
5	$3.46E-6$	$3.54E-6$	$3.15E-6$	$3.69E-6$	$1.34E-5$
6	$4.34E-6$	$4.79E-6$	$4.57E-6$	$2.47E-6$	$4.91E-7$
7	$4.73E-6$	$5.65E-6$	$4.95E-6$	$7.48E-6$	$6.17E-6$
用文〔3〕格式计算结果					
4	$-2.79E-5$	$-1.48E-5$	$-2.91E-5$	$-4.80E-4$	$-2.58E-3$
5	$-3.57E-5$	$-5.16E-5$	$-5.48E-5$	$2.43E-4$	$1.67E-3$
6	$-6.64E-5$	$-4.73E-5$	$-3.37E-5$	$-4.30E-4$	$-2.65E-3$
7	$-4.94E-5$	$-6.86E-5$	$-1.42E-5$	$5.21E-4$	$1.96E-3$

表 4 r 为1.5时用式(9)和文〔3〕格式的计算表

m	n				
	67	134	201	268	355
用式(9)格式计算结果					
4	$4.46E-6$	$4.31E-6$	$2.33E-5$	$4.05E-6$	$-4.16E-4$
5	$7.24E-6$	$6.86E-6$	$1.03E-5$	$2.82E-5$	$-6.37E-5$
6	$9.22E-6$	$8.58E-6$	$3.15E-6$	$6.62E-5$	$8.54E-5$
7	$9.18E-6$	$8.15E-6$	$2.87E-5$	$3.76E-5$	$-4.65E-4$
用文〔3〕格式计算结果					
4	$-3.19E+7$	$-6.02E+20$	$-1.03E+34$	溢 出 停 机	
5	$-2.96E+7$	$-8.11E+20$	$-2.08E+34$		
6	$4.35E+7$	$8.43E+20$	$1.51E+34$		
7	$1.25E+7$	$4.62E+20$	$1.41E+34$		

表 5 r 为5时用式(9)格式的计算表

m	n				
	20	40	60	80	100
4	$7.57E-5$	$6.43E-5$	$1.21E-4$	$1.80E-5$	$2.29E-5$
5	$8.56E-5$	$9.75E-5$	$1.04E-4$	$1.90E-4$	$-2.16E-4$
6	$8.86E-5$	$1.09E-4$	$1.56E-4$	$2.39E-6$	$5.78E-4$
7	$8.41E-5$	$1.01E-4$	$2.10E-4$	$-1.44E-4$	$9.31E-4$

当表 1 取 $r=0.7$ 时, 用本文的差分格式 (9) 计算, 误差 E_n 为 10^{-6} , 但用文 [3] 的格式计算, 误差 E_n 是 10^{-5} , 这说明式 (9) 的格式比文 [2] 的格式的精度高. 当表 3 取 $r=1$ 时用式 (9) 的格式计算, 误差 E_n 为 10^{-6} , 而用文 [3] 格式计算, 误差 E_n 是 10^{-5} — 10^{-3} , 这说明本文的格式比文 [3] 的格式的精度高. 当表 2 取 $r=0.8$ 时, 用文 [2] 的格式计算, 误差 E_n 在 $n=125$ 时已达 10^{13} , 而用式 (9) 的格式计算, 误差 E_n 只有 10^{-6} . 当表 4 取 $r=1.5$ 时, 用文 [3] 的格式计算, 在 $n=134$ 时误差 E_n 已达 10^{20} , 而用式 (9) 的格式计算, 误差 E_n 只有 10^{-6} — 10^{-5} . 表 5 给出 $r=5$ 时, 用式 (9) 的格式计算结果, 这时误差 E_n 也只有 10^{-5} — 10^{-4} .

这个数值例子进一步证实了本文所构造的差分格式的精度和稳定性都比文 [2]、[3] 好.

参 考 文 献

- [1] 秦孟兆, 色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的差分格式, 计算数学, 1 (1984), 1—13.
- [2] 黎益、李北杰, 关于色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的两个显式差分格式, 计算数学, 3 (1986), 275—280.
- [3] 郭华谟, 一类具有高稳定性的三层显式格式 H_3 , 计算数学, 3 (1986), 329—331.
- [4] 黎益、李北杰, 逼近色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的高精度差分格式, 四川大学学报, 4 (1985), 12—21.
- [5] 曾文平, 解色散方程 $u_t = ua_{xxx}$ 的一族绝对稳定的高精度差分格式, 计算数学, 4 (1987), 403—410.
- [6] Miller, J.J.H., On the Location of Zeros of Certain Classes of Polynomials with Application to Numerical Analysis, *J. Inst. Math. Appl.*, 8 (1971), 397—406.
- [7] Richtmyer, R.D., Morton, K.W., *Difference Methods For Initial-Value Problems*, Second Edition, (1967).

Two Absolutely Stable Semi-Explicit Difference Schemes for Dispersion Equation $u_t = au_{xxx}$

Su Yuansheng

Abstract

For dispersion equation $u_t = au_{xxx}$, this paper establishes two absolutely stable semi-explicit difference schemes which bear a truncation error of $O(\tau\tau h + \tau h + h^4)$ order.

They are proved by numerical examples to be very effective.