

二分法逐次解耦模式及其应用

孙会姣 王永初

(精密机械工程系)

摘 要

解耦控制系统设计的一个关键性问题是利用最少的网络支路, 实现高稳定度的解耦网络。本文提出一种二分法逐次解耦的模式, 可以将大系统分解成若干无耦合的子系统, 方法比较简单, 运算次数较少, 具有工程的实用性。

一、概 述

一个大的系统, 操作变量与被控制变量之间存在着错综复杂的联系, 一个操作变量变化往往波及到其它被控制变量。生产过程的大系统, 往往可以按工段、机组或操作单元分离, 因此分离的变量不是一个变量而是一个向量。记大系统的模型为

$$\begin{bmatrix} X_1(S) \\ X_2(S) \\ X_3(S) \\ \vdots \\ X_n(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(S) & G_{12}(S) & G_{13}(S) & \cdots & G_{1n}(S) \\ G_{21}(S) & G_{22}(S) & G_{23}(S) & \cdots & G_{2n}(S) \\ G_{31}(S) & G_{32}(S) & G_{33}(S) & \cdots & G_{3n}(S) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(S) & G_{n2}(S) & G_{n3}(S) & \cdots & G_{nn}(S) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(S) \\ M_2(S) \\ M_3(S) \\ \vdots \\ M_n(S) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

简记为

$$X(S) = G(S) M(S), \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} X(S) &= [X_1(S) \quad X_2(S) \quad X_3(S) \quad \cdots \quad X_n(S)]^T, \\ M(S) &= [M_1(S) \quad M_2(S) \quad M_3(S) \quad \cdots \quad M_n(S)]^T, \\ G(S) &= \begin{bmatrix} G_{11}(S) & G_{12}(S) & G_{13}(S) & \cdots & G_{1n}(S) \\ G_{21}(S) & G_{22}(S) & G_{23}(S) & \cdots & G_{2n}(S) \\ G_{31}(S) & G_{32}(S) & G_{33}(S) & \cdots & G_{3n}(S) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(S) & G_{n2}(S) & G_{n3}(S) & \cdots & G_{nn}(S) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

2 × 2 分解解耦方法是将操作变量与被控制变量分成两群, 即

本文1987年8月20日收到。

$$X(S) = [X_1(S) \ X_2(S)]^T,$$

$$M(S) = [M_1(S) \ M_2(S)]^T,$$

其中 $X_1(S)$ 是 r 维向量, $X_2(S)$ 是 $(n-r)$ 维向量, $M_1(S)$ 为 r 维向量, $M_2(S)$ 为 $(n-r)$ 维向量。

$$X_1(S) = [X_1(S) \ X_2(S) \ \cdots \ X_r(S)]^T, \quad X_2(S) = [X_{r+1}(S) \ X_{r+2}(S) \ \cdots \ X_n(S)]^T,$$

$$M_1(S) = [M_1(S) \ M_2(S) \ \cdots \ M_r(S)]^T, \quad M_2(S) = [M_{r+1}(S) \ M_{r+2}(S) \ \cdots \ M_n(S)]^T,$$

于是有

$$\begin{bmatrix} X_1(S) \\ \vdots \\ X_2(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(S) & G_2(S) \\ \vdots & \vdots \\ G_r(S) & G_n(S) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(S) \\ \vdots \\ M_2(S) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中 $G_1(S)$ 是 $r \times r$ 矩阵, $G_2(S)$ 是 $r \times (n-r)$ 矩阵, $G_r(S)$ 是 $(n-r) \times r$ 矩阵, $G_n(S)$ 是 $(n-r) \times (n-r)$ 矩阵。

$$\begin{aligned} G_1(S) &= \begin{bmatrix} G_{11}(S) & G_{12}(S) & \cdots & G_{1r}(S) \\ G_{21}(S) & G_{22}(S) & \cdots & G_{2r}(S) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{r1}(S) & G_{r2}(S) & \cdots & G_{rr}(S) \end{bmatrix}, \\ G_2(S) &= \begin{bmatrix} G_{1,r+1}(S) & G_{1,r+2}(S) & \cdots & G_{1n}(S) \\ G_{2,r+1}(S) & G_{2,r+2}(S) & \cdots & G_{2n}(S) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{r,r+1}(S) & G_{r,r+2}(S) & \cdots & G_{rn}(S) \end{bmatrix}, \\ G_r(S) &= \begin{bmatrix} G_{r+1,1}(S) & G_{r+1,2}(S) & \cdots & G_{r+1,r}(S) \\ G_{r+2,1}(S) & G_{r+2,2}(S) & \cdots & G_{r+2,r}(S) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(S) & G_{n2}(S) & \cdots & G_{nr}(S) \end{bmatrix}, \\ G_n(S) &= \begin{bmatrix} G_{r+1,r+1}(S) & G_{r+1,r+2}(S) & \cdots & G_{r+1,n}(S) \\ G_{r+2,r+1}(S) & G_{r+2,r+2}(S) & \cdots & G_{r+2,n}(S) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n,r+1}(S) & G_{n,r+2}(S) & \cdots & G_{nn}(S) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

引入两组网络使 $G(S)$ 矩阵变成一个对角矩阵

$$\hat{G}(S) = \begin{bmatrix} \hat{G}_1(S) & 0 \\ 0 & \hat{G}_2(S) \end{bmatrix} \quad (4)$$

这样, $X_1(S)$ 仅与 $M_1(S)$ 有关, $X_2(S)$ 仅与 $M_2(S)$ 有关。一个 $n \times n$ 的大系统就分离成两个无耦合的子系统, 第一个子系统由 r 个被控制变量组成, 另一个子系统由 $(n-r)$ 个被控制变量组成。本文重点就是研究这两个子系统的分离方法。

二、解耦网络

在系统 G 的前面加一个解耦网络 D , 如图 1 所示。 $D(s)$ 为

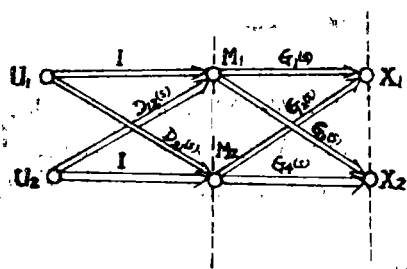


图 1

$$D(S) = \begin{bmatrix} I & D_{12}(S) \\ D_{21}(S) & I \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中

$$D_{12}(S) = -G_1^{-1}(S)G_2(S), \quad (6a)$$

$$D_{21}(S) = -G_4^{-1}(S)G_3(S). \quad (6b)$$

式(6)进行矩阵乘法有时会遇到困难,

于是修改为

$$D_{12}(S)U_2(S) = -G_1^{-1}(S)G_2(S)U_2(S), \quad D_{21}(S)U_1(S) = -G_4^{-1}(S)G_3(S)U_1(S),$$

其中 $U_1(S)$ 为 r 维列向量, $U_2(S)$ 为 $(n-r)$ 维列向量. 由 $D_{12}(S)U_2(S)$ 与 $D_{21}(S)U_1(S)$ 很容易作出网络图, 由网络图可直接按式(5)求出 D .

可以证明, G 网络加入图 1 所示的解耦网络 D 能解得式(4)所要求的结果.

证明: 由图 1 知道

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_1(S) \\ X_2(S) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G_1(S) & G_2(S) \\ G_3(S) & G_4(S) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(S) \\ M_2(S) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_1(S) & G_2(S) & I & D_{12}(S) \\ G_3(S) & G_4(S) & D_{21}(S) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(S) \\ U_2(S) \end{bmatrix} \triangleq \hat{G}(S) \begin{bmatrix} U_1(S) \\ U_2(S) \end{bmatrix}, \quad (7) \end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned} \hat{G}(S) &= \begin{bmatrix} G_1(S) & G_2(S) & I & -G_1^{-1}(S)G_2(S) \\ G_3(S) & G_4(S) & -G_4^{-1}(S)G_3(S) & I \end{bmatrix}, \\ \hat{G}(S) &= \begin{bmatrix} G_1(S) - G_2(S)G_4^{-1}(S)G_3(S) & 0 \\ 0 & G_4(S) - G_3(S)G_1^{-1}(S)G_2(S) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{G}_1(S) & 0 \\ 0 & \hat{G}_4(S) \end{bmatrix}, \quad (8) \end{aligned}$$

其中

$$\hat{G}_1(S) = G_1(S) - G_2(S)G_4^{-1}(S)G_3(S), \quad (9a)$$

$$\hat{G}_4(S) = G_4(S) - G_3(S)G_1^{-1}(S)G_2(S). \quad (9b)$$

只要 $G_1(S)$ 与 $G_4(S)$ 是非奇异的, 一个多变量的系统都可以分解成为两个子系统. 按照上述的方法, $\hat{G}_1(S)$ 与 $\hat{G}_4(S)$ 子系统可以进一步分解成为 $\hat{G}_{11}(S)$ 和 $\hat{G}_{12}(S)$ 及 $\hat{G}_{21}(S)$ 和 $\hat{G}_{22}(S)$ 子系统.

三、方法的应用

现以式(10)对象为例说明上述方法的具体应用.

$$\begin{bmatrix} X_1(S) \\ X_2(S) \\ X_3(S) \\ X_4(S) \\ X_5(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(S) \\ M_2(S) \\ M_3(S) \\ M_4(S) \\ M_5(S) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

记

$$X_1(S) = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T, \quad X_2(S) = [X_4 \ X_5]^T, \quad M_1 = [M_1 \ M_2 \ M_3]^T, \quad M_2 = [M_4 \ M_5]^T,$$

$$G_1(S) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad G_2(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_3(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_4(S) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

$G_1(S)$ 与 $G_4(S)$ 是非奇异矩阵, 因此可以应用本方法.

由式(6)知道

$$D_{12}(S) = -G_1^{-1}(S) G_2(S),$$

$$D_{12}(S)U_2(S) = -G_1^{-1}(S) G_2(S) U_2(S)$$

$$= - \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.875 & 1.25 & -0.625 \\ 1.25 & -2.5 & 1.25 \\ -0.625 & 1.25 & -1.875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.4U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25U_4 \\ 0.5U_4 \\ -0.75U_4 \end{bmatrix},$$

$$D_{21}(S) = -G_4^{-1}(S) G_3(S),$$

$$D_{21}(S)U_1(S) = -G_4^{-1}(S) G_3(S) U_1(S)$$

$$= - \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} 1.67 & -0.83 \\ -0.83 & 1.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4U_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.668U_3 \\ 0.332U_3 \end{bmatrix},$$

$D(S)$ 的解耦网络如图 2 所示. 由图 2 求得

$$D(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.75 & 0 \\ 0 & 0 & -0.668 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.332 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

加入 $D(S)$ 该 5×5 的系统分解成一个 3×3 及另一个 2×2 的子系统

$$\hat{G}_1(S) = G_1(S) - G_2(S) G_4^{-1}(S) G_3(S)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.67 & -0.83 \\ -0.83 & 0.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.533 \end{bmatrix},$$

$$\hat{G}_4(S) = G_4(S) - G_3(S) G_1^{-1} G_2(S)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.875 & -1.25 & 0.625 \\ -1.25 & 2.5 & -1.25 \\ 0.625 & -1.25 & 1.875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

再用 2×2 分解法将 $\hat{G}_1(S)$ 子系统分解成一个 2×2 及一个 1×1 的子系统

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.533 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(S) & G_{12}(S) \\ G_{21}(S) & G_{22}(S) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

并由式 (6) 求得

$$D_{12}'(S) U_3' = -G_{11}^{-1}(S) G_{12}(S) U_3' = - \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \end{bmatrix} U_3' = \begin{bmatrix} 0.332 U_3 \\ -0.668 U_3 \end{bmatrix},$$

$$D_{21}'(S) \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{bmatrix} = -G_{21}^{-1}(S) G_{22}(S) \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{bmatrix} = - \frac{1}{0.533} \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = -0.75 U_2,$$

$\hat{G}_1(S)$ 的解耦网络如图 3 所示

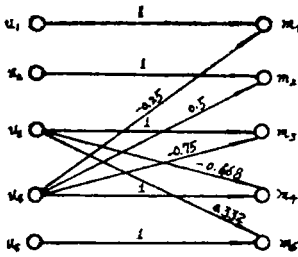


图 2

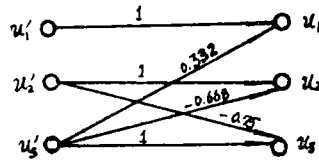


图 3

解耦后的系统为

$$\hat{G}_1(S) = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(S) & 0 \\ 0 & \hat{G}_{22}(S) \end{bmatrix},$$

其中

$$\hat{G}_{11}(S) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.533 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$\hat{G}_{22}(S) = 0.533 - \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \end{bmatrix} = 0.266.$$

最后剩下 $\hat{G}_{11}(S)$ 及 $\hat{G}_4(S)$ 系统, 按目前通行的前馈解耦就可以实现。由于这方面的内容已研究得充分, 本文不再赘述。

四、结 论

2×2 逐步分解解耦方法的步骤可用图 4 图解说。解耦过程呈现倒挂树状结构。这种方法同直接求逆解耦方法相比, 有两个显著的特点: (1) 所用解耦网络支路更少。例如本文分析一个 5×5 的耦合系统解耦, 用求逆方法需要 25 个解耦支路, 而本方法仅需 $5 + 5 + 2 \times 2 = 12$ 个支路; (2) 解耦网络均为顺向前进的网络, 不存在内部反馈, 因此具有很高的解耦稳定性; (3) 求解过程比较简单。

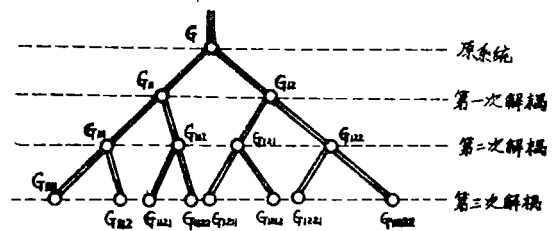


图 4

当子系统 $\hat{G}_1(S)$ 取前 $(n-1) \times (n-1)$ 维及 $\hat{G}_4(S)$ 取后 1×1 维子系统时, 解耦方法变为逐次解耦方法。

参 考 文 献

- [1] Patel, R.V., Multivariable System Theory and Design Pergamon Press, (1982).
- [2] Winterbone, D.E., Design of a Multivariable Controller for an Automotive Gas Turbine, ASME, Gas Turbine Conference, Washington, 75-GT-14 (1973).
- [3] Rosenbrock, H.H., Computer Aided Control System Design Academic Press (1974).
- [4] Shiskey, F.G., Process Control Systems, McGraw-Hill (1979).
- [5] 王永初著, 解耦控制系统, 四川科技出版社, (1985).

A Dichotomizing Successive Decoupling Model and Its Application

Sun Huijiao Wang Yongchu

Abstract

The Key point of the designing of a decoupling control system lies in using less network paths to obtain a highly stable decoupling network. In view of this, a dichotomizing successive decoupling model, which can be used to decompose a large system into several uncoupled subsystems, is presented here.

As a simple method requiring but a few calculations, this model is practical for the control engineering.