第10卷 第1期 华侨大学学报自然科学版 Vol.10 No.1
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1989年1月 (NATURAL SCIENCE) Jan. 1989

钢筋混凝土框架优化设计

林赞生 麦淑良

(土木工程系)

摘 要

本文把钢筋混凝土框架的优化设计问题表示为一般的极值求解问题，避免了以往采用的复杂优化理论，易于为工程人员接受.文中采用了一种可行性调整，从而把收敛条件与目标函数联系起来.本文方法对于工程实际中设计变量不多的情况尤为方便.文后给出算例.

一、引 言

钢筋混凝土框架结构是工程设计中常见的结构，发展一种合理、有效、实用的优化方法已引起普遍关注。国内现用0.618法和准则法[1,2]进行优化虽然效果良好，但其优化理论不易为设计人员接受而难以推广。本文把钢筋混凝土框架的优化问题表示为极值求解问题、在同样以设计规范为约束条件的情况下，避免使用复杂的优化理论。显得简单明了；对于在工程实际中具有很多同类变量而设计变量不多时，尤为方便。此外，还采用了一种可行性调整，把收敛条件与目标函数联系起来。

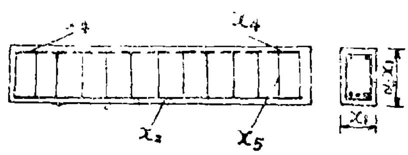

图 1 钢筋混凝土梁

二、数学模型

钢筋混凝土框架优化设计的目标是使造价最低，约束条件以钢筋混凝土设计规范为依据。

1. 矩形截面梁

目标函数取为梁单位长度的价格

$$W_b = \alpha_1 C_c x^2_1 + C x_2 + C(x_3 + x_4)/6 + 0.8C(\alpha_1 + \gamma)x_1 x_5 + (1 + 2\alpha_1)C_f x_1, \tag{1}$$

约束条件为：正弯矩平衡的约束

$$K_1 M_x \leqslant R_g x_2\left[\xi_1 \alpha_1 x_1 - \frac{R_g x_2}{2R_w x_1}\right], \tag{2}$$

本文1986年11月25日收到。

左端负弯矩平衡的约束

$$K_1M_1\leqslant R_gx_3\left[\zeta_1\alpha_1x_1-\frac{R_gx_3}{2R_wx_1}\right], \tag{3}$$

右端负弯矩平衡的约束

$$K_1M_2\leqslant R_gx_4\left[\zeta_1\alpha_1x_1-\frac{R_gx_4}{2R_wx_1}\right], \tag{4}$$

最大剪力平衡的约束

$$K_2Q\leqslant 1.5R_{gk}\alpha_1x_1x_5+0.07R_a\zeta_1\alpha_1x^2{}_1, \tag{5}$$

纵筋最小配筋率

$$\{x_2,\ x_3,\ x_4\}\geqslant\mu_1\zeta_1\alpha_1x^2{}_1, \tag{6}$$

纵筋最大配筋率

$$\{x_2,\ x_3,\ x_4\}\leqslant\mu_2\xi_1\alpha_1x^2{}_1, \tag{7}$$

梁宽下限

$$x_1\geqslant\underline{x}_1, \tag{8}$$

纵筋下限

$$(x_2,\ x_3,\ x_4)\geqslant 0.98\pi, \tag{9}$$

箍筋下限

$$x_5\geqslant 0.009\pi. \tag{10}$$

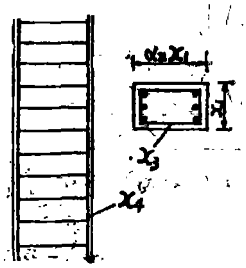

图 2　钢筋混凝土柱

2. 矩形截面柱

目标函数取为单位长度的价格

$$W_c=\alpha_2C_ox^2{}_1+2Cx_2+0.8C(\alpha_2+\gamma)x_1x_3+2(1+\alpha_2)C_fx_1 \tag{11}$$

约束条件为：轴力和弯矩平衡的约束：大偏心情况，当$k_2N/(R_wx_1)\leqslant 0.55\alpha_2\zeta_1x_1$时，

$$\eta k_2M-0.5k_2N\alpha_2x_1+0.5\frac{(k_2N)^2}{R_wx_1}\leqslant R_g\zeta_1\alpha_2x_1x_2 \tag{12}$$

小偏心情况，当$k_2N/(R_wx_1)>0.55\zeta_1\alpha_2x_1$时，

$$\eta k_2M-0.5R_a\zeta^2{}_1\alpha_2x^2{}_1+0.5k_2N\zeta_2\alpha_2x_1\leqslant R_g\zeta_2\alpha_2x_1x_2 \tag{13}$$

其中

$$\eta=1\Big/\left(1-\frac{k_2NE^2{}_0}{10\alpha_eEhJ}\right),\qquad \alpha_e=0.1\Big/\left(0.3+\frac{M}{N\alpha_2x_1}\right)+0.143.$$

剪力平衡的约束

$$k_2Q\leqslant 1.5\zeta_1\alpha_2R_{gk}x_1x_3+0.07R_a\zeta_1\alpha_2x^2{}_1, \tag{14}$$

纵筋最小配筋率

$$x_2\geqslant\mu_1\zeta_1\alpha_2x^2{}_1, \tag{15}$$

纵筋最大配筋率

$$x_2\leqslant\mu_2\zeta_1\alpha_2x^2{}_1, \tag{16}$$

梁宽下限

$$x_1\geqslant\underline{x}_1, \tag{17}$$

纵筋下限

$$x_2 \geqslant 0.98\pi, \tag{18}$$

箍筋下限

$$x_3 \geqslant 0.009\pi. \tag{19}$$

3. 位移条件

位移条件包括层间位移约束和总体位移约束条件：

$$\left|\frac{\Delta_i - \Delta_{i-1}}{h_i}\right| \leqslant \frac{1}{400}, \qquad \left|\frac{\Delta_n}{H}\right| \leqslant \frac{1}{500}. \tag{20}$$

这些条件可在可行性调整时考虑。

三、优 化 方 法

1. 矩形截面梁

在梁构件设计中，一旦已知x_1，其它变量 x_2—x_5 便可唯一确定，即x_1起控制作用，称为主设计变量，其余为次设计变量。在优化设计中，如果次设计变量可以通过约束条件用主设计变量表示，那么设计变量只有主设计变量x_1。

以x_1和x_2组成的约束空间为例（图 3），可以证明最优点p^*一定落在可行域边界上，而不可能落在可行域P内，因为一定有目标函数$W_b(P^*) < W_b(P)$。由此可见x_2可通过约束条件由x_1表示。

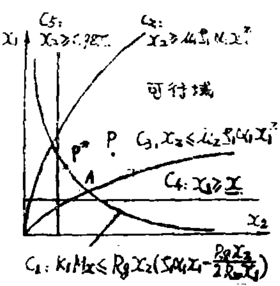

图 3 x_1、x_2的约束空间

问题归结为哪个约束是有效的，如图 3 所示，一共有 5 个约束c_1—c_5，c_4和c_5是下限约束，可在求出变量以后考虑。易于看出最优点p^*不可能在c_3上除A点外的任何点，因为必有 c_1 上的对应点使$W_b|_{c1} < W_b|_{c3}$，所以p^*只能在c_1或c_2上。可以假定p^*落在c_1上，求出初始最优点的x_1值后进行检验，如果p^*不落在 c_1 上，必然可在c_2上找到。

把梁构件按类划分，假定同一类梁共有 n 个构件。

1）求初始最优点：

由式（2）—（5）取等式求出x_2—x_5（由于非线性项影响很小，这里暂不考虑）

$$\begin{cases} x_{2i} = k_1 M_{xi}/(K_g \zeta_1 \alpha_1 x_1), \\ x_{3i} = k_1 M_{1i}/(R_g \zeta_1 \alpha_1 x_1), \\ x_{4i} = k_1 M_{2i}/(R_g \zeta_1 \alpha_1 x_1), \\ x_{5i} = (k_2 Q_i - 0.07 R_a \zeta_1 \alpha_1 x^2{}_1)/(1.5 R_{gk} \alpha_1 x_1), \qquad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n), \end{cases} \tag{21}$$

代入式（1）累加得

$$\overline{W}_b = nC_c \alpha_1 x^2{}_1 + \frac{k_1 C}{R_g \zeta_1 \alpha_1 x_1} \sum_{i=1}^{n} \{ M_{xi} + (M_{1i} + M_{2i})/6 \}$$

$$+ \frac{0.8C(\alpha_1 + \gamma)}{1.5 R_{gk} \alpha_1} \left(\sum_{i=1}^{n} k_2 Q_i - 0.07 n R_a \alpha_1 x^2{}_1 \right) + n(1 + 2\alpha_1) C_f x_1.$$

通过对x_1求二阶导数可以证明：当$x_1>0$时$\overline{W}_b$为凸函数，存在唯一的极值点即最优点。由$\partial\overline{W}_b/\partial x_1=0$得

$$a_1x^3{}_1+a_2x^2{}_1+a_3=0, \tag{22a}$$

其中

$$a_1=2\alpha_1C_c-0.0747C(\alpha_1+\gamma)\zeta_1R_a/R_{gk},$$

$$a_2=(1+2\alpha_1)C_f, \qquad a_3=-\frac{k_1C}{n\zeta_1\alpha_1R_g}\sum_{i=1}^{n}\left\{M_{xi}+\frac{M_{1i}+M_{2i}}{6}\right\}.$$

以上方程可求出x_1。把式（7）取等式代入M_{xi}、M_{1i}、M_{2i}中最大者$M_{\max}$对应的约束取等式可得

$$x_1^{下}=\left\{\frac{k_1M_{\max}}{\mu_2R_g\zeta^2{}_1\alpha_1^2\left(1-\frac{\mu_2R_g}{2R_w}\right)}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

x_1的真正下限$x_{\min}=\max\left(x_1^{下},\ \underline{x}_1\right)$。初始最优解为$x_1$与$x_{\min}$的较大者。

2）修改初始最优解：

检验式（2）—（4）是否为有效约束只要看式（6）是否满足。比如对应某构件j的x_3约束不满足，令$x_{3j}=\mu_1\zeta_1\alpha_1x^2{}_1$代替式（21）相应项代入式（1），求导后得到新的控制方程

$$a'_1x^3{}_1+a'_2x^2{}_1+a'_3=0, \tag{22b}$$

其中

$$a'_1=\frac{1}{3}\mu_1\zeta_1\alpha_1c+a_1,$$

$$a'_2=a_2, \qquad a'_3=a_3+\frac{k_1CM_{1j}}{6n\zeta_1\alpha_1R_g}.$$

以上作法对其它约束不满足情况类推，由所得到的方程求得$x^*{}_1$，该值一般变化很小，可认为其它约束保持有效，因而$x^*{}_1$即为最优解。

3）求次设计变量：

由$x^*{}_1$通过相应的有效约束式（2）—（5）或式（6）求次设计变量x_2—x_5，同时与式（9）、（10）比较取较大者。

2. 矩形截面柱

柱的数学模型与梁相似，可以采用相同的优化方法。假定同一类柱共有n个构件。

1）求初始最优点：

大偏心情况。由式（12）得x_2代入式（11）有

$$\overline{W}_c=nC_c\alpha_2x^2{}_1+\frac{2C}{R_g\zeta_1\alpha_2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{k_2M_i\eta_i}{x_1}-0.5k_2\alpha_2N_i+\frac{0.5(k_2N_i)^2}{R_wx^2{}_1}\right\}$$
$$+\frac{0.8C(\alpha_2+\gamma)}{1.5R_{gk}\alpha_2}\left(\sum_{i=1}^{n}k_2Q_i-0.07nR_a\zeta_1\alpha_2x_1^2\right)+n(1+2\alpha_2)C_fx_1.$$

对x_1求二阶导数可以证明：当$x_1>0$时，$\overline{W}_c$为凸函数，存在唯一的极值点。由$\partial W_c/\partial x_1=0$得

$$b_1x^4{}_1+b_2x^3{}_1+b_3x_1+b_4=0, \tag{23}$$

其中

$$b_1=2\alpha_2C_c-0.0747C(\alpha_2+\gamma)\zeta_1R_a/R_{gk}, \qquad b_2=2(1+\alpha_2)C_f,$$

$$b_3=-\sum_{i=1}^{n}\frac{2Ck_2M_i\eta_i}{nR_g\zeta_1\alpha_2}, \qquad b_4=-\sum_{i=1}^{n}\frac{2C(k_2N_i)^2}{nR_wR_g\zeta_1\alpha_2}.$$

小偏心情况及混合型：

由式（13）解得x_2代入式（11）并求一阶导数，整理后得

$$\frac{\partial\overline{W}_c}{\partial x_1}=\left\{2C_c\alpha_2-0.0747C(\alpha_2+\gamma)\zeta_1R_a/R_{gk}-\frac{2CR_a\zeta^2{}_1\alpha_2}{R_g\zeta_2}\right\}nx^3{}_1$$

$$+2n(1+\alpha_2)C_fx^2{}_1-\sum_{i=1}^{n}\frac{2Ck_2M_i\eta_i}{R_g\zeta_2\alpha_2}. \tag{24}$$

考虑到钢筋与混凝土的相对价格及相对强度，一般而言均有$\partial\overline{W}_c/\partial x_1<0$，即对于任意$x_1>x'_1$均有$\overline{W}_c(x_1)<\overline{W}_c(x'_1)$。由此可得到推论：

对于单一的小偏心受压构件，最优解$x^*{}_1$与其上限值重合：$x^*{}_1=\sqrt{k_2N/0.55\alpha_2\zeta_1R_w}$。而对于一类构件，最优解$x^*{}_1$介于各构件在小偏心情况下的上限值中最大者与最小者之间。出现一部分为小偏心构件而另一部分为大偏心构件的混合型，此时需要把式（23）、（24）迭加求解x_1并重新判别偏心情况。

以上已可求出x_1的初始值，并与$x_{\min}$组成初始最优点。$x_{\min}$的求解与梁的情况类似，不再赘述。

2）修改初始最优解：

检验约束式（15）是否满足，如对应j构件不满足，令$x_{2j}\triangleq\mu_2\xi_1\alpha_2x^2{}_1$取代相应的约束式（12）或（13）代入式（11）重新求解，作法与梁类似。

3）求次设计变量

根据约束的有效性（式（12）～（15）），由$x^*{}_1$求出次设计变量x_2、x_3，并与式(18)、（19）比较取较大者。

3．钢筋混凝土框架

框架的优化过程为：给定一初始方案，进行结构整体分析得到各梁和柱的内力，按梁和柱的优化方法寻求优化解，组成新的方案进行下一次迭代，收敛条件按下面采用的一种可行性调整由目标函数控制。

四、齿行设计

与满应力法相比，齿行法的优点不仅在于可得到一个可行方案，更重要的是它把收敛条件与目标函数联系起来。虽然框架结构不能象桁架那样用应力比作射线步进行调整，但由于其构件抗弯刚度对内力起控制作用，可认为变量调整后内力近似不变。

可行性调整是针对框架优化后的新方案，经过结构整体分析，对于某梁构件进行变量调整：

$$x^*{}_1=\xi x_1, \qquad x^*{}_2=\xi^2x_2, \qquad x^*{}_3=\xi^2x_3, \qquad x^*{}_4=\xi^2x_4, \qquad x^*{}_5=\xi x_5. \tag{25}$$

使得约束式（2）—（5）取等式成立，即

$$k_1M^*_x=R_gx^*_2\left[\zeta_1\alpha_1x^*_1-\frac{R_gx^*_2}{2R_wx^*_1}\right]$$

$$=R_gx_2\left[\zeta_1\alpha_1x_1-\frac{R_gx_2}{2R_wx_1}\right]\xi^3=k_1M_x\xi^3,$$

得

$$\xi_1=(M^*_x/M_x)^{\frac{1}{3}},$$

同理

$$\xi_2=(M^*_1/M_1)^{\frac{1}{3}},\quad \xi_3=(M^*_2/M_2)^{\frac{1}{3}},\quad \xi_4=(Q^*/Q)^{\frac{1}{2}},$$

式中带“*”表示当前内力值，不带“*”表示上次迭代的内力值．取

$$\xi=\max(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4).$$

这样式（2）—（5）已得到满足，式（6）、（7）自然满足，而式（8）—（10）在优化过程中已经考虑且一般均有$\xi>1$，可不再考虑．

对于某柱构件进行变量调整：

$$x^*_1=\xi x_1,\qquad x^*_2=\xi^2x_2,\qquad x^*_3=\xi x_3.\tag{26}$$

使得式（12）—（14）取等式成立，整理后可得收敛的迭代式．大偏心情况为

$$\xi'_1=\left\{\frac{k_2\eta M^*-0.5k_2N^*\alpha_2\xi x_1+0.5(k_2N^*)^2/R_w\xi x_1}{R_g\alpha_2\zeta_1x_1x_2}\right\}^{\frac{1}{3}},$$

小偏心情况为

$$\xi''_1=\left\{\frac{k_2\eta M^*+0.5k_2N^*\alpha_2\zeta_2x_1\xi}{0.5K_a\alpha^2{}_2\zeta^2{}_1x^3{}_1+R_g\zeta_2\alpha_2x_1x_2}\right\}^{\frac{1}{3}},$$

及

$$\xi_2=(Q^*/Q)^{1/2},$$

取

$$\xi=\max(\xi'_1、\xi_2)\text{或}\xi=\max(\xi''_1、\xi_2)。$$

这样式（12）—（14）得到满足，式（15）、（16）自然满足，而式（17）—（19）跟梁的情况一样不再考虑．

对每个构件进行上述运算后，取最大值

$$\xi'_{\max}=\max_i(\xi_i).$$

最后考虑位移条件式（20），由于位移与构件宽度的四次方关系可有

$$\xi''=\left\{400\left|\frac{\Delta_i-\Delta_{i-1}}{h_i}\right|\right\}^{1/4},$$

$$\xi'''=\left\{500\left|\frac{\Delta_n}{H}\right|\right\}^{2/4},$$

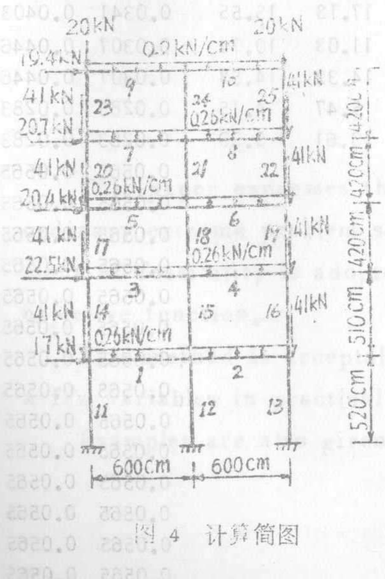

图4　计算简图

取三者最大值：

$$\xi_{max}=\max\{\xi'_{max}, \ \xi'', \ \xi'''\}. \tag{27}$$

因此按式（25）或（26）把每个构件均用ξ_{max}进行调整所得到的新方案满足了所有约束条件，因而是可行方案，用此方案计算目标函数$W^{(k+1)}$，收敛条件为：

$$\left|\frac{W^{(k+1)}-W^{(k)}}{W^{(k)}}\right|\leqslant\varepsilon. \tag{28}$$

五、算 例

两跨五层框架几何尺寸及荷载情况如图4所示，水平荷载沿左右作用．梁和柱初始宽度分别取25cm和40cm，$\alpha_1=2.5$，$\alpha_2=1.0$，$E_h=3\times10^6\mathrm{N/cm^2}$，$k_1=1.4$，$k_2=1.55$，$\mu_1=0.001$，$\mu_2=0.03$，$a_g=3\mathrm{cm}$，$R_{gc}=R_{gk}=24000\mathrm{N/cm^2}$，$R_{gb}=34000\mathrm{N/cm^2}$，$C_f=0.00015$元$/\mathrm{cm^2}$，$C_c=0.000066$元$/\mathrm{cm}$，$C_s=0.04731$元$/\mathrm{N}$，$R_s=0.078\mathrm{N/cm^3}$．梁截面二三层之间变化一次，构造宽度下限分别为18cm和16cm，柱截面三四层之间变化一次，构造下限宽度分别为30cm和18cm．计算结果示于表1

表 1

杆件号	构件截面宽度(cm)		梁底、柱的纵筋截面积(cm²)		梁顶右端纵筋截面积(cm²)		梁顶左端纵筋截面积(cm²)		单位长度箍筋截面积(cm²/cm)	
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	19	19	4.48	6.42	19.05	18.53	17.79	17.35	0.0303	0.0417
2	19	19	4.48	6.42	17.79	17.35	19.05	18.53	0.0303	0.0417
3	19	19	4.20	6.30	17.80	17.64	17.58	16.65	0.0283	0.0399
4	19	19	4.20	6.30	17.58	16.65	17.80	17.64	0.0283	0.0399
5	17	18	4.78	5.71	17.13	15.55	15.86	13.66	0.0341	0.0403
6	17	18	4.78	5.71	15.86	13.66	17.13	15.55	0.0341	0.0403
7	17	17	5.25	5.77	14.32	14.53	11.03	10.74	0.0307	0.0446
8	17	17	5.25	5.77	11.03	10.74	14.32	14.53	0.0307	0.0446
9	17	17	4.22	4.94	9.61	9.99	5.47	4.15	0.0283	0.0283
10	17	17	4.22	4.94	5.47	4.15	9.61	9.99	0.0283	0.0283
11	44	45	6.98	5.67					0.0565	0.0565
12	44	45	6.98	5.67					0.0565	0.0565
13	44	45	5.52	5.67					0.0565	0.0565
14	44	41	3.08	4.67					0.0565	0.0565
15	44	41	3.08	4.67					0.0565	0.0565
16	44	41	3.08	4.67					0.0565	0.0565
17	44	35	3.70	5.65					0.0565	0.0565
18	44	35	3.70	5.65					0.0565	0.0565
19	44	35	3.08	3.36					0.0565	0.0565
20	31	31	8.87	8.42					0.0565	0.0565
21	31	31	8.87	8.42					0.0565	0.0565
22	31	31	3.08	3.08					0.0565	0.0565
23	31	26	10.65	9.10					0.0565	0.0565
24	31	26	10.65	9.10					0.0565	0.0565
25	31	26	3.08	3.08					0.0565	0.0565

表中b栏为文〔1〕结果，a栏为本文计算结果，经过三次迭代得到，总费用为2033元，由于本文所取的设计变量数很少，且考虑了层间侧移约束，使得柱截面较文〔1〕为大。

本文采用符号：

x_1——梁(或柱)宽；x_2——梁下部(或柱)纵筋截面积；x_3——梁左端上部纵筋截面积；x_4——梁右端上部纵筋截面积；x_5——梁端单位长度箍筋截面积；K_1——梁弯曲应力安全系数；K_2——剪应力安全系数，或柱偏心受压安全系数；M_z——梁跨中最大正弯矩；M_1梁左端最大负弯矩绝对值；M_2——梁右端最大负弯矩绝对值；μ_1——规范规定的最小配筋率；μ_2——规范规定的最大配筋率；a_g——钢筋保护层厚度；$\alpha_1 \alpha_2$——梁、柱的高/宽；$\gamma=1-4a_g/\bar{x}_1$，$\bar{x}_1$为前次的x_1；$\zeta_1=1-a_g/(\alpha\bar{x}_1)$，$\alpha$为$\alpha_1$或$\alpha_2$；$\zeta_2=1-2a_g/(\alpha\underline{x}_1)$；$\underline{x}_1$——$x_1$的下限；$C_c$——混凝土单价(元/$cm^3$)；$C_s$——钢筋单价(元/kg)；$C_f$——单位面积模板价(元/$cm^2$)；$R_s$——钢筋比重(kg/$cm^3$)；$C=C_s \cdot R_s - C_c$；$R_w$——混凝土抗弯设计强度；$R_a$——混凝土抗轴压设计强度；$R_g$——纵筋抗拉设计强度；$R_{gk}$——箍筋设计强度。

参 考 文 献

〔1〕孙焕纯、丁殿明，钢筋混凝土构件和框架的优化设计——0.618法，大连工学院学报，1(1982).

〔2〕许铁生、朱彦鹏，钢筋混凝土框架的优化设计，土木工程学报，3(1986).

〔3〕钱令希，工程结构优化设计，水利电力出版社，(1983)，25—50.

Optimum Design for Reinforced Concrete Frames

Lin Zhansheng　Mai Shuliang

Abstract

This paper expresses the design of reinforced concrete frames as solving ordinary extreme problem so as to avoid complex optimum theory. The adjustment of feasibility is adopted to connect the condition of convergence with objective function.

This method is acceptable for engineers and convenient for the design with a few variables in practical engineering.

Examples are also given.