第10卷 第1期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol.10 No.1
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1989年1月　　(NATURAL SCIENCE)　　Jan. 1989

统计模型用AIC准则定阶的相容性问题

陈 兴 钧

(应用数学系)

摘　　要

本文介绍十多年来研究ARMA模型用AIC准则定阶相容性问题的进展、近几年来AIC准则被引用到其它统计模型的新发展以及作者的研究工作.

一、AIC定阶准则的提出

在时间序列分析中，由平稳零均值序列$\{X_t\}$的一个长度为N的样本建立$\{_t\}$的ARMA模型：

$$x_t+\varphi_1 x_{t-1}+\cdots+\varphi_p x_{t-p}=a_t+\theta_1 a_{t-1}+\cdots+\theta_q a_{t-q} \qquad (1)$$

基本问题有二。一是定阶，即估计模型的阶数p和q，二是模型参数的估计，即估计$\varphi_1,\cdots,\varphi_p$和$\theta_1,\cdots,\theta_q$以及模型残差的方差$\sigma_a^2$。

1973年前，AR和MA模型是分别利用$\{x_t\}$的偏相关函数和自相关函数的"截尾性"定价；ARMA模型是采用"过拟合"法定价[1,2]。而所有这些方法都是基于统计假设检验，从而常因各人所给信度不同，定出的阶也就不同，加上这些方法还比较粗糙等原因，所以使定阶常带人为性。1973年，日本学者H. Akaike给出了一个新的定阶方法[3]，首先他给出一个信息准则函数，后来人们就称之为AIC函数(Akaike Information Criterion)。这个函数依赖于模型的阶数和已知的样本，实际应用于ARMA(p, q)序列时，形式为

$$\mathrm{AIC}(p,q)=\log\hat{\sigma}_{p,q}^2+\frac{2(p+q)}{N}, \qquad (2)$$

其中$\hat{\sigma}_{p,q}^2$是相应的ARMA(p, q)模型的最小残差平方和除以N，即

$$\hat{\sigma}_{p,q}^2=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left(x_t+\sum_{j=1}^{p}\hat{\varphi}_j^L x_{t-j}-\sum_{j=1}^{q}\hat{\theta}_j^L a_{t-j}\right)^2.$$

所谓用AIC准则定阶，是给出模型阶的上限p^*和q^*，使$q^*>q_0$，$p^*>p_0$，p_0和q_0是真阶。在$0\leqslant p\leqslant p^*$，$0\leqslant q\leqslant q^*$范围内，求AIC$(p, q)$的极小值点$(\hat{p}, \hat{q})$并以$(\hat{p}, \hat{q})$作为$(p_0, q_0)$的估计。

这套方法明显地克服了以往用统计假设检验法定阶的人为性，所得结果是一种意义十分

本文1987年7月30日收到.

明确的最优估计。因而，引起广泛重视，在有些领域的实际应用中取得明显效果。于是数学工作者就猜测这套定阶方法，很可能是一种具有优良性质的估计方法，纷纷从理论上探讨估计的相容性问题，即当 $N\to\infty$ 时，$\hat{p}$ 和 $\hat{q}$ 是否以概率 1 分别收敛于 p_o 和 q_o。十多年来的研究，已取得明显的进展。

二、研究AR模型用AIC准则定阶的相容性问题的进展

（1）1976年，日本学者 R. Shibata 对 AR 模型用 AIC 准则定阶的渐近性质，得到以下结果[4]。

设 $\{x_t\}$ 是 AR 序列，模型形式为：

$$x_t+\varphi_1 x_{t-1}+\cdots+\varphi_p x_{t-p}=a_t, \tag{3}$$

真阶为 p_o，给出阶的优选上限 p^*，使 $p^*>p_o$，由一个长度为 N 的样本，以

$$\mathrm{AIC}(p)=\log\hat{\sigma}_p^2+\frac{2p}{N} \tag{4}$$

为准则函数。在 $0\leqslant p\leqslant p^*$ 范围内定出的阶记作 $\hat{p}$。则有

（i）$p_r\{\lim\limits_{N\to\infty}\hat{p}=p\}=0$，　　当 $0\leqslant p<p_o$，

（ii）$\lim\limits_{N\to\infty}p_r\{\hat{p}=p\}=q_{p-p_o}q'_{p^*-p}$，　　当 $p^o\leqslant p\leqslant p^*$，

其中

$$q_k=\sum\nolimits_k^*\left\{\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i!}\left(\frac{\alpha_i}{i}\right)^{r_i}\right\},\qquad q'_k=\sum\nolimits_k^*\left\{\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{r_i!}\left(\frac{1-\alpha_i}{i}\right)^{r_i}\right\},$$

$\alpha_i=p_r\{x_i^2>2i\}$，诸 r_i 是非负整数，而 $\sum_k^*$ 表示对所有满足 $r_1+2r_2+\cdots+kr_k=k$ 的 $r_1, r_2\cdots r_k$ 求和。

Shibata 的工作宣告了 AR 模型用 AIC 准则所定的阶 $\hat{p}$，并非真阶 p_o 的相容估计。并且具体指出 $\hat{p}$ 不可能偏低（结论(i)），偏高的概率不大（结论(ii)）。因此实际工作者仍然采用 AIC 准则来定阶，而数学工作者则致力改进 AIC 准则函数，希望找出具有严格相容性的新的准则函数。

（2）1979年，澳大利亚学者 Hannan 和 Quinn[5]，将 AIC 准则函数（4）修改为：

$$H(p)=\log\hat{\sigma}_p^2+\frac{c(N)p}{N}, \tag{5}$$

其中取 $C(N)=\log N$ 或 $C(N)=C\log\log N$，$C>2$。并证明了以 $H(p)$ 为准则函数，在 $0\leqslant p\leqslant p^*(p^*>p_o)$ 范围内定出的阶 $\hat{p}$，必是真阶 p_o 的相容估计。

在实际使用（5）时，经常取 $C(N)=\log N$，并另命名为 $\mathrm{BIC}(p)$，即

$$\mathrm{BIC}(p)=\log\hat{\sigma}_p^2+\frac{p\log N}{N}. \tag{6}$$

Hannan 和 Quinn 的工作是以能给出真阶 p_o 的上限 p^* 为前提的。既然 p_o 未知，如何给出 p^*？

（3）1972年，安鸿志、陈兆国和 Hannan 合作，解决了上述遗留问题[6]。他们把优选上限 p^* 修改为：

$$p^*(N)=0(\log N)^{\alpha}, \qquad 0<\alpha<+\infty.$$

这样无论 p_o 多大，当 N 充分大时，$p^*(N)$ 总可以超过 p_o。他们还证明了在 $0\leqslant p\leqslant p^*(N)$ 范围内，由 $\mathrm{BIC}(p)$ 准则函数定出的阶 $\hat{p}$ 也必是 p_o 的相容估计。

三、研究ARMA模型用AIC准则定阶的相容性问题的进展

（1）1976年，日本 Shibata 获得 AR 模型用 AIC 准则定阶并非真阶的相容估计的定理后，人们很快发现此结果可推广到一般的 $\mathrm{ARMA}(p,q)$ 模型中去。因此对 ARMA 模型，也引起人们去寻找具有相容性的定阶准则函数的极大兴趣。

（2）1980年，Hannan 把他在1979年所得的关于 AR 模型的具有相容性的准则函数[6]，推广到 ARMA 模型，从而获得 ARMA 模型的第一个具有相容性的定阶准则函数[7]。他把 $\mathrm{AIC}(p,q)$ 修改为

$$H(p,q)=\log\hat{\sigma}_{p,q}^2+\frac{C(N)(p+q)}{N}, \qquad (7)$$

其中仍取 $C(N)=\log N$ 或 $C(N)=C\log\log N$，$C>2$。并证明了在给出阶的优选上限 p^* 和 q^* 后，以 $H(p,q)$ 为准则函数，在 $0\leqslant p\leqslant p^*$，$0\leqslant q\leqslant q^*$ 内所定出的阶 $\hat{p}$ 和 $\hat{q}$，也必分别是 p_o、q_o 的相容估计。

在实际应用（7）时，也通常取 $C(N)=\log N$，并另命名为 $\mathrm{BIC}(p,q)$，即

$$\mathrm{BIC}(p,q)=\log\hat{\sigma}_{p,q}^2+\frac{(p+q)\log N}{N}. \qquad (8)$$

但是，以式(7)或(8)为准则函数定阶，算法上会碰到困难。因为要求出 $\hat{\sigma}_{p,q}^2$，首先必需求出 $\mathrm{ARMA}(p,q)$ 模型系数的最小二乘估计。但是 $\mathrm{ARMA}(p,q)$ 模型的残差并非模型系数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$ 和 $\theta_1, \cdots, \theta_q$ 的线性函数。因此就要采用非线性的最小二乘估计的复杂计算了。

（3）1982年，Hannan 和 Rissanen 针对上述算法上的困难，提出了一种线性定阶的递推方法[8]。它的基本思想是先由已知样本建立一个长自回归模型 $\mathrm{AR}(p_N)$，并求出此模型白噪声的一个样本 $\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_N$，然后把它看作已知 $\mathrm{ARMA}(p,q)$ 序列的白噪声的样本，这样就可避免非线性的最小二乘估计了。

Hannan 还企图证明按此线性法定出的阶 $\hat{p}$ 和 $\hat{q}$ 能分别是真阶 p_o 和 q_o 的相容估计，但未达目的，却发现只有当把准则函数 $\mathrm{BIC}(p,q)$ 修改为

$$\mathrm{BIC}\delta(p,q)=\log\hat{\sigma}_{p,q}^2+\frac{(p+q)(\log N)^{1+\delta}}{N}, \qquad \delta>0 \qquad (9)$$

时，才有

$$p_r\{\lim_{N\to\infty}\hat{p}=p_o\}=1, \text{ 和 } p_r\{\lim_{N\to\infty}\hat{q}=q_o\}=1.$$

可见，Hannan 和 Rissanen 得到的是以式(9)为准则函数的线性定阶方法。但是他们仍然未给出确定真阶 p_o 和 q_o 的上限 p^* 和 q^* 的方法。

（4）1984年，王寿仁和陈兆国等改进了 Hannan 和 Rissanen 的方法。给出确定真阶上限的“监视法”。并仍以 $\mathrm{BIC}(p,q)$ 为准则函数(不是BIC δ)，得到一种具有相容性的线性定阶方法[9]。

四、AIC定阶的新发展和作者的一些工作

由于用AIC准则来建立ARMA模型，不仅在一些领域中取得明显效果，而且十多年来理论上得到明显的进展。因此，近几年来，不少学者把AIC准则引用到其它多种统计模型的建模中去。据所见资料，AIC或BIC定阶准则函数已不仅被引用到时间序列的其它模型，如多维的开环、闭环自回归模型和非线性的门限自回归模型。还引用到概率统计中的一般线性回归模型中去。而且对AIC或BIC定阶准则函数的使用十分灵活，还出现与逐步回归有某些相似的近似AIC定阶法。我们曾结合实际问题运用上述方法作过尝试，为泉州人民银行建立货币流通的门限自回归模型，为福州铁路局建立客流、货流的开环自回归模型。

但是，上面提到的多种统计模型用AIC或BIC来定阶(或选元)，是否具有相容性呢？这应是一类具有实际应用价值的理论问题，至今尚是一片空白，等待数学工作者去研究解决。作者仅对多项式回归模型进行分析，已经证明了多项式回归模型用AIC准则定出的阶并不是真阶的相容估计。

参 考 文 献

[1] 安鸿志等著，时间序列的分析与应用，科学出版社，(1983)。

[2] 项静恬等编著，动态数据处理，气象出版社，(1986)。

[3] Akaike, H., Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle, In: 2 nd International Symposium on Information Theory, B. N. Petrov and F. Csaki (Ed), Budapest, Akademial Kiado, (1973), 261—281.

[4] Shibata, R., Selection of the Order of an Autoregression Model by Akaikes Information Criterion, Biometrika, 63(1976), 117—126.

[5] Hannan, E. J., and Quinn, B. G., The Determiration of the Order of an Autoregression, J. R. Statist, Soc. B, 41(1979), 190—195.

[6] An Hongzhi, Chen Zhaoguo and Hannan, E. J., Autocorrelation, Autoregression and Autoregressive Approximation, The Annals of statistic, 10, 3(1982), 926—936.

[7] Hannan, E. J., The Estimation of the Order of an ARMA Process, the Annals of Statistic, 8, 5(1980), 1072—1081.

[8] Hannan, E. J. and Rissanen, J., Recursive Estimation of Mixed Autoregressive Moving Average, Biomatrica, 69(1982), 81—94.

[9] 陈兆国等，ARMA序列线性建模法，全国第一届时间序列会议论文集，(1984)。

The Consistency for a Statistical Model to Determine the Order by AIC Criterion

Chen Xinggou

Abstract

With respect to the consistency for an ARMA model to determine the order by AIC criterion, this paper summarizes the advances of its studies in the last decade. The new developments on introducing of AIC criterion to the other statistical models are also summarized here.

The author tried to use AIC criterion in actual staticstics, it happens that inconsistence exists sometimes between theoretical conclusion and practice,