第10卷 第1期 华侨大学学报自然科学版 Vol.10 No.1
1989年1月 JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Jan. 1989

Reich的一个定理的改进

刘 增 荣

(应用数学系)

摘 要

本文改进了Reich关于Teichmueller型映照的唯一极值性判别法的一个定理，指出了出现在文〔2〕中该定理的证明存在几处疏漏，它们已为本文所弥补.

一、引 言

设$\varphi_0(z)$是定义在复平面C的子区域Ω上的一个复值可测函数，$\varphi_0(z)\neq 0$ $a.e.$. Ω上的一个拟共形映照$w=f(z)$称为是Teichmueller型的，如果f有复特征

$$x(z)=\frac{f_{\bar z}}{f_z}=\frac{\overline{\varphi_0(z)}}{|\varphi_0(z)|},\qquad z\epsilon\Omega, \tag{1}$$

其中k为常数，$0<k<1$。用Q_f表示Ω上与f有相同边界值且同伦的拟共形映照全体所成的类。说f_0是Q_f中的一个极值映照，若对一切$g\epsilon Q_f$有

$$K[g]\geqslant K[f_0],$$

其中$k[g]$为g的极大特征。说f_0是Q_f中的唯一极值映照，若$k[g]=k[f_0]$，则$g\equiv f_0$。

设$B(\Omega)$是Ω上的可积函数类$L'(\Omega)$中的全纯函数全体所成的Banach空间，$\varphi\epsilon B(\Omega)$，其范数

$$\|\varphi\|=\iint_\Omega|\varphi(z)|dxIy<\infty.$$

对于$\varphi\epsilon B(\Omega)$，记

$$\delta\{\varphi\}=k\|\varphi\|-Re\iint_\Omega x(z)\varphi(z)dxdy.$$

1981年，Reich[1]证明了下面的

定理A 若存在函数列$\{\varphi_n\}\subset B(\Omega)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z)=\varphi_0(z),\quad a.e.\ z\epsilon\Omega \tag{2}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\delta\{\varphi_n\}=0, \tag{3}$$

本文1987年9月26日收到.

则f是Q_f中的唯一极值映照。

Reich在文〔2〕中进一步发现，在其它适当的附加条件下，式（3）可换成$\{\delta\{\varphi_n\}\}$有界这个较弱的假设，即成立下面的

定理B 若存在函数列$\{\varphi_n\}\subset B(\Omega)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z)=\varphi(z),\quad a.e.\ z\in\Omega,\qquad \varphi_0\in L'_{loc}(\Omega), \tag{4}$$

$$\delta\{\varphi_n\}\leqslant M,\qquad n=1,2,\cdots, \tag{5}$$

且

$$\lim_{A\to\infty}\iint_{\Omega(n,A)}|\varphi_n(z)|dxdy=0 \tag{6}$$

对n一致地成立，其中$L'_{loc}(\Omega)$是Ω上的局部可积函数类，$\Omega(n,A)=\{z\in\Omega:|\varphi_n(z)|>A|\varphi_0(z)|\}$，则$f$是$Q_f$中的唯一极值映照。

本文将证明，定理B中的条件（6）事实上可放宽成下面的更为自然的形式：

$$\lim_{A\to\infty}\iint_{\Omega(n,A)}[k|\varphi_n(z)|-\mathrm{Re}(x(z)\varphi_n(z))]dxdy=0 \tag{7}$$

对n一致地成立，其中$\Omega(n,A)$与定理B中的同。今把它叙述成下面的

定理 若存在函数列$\{\varphi_n\}\subset B(\Omega)$，满足条件（4）、（5）和（7），则$f$是$Q_f$中的唯一极值映照。

我们还将指出，出现在文〔2〕中的定理B的证明存在几处疏漏。而本文定理的证明已弥补了这些疏漏。

二、定理的证明

设$w=f(z)$是Ω上具复特征（1）的一个Teichmueller型映照，$\hat{x}(w)$是$f^{-1}(w)$的复特征，又设$g\in Q_f$，$K[g]\leqslant K[f]$，$x_1(w)$是$g^{-1}(w)$的复特征，引入记号α，μ，ρ如下：

$$\alpha(z)=\hat{x}(f(z)),\qquad \mu(z)=x_1(f(z)),\qquad \rho(z)=|\alpha(z)-\mu(z)|^2.$$

显见，$|x(z)|\equiv|\alpha(z)|\equiv k$，$|\mu(z)|\leqslant k$。

我们旨在证明$g=f$，或等价地$g^{-1}=f^{-1}$。为此只需证明$\alpha(z)\equiv\mu(z)$，$a.e.\ z\in\Omega$，或等价地

$$\rho(z)\equiv 0,\quad a.e.\ z\in\Omega. \tag{8}$$

定理的证明需要下面的

引理[2] 对定理中的每一个$\varphi_n\in B(\Omega)$，成立

$$\iint_\Omega\rho|\varphi_n|dxdy\leqslant C^{\frac{1}{2}}\iint_\Omega\rho^{\frac{1}{2}}|\varphi_n|^{\frac{1}{2}}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(x\varphi_n)]^{\frac{1}{2}}dxdy \tag{9}$$

特别是

$$\iint_\Omega\rho|\varphi_n|dxdy\leqslant c\delta\{\varphi_n\}, \tag{10}$$

其中$C=\dfrac{8k(1+k^2)^2}{(1+k)^2(1-k)^6}$。

沿用文〔2〕中的记号，设$\{\Omega_m\}$是Ω的一列测度有限的单调覆盖。对给定的m、n、A，

Ω 成

$$\Omega=\Omega'\cup\Omega''\cup\Omega''',$$

其中 $\Omega'=\Omega(n,A)=\{z\epsilon\Omega:|\varphi_n(z)|>A|\varphi_0(z)|\}$，$\Omega''=\{z\epsilon\Omega\backslash\Omega_m:|\varphi_n(z)|\leqslant A|\varphi_0(z)|\}$，$\Omega'''=\{z\epsilon\Omega_m:|\varphi_n(z)|\leqslant A|\varphi_0(z)|\}$。

对应此分解，记

$$I_n=\iint_{\Omega}\rho^{\frac{1}{2}}|\varphi_n|^{\frac{1}{2}}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(x\varphi_n)]^{\frac{1}{2}}dxdy=J_1+J_2+J_3. \tag{11}$$

由Schwarz不等式并注意到式（10）有

$$\begin{aligned}J_1^2&\leqslant\iint_{\Omega'}\rho|\varphi_n|dxdy\iint_{\Omega'}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(x\varphi_n)]dxdy\\&\leqslant\iint_{\Omega}\rho|\varphi_n|dxdy\iint_{\Omega'}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(x\varphi_n)]dxdy\\&\leqslant c\delta\{\varphi_n\}\iint_{\Omega(n,A)}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(x\varphi_n)]dxdy,\end{aligned}$$

条件（5）给出

$$J_1^2\leqslant cM\iint_{\Omega(n,A)}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(x\varphi_n)]dxdy.$$

对于J_2，有

$$\begin{aligned}J_2^2&\leqslant\iint_{\Omega''}\rho|\varphi_n|dxdy\iint_{\Omega''}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(x\varphi_n)]dxdy\\&\leqslant\delta\{\varphi_n\}\iint_{\Omega''}\rho|\varphi_n|dxdy\leqslant A\delta\{\varphi_n\}\iint_{\Omega''}\rho|\varphi_0|dxdy,\end{aligned}$$

条件（5）表明

$$J_2^2\leqslant AM\iint_{\Omega\backslash\Omega_m}\rho|\varphi_0|dxdy \tag{13}$$

对于J_3，类似地可得

$$J_3^2\leqslant CM\iint_{\Omega'''}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(x\varphi_n)]dxdy. \tag{14}$$

给定$\varepsilon>0$。

由式（12）和式（7），可选择A，使对一切 n 成立

$$J_1<\varepsilon/3.$$

据式（10）及Fatou引理，有

$$\iint_{\Omega}\rho|\varphi_0|dxdy\leqslant CM<\infty.$$

注意到$\iint_{\Omega_m}\rho|\varphi_0|dxdy$关于$m$是单调增加的，故式（13）表明，可选取$m$，使

$$J_2<\varepsilon/3$$

对一切 n 成立。

对上面选定的A和m，由条件（4）的第一部分得

$$\lim_{n\to\infty}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(x\varphi_n)]=k|\varphi_0|-\mathrm{Re}(x\varphi_0)=0,\quad a.e.\ z\in\Omega.$$

最后一个等式是因为

$$k|\varphi_0|-\mathrm{Re}(x\varphi_0)=\frac{1}{2k}|\varphi_0|\left|x-k\frac{\bar{\varphi}_0}{|\varphi_0|}\right|^2,\quad a.e.\ z\in\Omega.$$

再由条件（4）的第二部分知$\varphi_0\in L^1(\Omega'')$，而

$$k|\varphi_n(z)|-\mathrm{Re}(x(z)\varphi_n(z))\leqslant 2kA|\varphi_0(z)|,\quad z\in\Omega''',\quad n=1,2,\cdots.$$

Lebesgue控制收敛定理表明，当$n\to\infty$时，式（14）的右边有极限值0，故可选取N，使

$$J_3<\varepsilon/3,\qquad n\geqslant N.$$

于是，由式（11），我们证明了

$$\lim_{n\to\infty}I_n=0.$$

从而，据式（9）得

$$\lim_{n\to\infty}\iint_\Omega\rho|\varphi_n|\,dxdy=0.$$

应用Fatou引理便有

$$\iint_\Omega\rho|\varphi_0|\,dxdy=0.$$

因为$\varphi_0(z)\neq0$，$a.\ e.\ z\in\Omega$，故式（8）成立。定理证毕。

三、一 点 注 记

在定理B的证明中，文〔2〕有几处疏漏。

其一：文〔2〕$p.294$式（3.7）

$$J_2^2\leqslant\delta\{\varphi_n\}\iint_{\Omega\setminus\Omega m}\rho|\varphi_n|dxdy\leqslant AM\iint_{\Omega\setminus\Omega m}\rho|\varphi_0|dxdy$$

中的第二个不等式不能成立，因为

$$\Omega''\subset\Omega\setminus\Omega_m,$$

所以．一般地未必有

$$|\varphi_n(z)|\leqslant A|\varphi_0(z)|,\qquad z\in\Omega\setminus\Omega_m.$$

其二：文[2]$p.294$最后一式，即对于$z\in\Omega''$，

$$k|\varphi_n(z)|-\mathrm{Re}[x(z)\varphi_n(z)]=\min\{k|\varphi_n(z)|-\mathrm{Re}[x(z)\varphi_n(z)],\ kA|\varphi_0(z)|\}$$

明显是错误的，因为通常只有

$$k|\varphi_n(z)|-\mathrm{Re}[x(z)\varphi_n(z)]\leqslant 2kA|\varphi_0(z)|,\quad z\in\Omega'''.$$

上述错误被Reich引入到文〔2〕$p.295$式（3.8）关于J_3^2的估计中：

$$J_3^2\leqslant\iint_{\Omega'''}\rho|\varphi_n|dxdy\iint_{\Omega''}[k|\varphi_n|-\mathrm{Re}(x\varphi_n)]dxdy$$

$$\leqslant CM \iint_{\Omega_m} \min\{k|\varphi_n| - \mathrm{Re}(x\varphi_n),\ kA|\varphi_0|\}\, dxdy,$$

同时又包含了一个漏洞，即上式最后一个积分的积分区域由Ω'''扩大到Ω_m后，将导致下文无法应用Lebesgue收敛定理。因为在Ω_m上，定理B给出的条件并不足以保证函数列

$$k|\varphi_n(z)| - \mathrm{Re}[x(z)\varphi_n(z)], \qquad n = 1, 2, \cdots$$

为$L^1(\Omega_m)$中的某个函数所控。

以上这些疏漏所幸均可通过对原证略加修改（本文定理的证明即提供了这样的修改）而避免，不致影响到结果的正确性。

参　考　文　献

[1] Reich, E., A Criterion for Unique Extremality of Teichmueller Mappings, Indian Univ. Math. J., 30(1981), 441—447.

[2] Reich, E., On Criteria for Unique Extremality of Teichmueller Mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math., 6(1981), 289—301.

Improvement of a Theorem by Reich

Liu Zengrong

Abstract

The author improves a theorem by Reich on the criterion of unique extremality of Teichmueller mappings. He also notices a few slips in the proof of Theoem B in [2] and makes up for them.