

二维肋片传热的有限元分析

杨翔翔 翁荣周

(化工与生化工程系)

摘 要

本文应用有限元素法求解二维肋片传热问题,为了进行比较,又应用解析法求解一维肋片传热问题,分别得到了沿肋片长度方向上的温度分布曲线,最后将这两种传热模型的结果进行了分析比较,从而得出一维和二维肋片传热模型的适用条件。

一、前 言

在工程技术中,肋片传热得到广泛的应用。在机械、化工、电子、动力和航天工程等领域里,各种类型肋片的应用实例似乎处处可见。因此,肋片传热的研究,从来都是受到重视的。

但是,由于肋片的几何形状及其排列方式具有多样性,如果再考虑热特性参数可变的情况,使肋片传热的控制微分方程式具有强烈的非线性,这将给求解问题带来极大的困难。为了简化研究,通常假设肋片为薄壁系统,作为一维的模型来研究^[1-5]。但是,随着科学技术的发展和对传热设备设计要求的提高,往往出现这样的情况,在某种条件下如果肋片仍然按照一维模型来计算将会产生较大的误差,文献^[6]提出了当毕奥数 $Bi < 0.1$ 时,可作为一维肋片传热模型的判别条件,但是该文仅研究等截面肋片且端部边界为已知温度的第一类边界条件的情况,对于变截面以及其它端部边界条件的情况,还有待作进一步的研究。本文应用有限元素法求解了二维变截面肋片的传热问题,该方法是一个普遍适用的方法。同时为了进行比较,又应用解析法求解了一维肋片传热模型,最后将这两种结果进行了分析比较,从而得出作为判别一维传热模型的条件。这些结果,对于肋片的研究和设计都具有重要的实用意义。

二、二维肋片传热的有限元解

1. 有限元出发方程

首先研究任意截面形状的肋片,当肋片材料为各向同性和无内热源的情况下,其二维稳

本文1988年2月16日收到。

定温度场满足如下导热微分方程

$$\nabla^2 T = 0 \quad (1)$$

根据多数肋片的工作情况,可考虑下列三种边界条件

(1) 在 Γ_1 上已知边界温度

$$T|_{\Gamma_1} = T_w \quad (2)$$

(2) 在 Γ_2 上具有绝热壁条件

$$K \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0 \quad (3)$$

(3) 在 Γ_3 上已知换热条件

$$-K \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = h(T - T_\infty) \quad (4)$$

上面各式中, T 表示肋片的温度, T_w 是边界 Γ_1 上的已知温度, T_∞ 是肋片周围的环境温度, K 是肋片材料的导热系数, h 是周围介质对肋片的换热系数, n 是肋片边界面上的外法线。

除了一些简单的肋片外,对于大多数肋片,解析求解式(1)~(4)是相当困难的,为此,我们应用有限元素法来求解。

如果在 Γ_1 上令 h 很大(本文取 $h = 10^8 \text{ W/m}^2\text{K}$),且 $T_\infty = T_w$,那么 Γ_1 上的第一类边界条件可以转变为第三类边界条件来求解。这样,根据 Galerkin 方法推导的与式(1)~(4)等价的有限元出发方程是

$$\iint_{\Omega} K \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \delta T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \delta T}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma} h T \delta T dS = \int_{\Gamma} h T_\infty \delta T dS \quad (5)$$

2. 空间的离散化与温度的插值函数

兹将空间 Ω 离散化为 NE 个三角形、 JD 个结点和 Nl 个边界线元,并令任意一个三角形单元内的温度,用三角形三顶点 (i, j, k) 的线性函数来表示,则

$$T^{(i)} = [P]^T [R]^{(i)} [T]^{(i)} \quad (6)$$

$$\delta T^{(i)} = [P]^T [R]^{(i)} \delta [T]^{(i)} \quad (7)$$

式中

$$[P]^T = [1 \ x \ y] \quad (8)$$

$$[T]^{(i)} = [T_i, T_j, T_k]^T \quad (9)$$

$$[R]^{(i)} = [P]^{(i)-1} = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix} \quad (10)$$

现将式(6)、(7)代入式(5)的各项,分别得到

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} K \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \delta T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \delta T}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \sum_{i=1}^{NE} \iint_{\Omega} K \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \delta T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \delta T}{\partial y} \right) dx dy = \delta [T]^T [K] [T] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\iint_{\Gamma} h T \delta T dS = \sum_{i=1}^{Nl} \int_{\Gamma_i} h T \delta T dS = \delta [T]^T [H] [T] \quad (12)$$

$$\int_{\Gamma} h T_{\infty} \delta T dS = \sum_{i=1}^{Nl} \int_i h T_{\infty} \delta T dS = \delta [T]^T [h] \quad (13)$$

将式(11)一(13)代入式(5),最后得到

$$\{[K] + [H]\} \cdot [T] = [h] \quad (14)$$

式中

$$[K] = \sum_{i=1}^{NE} [D]^{(i)} [R]^{(i)T} A \cdot K \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [R]^{(i)} [D]^{(i)T}$$

$$[H] = \sum_{i=1}^{Nl} [D_1]^{(i)} h \frac{S_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} [D_1]^{(i)T}$$

$$[h] = \sum_{i=1}^{Nl} [D_1]^{(i)} h T_{\infty} [R_1]^{(i)T} S_i \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{S_i}{2} \end{bmatrix}$$

$[T]$ 为待求的温度列向量。

而 $[D]^{(i)}$, $[D_1]^{(i)}$ 为Boolean矩阵, $[D]^{(i)}$ 是一个 $NE \times 3$ 的矩阵,当 $[i]$ 元中结点编号与全域编号相同时,其分量为1;否则,其分量为零。 $[D_1]^{(i)}$ 是一 $NE \times 2$ 的矩阵,其分量的规定与 $[D]^{(i)}$ 相同。

为了求解代数方程组式(14),本文采用FORTRAN语言编制了计算机程序,因限于篇幅,此处从略。

三、一维肋片传热的理论解析解

为了比较二维肋片传热与一维肋片传热的差别,我们以变截面的梯形直肋为例,假设稳

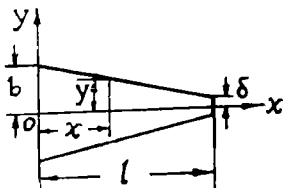


图 1

态传热,常物性,忽略辐射换热的影响,肋片中温度只随肋高变化,肋尖按绝热条件处理。现推导一维肋片传热的理论解析解。肋片的几何尺寸如图1所示,此时肋片传热的控制微分方程式是

$$y \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \frac{dT}{dx} - \frac{h(T - T_{\infty})}{K \cos \alpha} = 0 \quad (15a)$$

边界条件为

$$x = 0, \quad T = T_w \quad (15b)$$

$$x = l, \quad \frac{dT}{dx} = 0 \quad (15c)$$

当肋片的 $b \ll l$ 时,可近似取 $\cos \alpha = 1$,对梯形截面肋片而言, $y = \delta + (l - x) \frac{(b - \delta)}{l}$,

引入下列两个无因次变数

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}}$$

和

$$R = \frac{l-x}{l}$$

再引入下列几个无因次量

$$a = \frac{\delta}{b-\delta}$$

$$R_1 = \frac{b-\delta}{l}$$

和

$$B_1 = \frac{h(b-\delta)}{K}$$

将上述各量代入式(15a)并稍加整理后可得无因次控制微分方程

$$(a+R) \frac{d^2\theta}{dR^2} + \frac{d\theta}{dR} - \frac{B_1}{R_1^2} \theta = 0 \quad (16a)$$

无因次边界条件为

$$R=1, \quad \theta=1 \quad (16b)$$

$$R=0, \quad \frac{d\theta}{dR} = 0 \quad (16c)$$

如果再令 $a+R=X$, 那末式(16a)可转变为修正的Bessel方程

$$X^2 \frac{d^2\theta}{dX^2} + X \frac{d\theta}{dX} - N^2 X \theta = 0 \quad (17a)$$

边界条件为

$$X=a+1, \quad \theta=1 \quad (17b)$$

$$X=a, \quad \frac{d\theta}{dx} = 0 \quad (17c)$$

式(17a)的解是

$$\theta = \frac{I_1(\sqrt{ma})K_0(\sqrt{mx}) + K_1(\sqrt{ma})I_0(\sqrt{mx})}{I_1(\sqrt{ma})K_0(\sqrt{m(a+1)}) + I_0(\sqrt{m(a+1)})K_1(\sqrt{ma})} \quad (18)$$

式中, $m=4B_1/R_1^2$, I_0 、 K_0 分别为第一类和第二类零阶修正的Bessel函数, I_1 、 K_1 分别为第一类和第二类一阶修正的Bessel函数。

四、结 论

本文对变截面的梯形直肋, 端部为绝热壁条件, 在各种不同几何尺寸和各种不同热物性参数条件下的传热问题进行了数值分析。

图2(a)~(d)画出了肋片的几何尺寸 $L=\delta/l$ 为某一定值时不同毕奥数 $B_1=h\delta/K$ 下, 肋片温度沿肋高的分布曲线, 图中实线代表二维肋片传热模型, 虚线代表一维肋片传热模型。

从这些图中可以明显看出, 随着 B_1 数的不

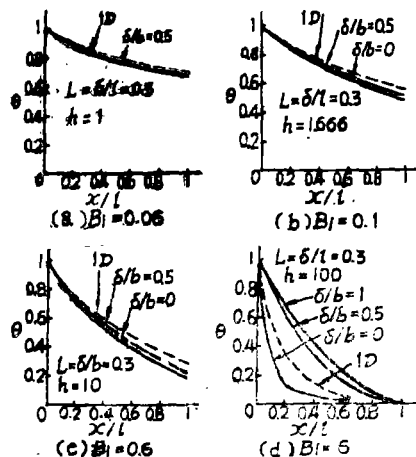


图 2

同,二维与一维肋片传热模型的差别也不一样。当 $B_i < 0.1$ 时,两者的差别并不大,但随着 B_i 数的增大,两者的差别便随之增大,当 $B_i = 6$ 时,两者的相对误差竟高达50%。这就表明,在绝热壁条件下, B_i 数可以作为一维肋片与二维肋片传热模型的判别准则。当 $B_i < 0.1$ 时,肋片可按一维模型来计算;而当 $B_i > 0.1$ 时,为避免产生太大的误差,应采用二维模型计算为宜。

参 考 文 献

- [1] 杨翔翔,热特性参数可变时变截面环肋的传热研究,华侨大学学报(自然科学版),7, 3 (1985)。
- [2] Maday, C.J., The Minmum Weight One-Dimensional Straight Cooling Fin, *ASME Journal of Engineering for Industry*, **96**, 1 (1974), 161—165.
- [3] Razelos, P. and Imre, K., The Optimum Dimensions of Circular Fins With Variable Thermal Parameters, *ASME Journal of Heat Transfer*, **102**, 3 (1980), 420—425.
- [4] 杨翔翔,热特性参数可变时双曲线型截面环肋传热的最优尺寸,工程热物理学报,9,1 (1988)。
- [5] Masliyah, J.H. and Nandkumar, K., Heat Transfer in Internally Finned, *ASME Journal of Heat Transfer*, **95**, 2 (1973)。
- [6] Adams, J.A. and Rogers, D.F., *Computer-Aided Heat Transfer Analysis*, McGraw-Hill, New York, (1973)。

Two-dimensional Heat Transfer in a Fin as Observed by Finite Element Analysis

Yang Xiangxiang Weng Rongzhou

Abstract

In this paper, the problem of two-dimensional heat transfer in a fin is solved by finite element method, while that of one-dimensional heat transfer is solved by analytical method for the sake of contrast; their lengthwise heat distribution curves are obtained respectively.

By comparing the results from one-dimensional and two-dimensional heat transfer in the fin, the conditions suitable for the both models of heat transfer are pointed out.