

刚性回转件平衡分析的数学模型及通用程序

陈元霖

(精密机械工程系)

摘 要

本文对刚性转子平衡进行分析,根据力的平衡条件,不用传统的方法而用复数法来建立计算回转件平衡重的数学模型;对各种类型回转件的平衡编写出计算源程序,按给定条件进行赋值,用微机进行分析计算,快速而准确地求得回转件不平衡时在任意选定的平衡面内应加的平衡重径积的大小和方位.适用于对各种做回转运动的机械部件的平衡计算,可在生产部门中推广应用.

一、引 言

在机械传动中,尤其在高速转动时,回转件是比较常用的构件.回转件要是结构形状不对称,或制造及安装有误差,都会使它的质量分布不均匀,使中心惯性主轴与回转轴线不重合.这样,回转件产生的惯性力系就不平衡,离心惯性力的方向就会随转子运动作周期的变化.离心惯性力是跟回转速度平方成正比的,惯性力则会在运动副中引起动压力,从而产生附加摩擦力和附加应力,加快运动副的摩擦损失,降低机构构件的强度和机械效率,导致运转过程产生周期性振动和噪音,影响机械的工作精度和可靠性.所以,回转件惯性力的平衡是提高产品质量、改善工作环境和保证机器正常运转的关键措施.

设 n 为回转件的工作转速, n_{c1} 为其一阶临界转速;当 $n \leq 0.7 n_{c1}$ 时,转子的变形可略而不计,这种转子称为刚性转子.

动平衡可用工业动平衡机进行直接测量.但动平衡量的重径积的大小、方位都得用人工进行计算,十分烦琐.尤其是当测量面与平衡面不重合时,情况更为复杂.由于计算时间较长,不免影响生产的周期.本文针对这个问题,对刚性转子的动平衡进行分析计算.

已知转子各不平衡重分布情况,根据力学平衡条件,用复数法进行分析,直接建立平衡时的平衡重计算数学模型,同时针对各种类型的回转件的平衡条件求出平衡重计算数学模型,确定回转不平衡时在任意选定的平衡面内应加的平衡重径积的大小和方位.所以,本文提供动平衡重径积的大小、方位计算数学模型对各种形状的转子的动平衡计算都能适用,而且对单面的或双面的平衡都具有通用性.根据数学模型编写源程序可在 IBM-PC 上进行直接快速的分析计算.

本文1987年6月14日收到.

二、刚性回转件平衡的基本原理及其数学模型

1. 质量分布在同一回转面的回转件平衡

当回转件的轴向宽度很小, 如砂轮、飞轮等 (一般 $n = 1000 \text{ r/min}$, 转子长度 L 与其外径 D 比值 $L/D \leq 1/5$ 时) 可认定回转件的质量分布在同一回转面内, 这时产生的惯性力系为平面汇交力系, 所以, 若不平衡时可在同一回转面加上平衡重给予平衡, 这种平衡叫做单面平衡。

图 1 所示, 设已知转子在回转面有 i 个不平衡质量, 其重量、向径、方位角分别为 $G_1, G_2, \dots, G_i; r_1, r_2, \dots, r_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i$ 。以回转面与回转轴线交点为原点, 回转面作为复数坐标面, 方位角为幅角, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i$ 大小从实数轴正方向沿逆时针方向计量为正, 顺时针为负。回转角速度 $\omega = \pi n / 30$, n 为每分钟转速。不平衡质量和平衡质量产生的惯性力分别为 $\vec{P}_i = (G_i/g) \vec{r}_i \omega^2$, $\vec{P}_b = (G_b/g) \vec{r}_b \omega^2$, 它们在回转面内组成汇交力系, 其平衡条件为: $\sum \vec{P}_i + \vec{P}_b = 0$, 即 $(G_i/g) \vec{r}_i \omega^2 + (G_b/g) \vec{r}_b \omega^2 = 0$, 又 $\omega_i \neq 0, g \neq 0$, 所以

$$\sum G_i \vec{r}_i + G_b \vec{r}_b = 0 \quad (1)$$

$G \vec{r}$ 为重径积, 它是矢量, 相对地表示各质量在同一转速下离心力的大小和方向。

式 (1) 以复数指数形式表示:

$$\sum G_i r_i e^{j\theta_i} + G_b r_b e^{j\theta_b} = 0 \quad (2)$$

取式 (2) 实数部分 $x_{Gb} r_b = G_b r_b \cos \theta_b = -\sum G_i r_i \cos \theta_i$; 取式 (2) 虚数部分 $y_{Gb} r_b = G_b r_b \sin \theta_b = -\sum G_i r_i \sin \theta_i$, 所以平衡质量的重径积

$$G_b r_b = \sqrt{X^2_{Gb} r_b + Y^2_{Gb} r_b} \quad (3)$$

$G_b \vec{r}_b$ 的方位角

$$\tan \theta_b = \frac{Y_{Gb} r_b}{X_{Gb} r_b}, \quad \theta_b = \tan^{-1} \frac{Y_{Gb} r_b}{X_{Gb} r_b} \quad (4)$$

当求得平衡质量重径积 $G_b r_b$ 后, 就可根据回转件结构的特点选定向径 r_b , 求出平衡质量的重量大小 $G_b = (G_b r_b / r_b) N$ 。有时当所在需要平衡的回转面 T_b 内, 由于实际结构不容许安装平衡重 G_b , 而是在另外选定的两个转面 T_1, T_2 内分别安装平衡重 G_b' 和 G_b'' , 使回转件达到平衡。这时 $G_b \vec{r}_b, G_b' \vec{r}_b'$ 和 $G_b'' \vec{r}_b''$ 必须在过 $G_b \vec{r}_b$ 的轴面内, l_0 为两平衡面 T_1, T_2 间距, l_1, l_2 为 T_1, T_2 平衡面与 T_b 间距, r_b, r_b', r_b'' 分别为平衡量 G_b, G_b', G_b'' 的向径。

平衡面 $T_1 T_2$ 选择可归纳为三种情况:

(1) $TYP = 1: T_1, T_2$ 分别在 T_b 两边。据平行力分解原理, 其等效条件如图 2 所示。

$$P_b = P_b' + P_b'', \quad P_b \cdot C = l_1 P_b' - l_2 P_b''$$

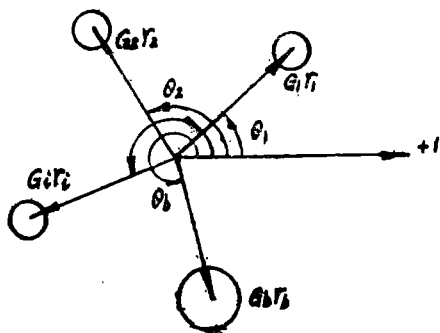


图 1

以相应重径积代入

$$G_b r_b = G_b' r_b' + G_b'' r_b'', \quad 0 = l_1 G_b' r_b' - (l_0 - l_1) G_b'' r_b''.$$

联立求解: $G_b' r_b' = (l_0 - l_1/l_0) G_b r_b$; $\theta_b' = \theta_b$; $G_b' \vec{r}_b'$ 与 $G_b \vec{r}_b$ 同方向. $G_b'' r_b'' = (l_1/l_0) G_b r_b$; $\theta_b'' = \theta_b$; $G_b'' \vec{r}_b''$ 与 $G_b \vec{r}_b$ 同方向.

(2) $TYP = 2$: 两平衡面 T_1 、 T_2 均在 T_b 右边, 如图 3 所示. 同上, 根据平衡力分解条件 (设 $G_b' r_b'$, $G_b'' r_b''$ 均在下方)

$$P_b = P_b' + P_b'', \quad P_b O = -l_1 P_b' - (k_1 + k_0) P_b''.$$

以重径积值表示, 并联立求得: $G_b' r_b' = [(l_0 + l_1)/l_0] G_b r_b$; $\theta_b' = \theta_b$; $G_b' \vec{r}_b'$ 与 $G_b \vec{r}_b$ 同方向. $G_b'' r_b'' = (l_1/l_0) G_b r_b$; $\theta_b'' = \pi + \theta_b$; $G_b'' \vec{r}_b''$ 与 $G_b \vec{r}_b$ 反方向.

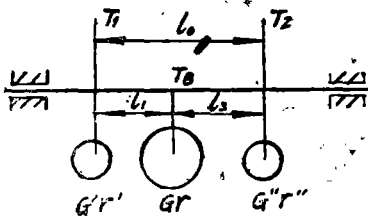


图 2

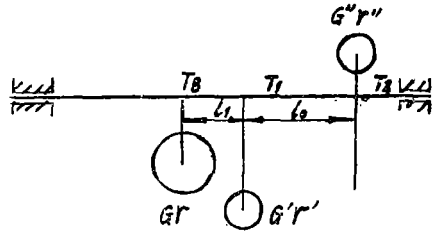


图 3

(3) $TYP = 3$: T_1 , T_2 均在 T_b 左边, 如图 4 所示.

同上, 根据平衡力分解条件 (设 $G_b' r_b'$, $G_b'' r_b''$ 均在下方)

$$P_b = P_b' + P_b'',$$

$$P_b Q = + (l_0 + l_2) P_b' + l_2 P_b''.$$

以重径积值表示, 并联立求得: $G_b' r_b' = (l_1/l_0)$

$\cdot G_b r_b$; $\theta_b'' = \pi + \theta_b$; $G_b' \vec{r}_b'$ 与 $G_b \vec{r}_b$ 反方向.

$G_b'' r_b'' = (l_0 + l_2/l_0) G_b r_b$; $\theta_b'' = \theta_b$; $G_b'' \vec{r}_b''$ 与 $G_b \vec{r}_b$ 同方向.

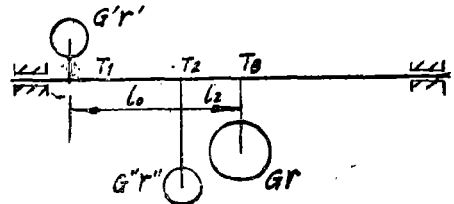


图 4

2. 质量分布不在同一回转面内的回转件平衡

当回转件轴向宽度较大时, 如电机转子 (一般在 $n = 1000 \text{ r/min}$, 转子的轴向宽度 L 与外径的比值 $(L/D) > (1/5)$ 时), 质量分布不能近似认为是位于同一回转面内, 这时运动所产生的惯性力系为空间力系, 其平衡条件是力系主向量 $\vec{P} = \sum \vec{P}_i = 0$ 和主矩 $M = \sum M(P_i) = 0$, 一般工程上是将空间力系的每个惯性力 \vec{P}_i 分别向任意选定的两个平衡面 T_1 , T_2 分解为相应两分力 \vec{P}_i' , \vec{P}_i'' , 将空间力系 $\sum \vec{P}_i$ 分解为两个力系 $\sum \vec{P}_i'$, $\sum \vec{P}_i''$ 分别作用在平衡面 T_1 、 T_2 内, 然后用上述质量分析在同一回转面内的平衡方法进行平衡. 具体步骤: (1) $\sum \vec{P}_i$ 分解为两个等效的平面汇交力系 $\sum \vec{P}_i'$, $\sum \vec{P}_i''$; (2) 分别在平衡面 T_1 , T_2 内加平衡重给予平衡, 由平衡条件: $\sum G_i' \vec{r}_i' + G_b' \vec{r}_b' = 0$, $\sum G_i'' \vec{r}_i'' + G_b'' \vec{r}_b'' = 0$, 求得 $G_b' \vec{r}_b'$ 和 $G_b'' \vec{r}_b''$ 大小和方位, 这种平衡叫双面平衡.

三、回转件平衡分析计算举例

1. 已知同一回转面内的不平衡质量的重量、向径、方位角分别为 $I = 3$, $r_b = 0.1\text{m}$ (I 为不平衡重个数; r_b 为平衡重向径), 如图 5 所示. $G_1 = 20\text{N}$, $r_1 = 0.16\text{m}$, $\theta_1 = 60^\circ$ (不平衡重 G_1 : 大小, 向径, 方位角); $G_2 = 100\text{N}$, $r_2 = 0.12\text{m}$, $\theta_2 = 90^\circ$ (不平衡重 G_2 : 大小, 向径, 方位角); $G_3 = 20\text{N}$, $r_3 = 0.12\text{m}$, $\theta_3 = 150^\circ$, (不平衡重 G_3 : 大小, 向径, 方位角).

求 G_b 平衡重.

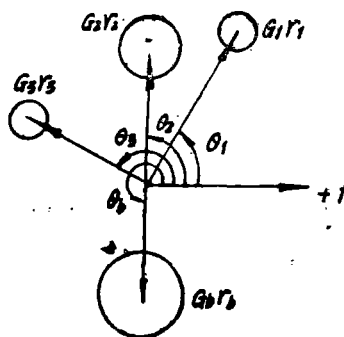


图 5

其电算结果为

TX=1; PROGRAM NAME B1-1987.4.15.CHEN YUANLIN

I, LO, RB=3, 0, 100

TYP=0 L=0 G=20, R=160, T=60

TYP=0 L=0 G=100, R=120, T=90

TYP=0 L=0 G=20, R=120, T=150

TB = -88.28405 DEG

GB = 159.7845 N

ONE PLANT OF COMPENSATION BALANCE

GB = 159.7845 N

OK

TX=2, TYP=1; TWO PLANT OF COMPENSATION BALANCE

L0, L, TYP=100, 10, 1

LG = 143.8066 N; LTB = -88.28405 DEG

RG = 15.97845 N; RTB = -88.28405 DEG

OK

TX=2, TYP=2; TWO PLANT OF COMPENSATION BALANCE

L0, L, TYP=100, 10, 2

LG = 175.7629 N; LTB = -88.28405 DEG

RG = 15.97845 N; RTB = 91.715981 DEG

TX=2, TYP=3; TWO PLANT OF COMPENSATION BALANCE

L0, L, TYP=7 100, 10, 3

LG = 15.97845 N; LTB = 91.715981 DEG

RG = 175.7629 N; RTB = -88.28405 DEG

OK

2. 已知转子不平衡重, 如图 6 所示: 不平衡重个数 $I = 2$. $G_1 r_1 = 0.01\text{N}\cdot\text{m}$, $\theta_1 = 0^\circ$, $G_1 r_1$ 与 T_1 间矩: $l_1 = 1\text{m}$, $G_2 r_2 = 0.012\text{N}\cdot\text{m}$, $\theta_2 = 90^\circ$, $G_2 r_2$ 与 T_1 间矩: $l_2 = 0.3\text{m}$, 求 $G_b' r_b'$ 和 $G_b'' r_b''$ 的值.

其电算结果为

TX=2: PROGRAM NAME B2-1987.4.15.CHEN YUANLIN

I, LO, RB=2, 1000, 1

TYP=1, L=1000, G=10, R=1, T=0

TYP=1, L=300, G=12, R=1, T=90

• • •

TWO PLANT BALANCE ANALYSIS OF DIGID ROTOR

• • •

LTB=-89.99999 DEG;

LGRB=0.908399999 N·m

RTB=199.7989 DEG;

RGRB=0.01062326 N·m

OK

3. 已知: 不平衡重 $G_1 = G_2 = G_3 = 4\text{ N}$, 不平衡重的个数 $I = 3$; 向径 $r_1 = r_2 = r_3 = 0.0127\text{ m}$, 方位角 $\theta_1 = 270^\circ$, $\theta_2 = 150^\circ$, $\theta_3 = 30^\circ$; 与 T_1 间距分别为 $l_1 = 0.04$, 0.115 , 0.19 m ; T_1 、 T_2 间距 $l_3 = 0.23\text{ m}$, 如图 7 所示. 求: G_b' 和 T_b'' 的值 ($r_b' = r_b'' = 0.01\text{ m}$).

电算结果为

TX=2: PROGRAM NAME B4-1987.4.15.CHAN YUNLIN

N, LO, RB=3, 230, 1

TYP=1, L=40, G=4, R=12.7, T=270

TYP=1, L=115, G=4, R=12.7, T=150

TYP=1, L=190, G=4, R=12.7, T=30

• • •

TWO PLANT BALANCE ANALYSIS OF DIGID ROTOR

• • •

LTB=60.00003 DEG;

LGRB=0.02869179 N·m

RTB=240 DEG;

RGRB=0.0286913 N·m

OK

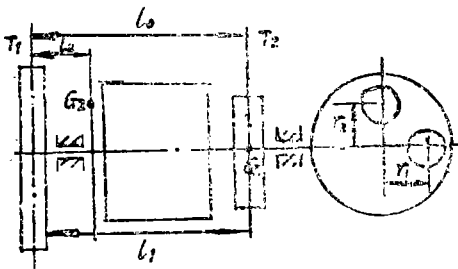


图 6

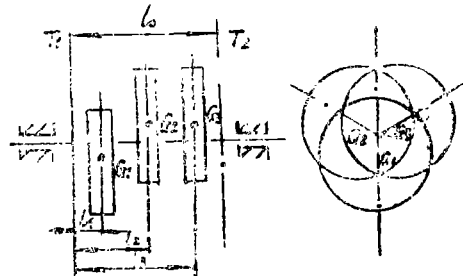


图 7

四、源程序框图和变量说明

1. 源程序框图 如图8所示。

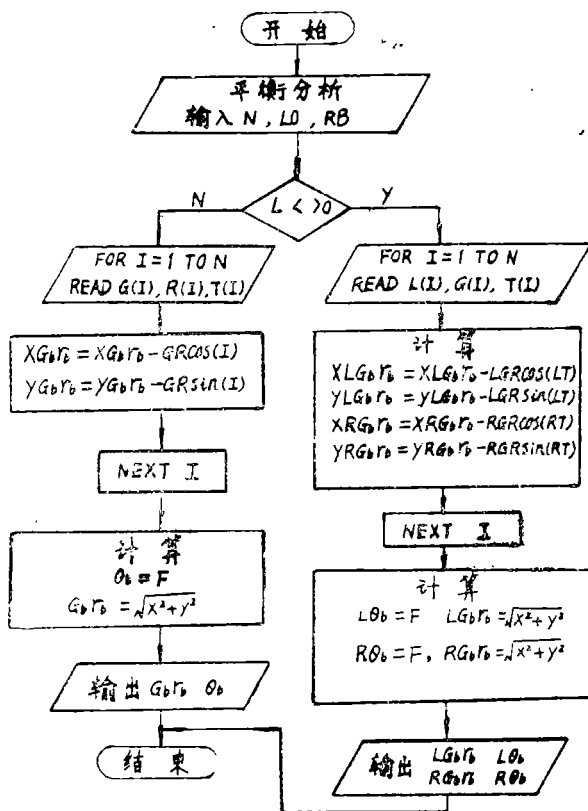


图 8

2. 变量说明 I 为不平衡质量数目, T_1 、 T_2 为左右平衡面, 其距 $l_0 = L_0$, 不平衡重 G_i 所在回转面 T_i 与 T_b 间距 $l_i = l(1)$, $G_i = G(1)$, $r_i = r(1)$, $\theta_i = T(1)$ 为不平衡质量的重量、向径、方位角。 $G_b = GB$, $r_b = RB$, $\theta_b = TB$ 为平衡重的重量、向径、方位角。 $G_i r_i = GR$, $G_b r_b = GRB$ 为不平衡质量、平衡质量的重径积。 $G' = LG$, $G' r' = LGR$, $G'_b = LGF$, $G'_b r'_b = LGRB$, $\theta'_i = LT$, $\theta'_b = LTB$ 为左面参量。 $G'' = RG$, $G'' r'' = RGR$, $G''_b = RGB$, $G''_b r''_b = RGRB$, $\theta''_i = RT$, $\theta''_b = RTB$ 为右面参量。中间变量: x 为实部参量, y 为虚部参量。

$x_{GbRb} = G_b r_b \cos \theta_b = GRBx$ 为平衡重径积的实数部分; $y_{GbRb} = G_b r_b \sin \theta_b = GRBy$ 为平衡重径积的虚数部分。 $x_{G'_b r'_b} = G'_b r'_b \cos \theta'_b = LGRBx$ 为 x_{GbRb} 在左平衡面 T_1 的分量; $x_{G''_b r''_b} = G''_b r''_b \cos \theta''_b = LGRBx$ 为 x_{GbRb} 在右平衡面 T_1 的分量; $y_{G'_b r'_b} = G'_b r'_b \sin \theta'_b = LGPBy$ 为 y_{GbRb} 在左平衡面 T_1 的分量; $y_{G''_b r''_b} = G''_b r''_b \sin \theta''_b = RGRBy$ 为 y_{GbRb} 在右平衡面 T_2 的分量。 $l_i = L(1)$ 为 $G_i r_i$ 与 T_1 间距。 $r_i = 1$; $G_i r_i / 1 = G_i r_i$, $r_i \neq 1$; $G_i r_i / r_i = G_i = G_i$; $MGR_{max} = MGR$, $\theta_{max} =$

$MT; GR_{min} = NGP, \theta_{min} = NT.$

3. 源程序(略).

参 考 文 献

- 〔1〕 天津大学等六校编著, 机械原理, 人民教育出版社, (1979).
- 〔2〕 谭浩强, 田淑清, 谢锡迎编著, BASIC语言, 科学普及出版社, (1984).

Mathematical Model for Balance Analysis of Rigid Rotators and Its General Program

Chen Yuanlin

Abstract

This paper deals with balance analysis of rigid rotators. Based on balance condition of forces and for calculating the balancing weights, it establishes a mathematical model by means of complex number method instead of traditional force-polygon method. Based on the balance condition of various kinds of rotating parts, it works out source programs and gives assignments to the parameters according to given conditions.

To carry out analysis calculation on a microcomputer, it obtains the magnitude and position of balancing weights needed for an unbalanced rotating part in arbitrary balance surface rapidly and precisely.

This is a study applicable for balance calculation of various kinds of mechanical part in rotation, it will find its application in the manufacture.