

一类退缩反应扩散方程解的  
有界性与衰减估计\*

梁学信 吴在德

(华侨大学) (天津大学)

## 摘 要

本文讨论始边值问题(1)~(3), 在一般条件下, 证明解一致有界, 并得出衰减估计.

## 一、引 言

对方程

$$u_t - \Delta(\phi(u)) = f(u), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T)$$

的始边值问题, 文[1]指出, 如果 $f(u)$ 关于 $u$ 的增长阶大于 $\phi(u)$ 的增长阶, 且初值适当大时, 解将在有限时间内发生blow-up. 而当 $\phi(u) = f(u)$ , 且 $\Omega$ 的测度 $|\Omega|$ 充分小时, 解在 $Q_T = \Omega \times (0, T)$ 有界, 其 $L^\infty(Q_T)$ 范数依赖于 $T$ . 文[2]也进行讨论, 当 $f(u)$ 关于 $u$ 的增长阶大于 $\phi(u)$ 的增长阶时, 不少作者对小初值, 且右端项仅含 $u$ 或已知函数的情况进行研究. 例如 Nakao<sup>[3]</sup>在 $\phi(u) = |u|^m u (m > 0)$ 时, 证明对小初值即使右端项 $f(x, u)$ 关于 $u$ 的增长阶大于 $m+1$ , 解对 $t \geq 0$ 都一致有界, 且存在 $C > 0$ , 使 $\|u(t)\|_\infty \leq C(1+t)^{-1/m}$ . 然而对大初值及 $f$ 还含有未知函数的导数 $u_x$ 时, 情况比较复杂. 现在考虑始边值问题

$$u_t - \Delta(|u|^m u) = g(t)f(x, t, u, u_x) \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \quad (3)$$

其中 $\Omega$ 是 $R^n$ 中的有界域,  $\partial\Omega$ 为其充分光滑的边界,  $m > 0$ 是常数,  $(x, t, u, u_x)$ 在 $\Omega \times R^+ \times R^1 \times R^n$ 连续.

我们将在较为广泛的条件下, 证明解的一致有界性, 并得出某些限制下的衰减估计.

## 二、引 理

引理1<sup>[4]</sup> 设 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , 那么 $u \in L^{np/(n-p)}(\Omega)$ , 且存在常数 $C(n, p)$ , 使

$$\|u\|_{np/(n-p)} \leq C \|\nabla u\|_p, \quad 1 < p < n$$

本文1987年7月30日收到.

\*中国科学院与福建省科学基金资助课题.

为简单起见, 下面都设  $n > 2$ .

**引理2** 记  $U_r = \max(1, \|u_0\|_\infty, \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_r)$ , 如果对任意  $r > d$ ,  $u(x, t)$  满足不等式

$$U_{2r-d} \leq (Cr^\theta)^{1/r} U_r^{1+\sigma(r)} \quad (4)$$

其中  $C > 0$ ,  $d > 0$ ,  $\theta \geq 0$  是常数, 且  $r$  取  $r_v = 2^v r - (2^v - 1)d$  时,  $\sum_{v=0}^{\infty} \sigma(r_v)$  收敛, 那么

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_\infty \leq C^\theta k(r) U_r^2 \quad (5)$$

$\delta > 0$ ,  $\rho > 0$  是与  $u$  无关的常数, 它们与  $k(r)$  将在证明中给出.

**证** 取  $r$  为  $r_v = 2^v r - (2^v - 1)d$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$ , 那么由式 (4) 作迭代得

$$U_{r_{v+1}} \leq C^{\delta v} K_v(r) U_r^2 \quad (6)$$

其中

$$\rho_v = (1 + \sigma(r))(1 + \sigma(r_1)) \cdots (1 + \sigma(r_v))$$

因为

$$\ln \rho_v = \sum_{i=0}^v \ln(1 + \sigma(r_i)) < \sum_{i=0}^v \sigma(r_i)$$

所以  $v \rightarrow \infty$  时,  $\ln \rho_v$  收敛, 从而  $\rho_v$  收敛, 设  $\lim_{v \rightarrow \infty} \rho_v = \rho$ ,

$$\delta_v = \frac{1}{r_v} + \frac{1 + \sigma(r_v)}{r_{v-1}} + \cdots + \frac{(1 + \sigma(r_v)) \cdots (1 + \sigma(r_1))}{r}$$

$$< \rho \sum_{i=0}^v \frac{1}{r_i} < \frac{\rho}{r-d} \sum_{i=0}^v \frac{1}{2^i} < \frac{2\rho}{r-d}$$

所以  $v \rightarrow \infty$  时,  $\delta_v$  收敛, 设  $\lim_{v \rightarrow \infty} \delta_v = \delta$ ,

$$k_v(r) = r_v^{\theta/r_v} r_{v-1}^{\theta(1+\sigma(r_v))/r_{v-1}} \cdots r^{\theta(1+\sigma(r_v)) \cdots (1+\sigma(r_1))/r}$$

$$< (r_v^{1/r_v} r_{v-1}^{1/r_{v-1}} \cdots r^{1/r})^{\rho \theta}$$

$$< \left[ (2^v r)^{1/r_v} (2^{v-1} r)^{1/r_{v-1}} \cdots r^{1/r} \right]^{\rho \theta} = \left( 2^{\sum_{i=0}^v \frac{i}{r_i}} r^{\sum_{i=0}^v \frac{1}{r_i}} \right)^{\rho \theta}$$

所以,  $v \rightarrow \infty$  时  $k_v(r)$  收敛, 设  $\lim_{v \rightarrow \infty} k_v(r) = k(r)$ , 对式 (6) 取极限便得结论 (5).

### 三、解的有界性与衰减估计

**定理1** 设问题 (1) — (3) 满足下面条件: (i)  $|f(x, t, u, u_x)| \leq C_1 |u|^{a+1} + C_2 |\nabla u|^{\beta+1}$ ,  $a > m > 0$ ,  $-1 < \beta < 1$ ,  $C_1, C_2 > 0$  是常数; (ii)  $|g(t)| \leq k_0$ ,  $\int_0^\infty |g(t)| dt = k$ ,  $k > 0$  是常数; (iii)  $u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$ , 记  $\|u_0\|_\infty = M$ . 那么当条件

$$C_1 \alpha k M \hat{\alpha} < 1 \quad (7)$$

满足时, 问题 (1) — (3) 的解  $u(x, t)$  有  $\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_\infty < \infty$ , 其中  $\hat{\alpha} = \max(a, h)$ ,

$$h = \frac{\beta(2-m)-m}{1-\beta}.$$

如果再设  $\beta \geq m$ , 那么当  $k$  适当小时, 存在常数  $C > 0$ , 使

$$\|u(t)\|_{\infty} \leq C(1+t)^{-1/m} \quad (8)$$

着重指出, 定理 1 的前部分对  $\alpha$  的上界没有任何限制, 对  $\beta$  的条件也是自然的.

**证** 1) 先证解  $u(x, t)$  满足引理 2 的条件

取  $p > \max \{0, \frac{m(1+\beta)-2}{1-\beta}, n(\alpha-m)-m-2\}$ . 以  $|u|^p u$  乘方程 (1) 在  $\Omega$  积分, 由条件 (i)、(ii), 并用 Young 不等式得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p+2} \frac{d}{dt} \|u\|_{p+2}^{p+2} + \frac{4(m+1)(p+1)}{(p+m+2)^2} \|\nabla u^{(p+m+2)/2}\|_2^2 \\ & \leq k_0 \int_{\Omega} (C_1 |u|^{\alpha+1} + C_2 |\nabla u|^{\beta+1}) |u|^{p+1} dx \\ & \leq k_0 [C_1 \|u\|_{p+\alpha+2}^{p+\alpha+2} + \frac{4C_2 \varepsilon_1}{(p+m+2)^2} \|\nabla u^{(p+m+2)/2}\|_2^2 \\ & \quad + C_2 \varepsilon_1^{-\frac{1+\beta}{1-\beta}} \|u\|_{p+h+2}^{p+h+2}] \end{aligned} \quad (9)$$

取  $\varepsilon_1 = (m+1)/2k_0C_2$ , 将式 (9) 右边第二项移到左边并不失一般性, 认为  $\alpha \geq h$ , 那么由式 (9) 得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|u\|_{p+2}^{p+2} + \frac{2(m+1)(p+1)(p+2)}{(p+m+2)^2} \|\nabla u^{(p+m+2)/2}\|_2^2 \\ & \leq C_3(p+2)(\|u\|_{p+\alpha+2}^{p+\alpha+2} + \|u\|_{p+h+2}^{p+h+2}) \\ & \leq C_4(p+2) \|u\|_{p+\alpha+2}^{p+\alpha+2} \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $C_3, C_4$  与  $p$  无关.

其次, 由 Hölder 不等式及嵌入定理

$$\begin{aligned} \|u\|_{p+\alpha+2}^{p+\alpha+2} & \leq \|u\|_{\frac{p+m+2}{2}}^{\theta_1} \|u\|_{\frac{n(p+m+2)}{n-2}}^{\theta_2} \\ & \leq C \frac{2\theta_2}{p+m+2} \|u\|_{\frac{p+m+2}{2}}^{\theta_1} \|\nabla u^{(p+m+2)/2}\|_2^{\frac{2\theta_2}{p+m+2}} \\ & \leq C \frac{2\theta_2}{p+m+2} \left( \varepsilon_2 \|\nabla u^{(p+m+2)/2}\|_2^2 + \varepsilon_2^{-\frac{\theta_2}{p+m+2-\theta_2}} \|u\|_{\frac{p+m+2-\theta_2}{p \cdot m \cdot 2}}^{\frac{\theta_1(p+m+2)}{p+m+2-\theta_2}} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $C$  是嵌入定理中的常数,  $\theta_1, \theta_2$  满足

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = p + \alpha + 2 \\ \frac{2\theta_1}{p+m+2} + \frac{(n-2)\theta_2}{n(p+m+2)} = 1 \end{cases}$$

解得

$$\theta_1 = \frac{2(p+m+2) - (n-2)(\alpha-m)}{n+2}, \quad \theta_2 = \frac{n(p+m+2+2(\alpha-m))}{n+2}$$

以 $\theta_2$ 代入可知 $\frac{2\theta_2}{p+m+2}$ ,  $\frac{\theta_2}{p+m+2-\theta_2}$ 的界不依赖于 $p$ , 于是有 $C \frac{2\theta_2}{p+m+2} \leq C_5$ ,  $C_5$ 与 $p$

无关, 以式(11)代入式(10), 并取 $\varepsilon_2 = \frac{(m+1)(p+1)}{C_4 C_5 (p+m+2)^2}$ , 并对式(10)左边第二项用嵌入定理和Hölder不等式, 那么化简得

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{p+2}^{p+2} + C_6 \|u\|_{p+2}^{p+m+2} \leq C_7 (p+m+2)^{2\theta} (\|u\|_{\frac{p+m+2}{2}}^{\frac{\theta_1(p+m+2)}{p+m+2-\theta_2}} + 1) \quad (12)$$

其中 $C_6, C_7, \theta$ 是与 $p$ 无关的正数. 因

$$\frac{\theta_1(p+m+2)}{p+m+2-\theta_2} = (p+m+2) \left[ 1 + \frac{(n+2)(\alpha-n)}{2(p+m+2-n(\alpha-m))} \right]$$

如果记

$$r = \frac{p+m+2}{2}, \quad \sigma(r) = \frac{(n+2)(\alpha-m)}{2(p+m+2-n(\alpha-m))}$$

那么由式(12)得

$$U_{2r-m} \leq (C_7^\theta)^{1/r} U_r^{1+\sigma(r)}$$

$C > 0$ 与 $r$ 无关. 即 $u(x, t)$ 满足引理2的不等式(4).

2) 证存在 $p_0$ , 使 $\|u(t)\|_{p_0+2} < \infty$ . 取

$$p_0 > \max(0, \frac{m(\beta+1)-2}{1-\beta}, \frac{n(\alpha-m)}{2} - 2),$$

以 $|u|^{p_0} u$ 乘方程(1), 在 $\Omega$ 积分, 由条件(i), 并用Young不等式, 类似于式(9)有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|u\|_{p_0+2}^{p_0+2} + \frac{4(m+1)(p_0+1)(p_0+2)}{(p_0+m+2)^2} \|\nabla u^{(p_0+m+2)/2}\|_2^2 \\ & \leq (p_0+2) |g(t)| \{ C_1 \|u\|_{p_0+2}^{p_0+\alpha+2} + \frac{4C_2\varepsilon_3}{(p_0+m+2)^2} \|\nabla u^{(p_0+m+2)/2}\|_2^2 \\ & \quad + C_2\varepsilon_3^{-\frac{1+\beta}{1-\beta}} \|u\|_{p_0+h+2}^{p_0+h+2} \} \end{aligned} \quad (13)$$

取 $\varepsilon_3 = (m+1)(p_0+1)/2k_0C_2$ , 那么由式(13)得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|u\|_{p_0+2}^{p_0+2} + \frac{2(m+1)(p_0+1)(p_0+2)}{(p_0+m+2)^2} \|\nabla u^{(p_0+m+2)/2}\|_2^2 \\ & \leq (p_0+2) |g(t)| [C_1 \|u\|_{p_0+2}^{p_0+\alpha+2} + C_3 \|u\|_{p_0+h+2}^{p_0+h+2}] \\ & \leq (p_0+2) |g(t)| [(C_1 + C_3\varepsilon_4^{-\frac{\alpha-h}{p_0+h+2}}) \|u\|_{p_0+2}^{p_0+\alpha+2} + \varepsilon_4 |\Omega|] \end{aligned} \quad (14)$$

$$< C_4(p_0+2) |g(t)| \left( \|u\|_{p_0+\alpha+2}^{p_0+\alpha+2} + \frac{\varepsilon_4^{(p_0+\alpha+2)/(p_0+h+2)}}{C_3} |\Omega| \right) \quad (15)$$

其中,

$$C_3 = C_2 \varepsilon_3^{-\frac{1+\beta}{1-\beta}} = C_2 \left[ \frac{2C_2 k_0}{(m+1)(p_0+1)} \right]^{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \rightarrow 0 (p_0 \rightarrow \infty);$$

$$C_4 = C_1 + C_3 \varepsilon_4^{-\frac{\alpha-h}{p_0+h+2}}$$

取

$$\varepsilon_4 = \left( \frac{C_3}{|\Omega|} y_0^{1+\lambda} \right)^{(p_0+h+2)/(p_0+\alpha+2)}$$

其中记  $y_0 = \|u_0\|_{p_0+2}^{p_0+2}$ , 并不失一般性设  $y_0 > 0$

$$\lambda = \frac{2\alpha}{2(p_0+2) - n(\alpha-m)}$$

于是  $p_0 \rightarrow \infty$  时

$$C_4 = C_1 + C_3^{\frac{p_0+h+2}{p_0+\alpha+2}} \left( \frac{1}{|\Omega|} y_0^{1+\lambda} \right)^{-\frac{\alpha-h}{p_0+\alpha+2}} \rightarrow C_1$$

又由 Hölder 不等式及嵌入定理

$$\begin{aligned} \|u\|_{p_0+\alpha+2}^{p_0+\alpha+2} &\leq \|u\|_{p_0+2}^{\theta_1} \|u\|_{n(p_0+m+2)}^{\frac{\theta_2}{n-2}} \\ &\leq C^{2\theta_2/(p_0+m+2)} \|u\|_{p_0+2}^{\theta_1} \|\nabla u\|_{p_0+m+2}^{(p_0+m+2)/2} \|u\|_2^{2\theta_2/(p_0+m+2)} \\ &\leq C^{2\theta_2/(p_0+m+2)} \left( \varepsilon_5 \|\nabla u\|_{p_0+m+2}^{(p_0+m+2)/2} \right)^2 + \varepsilon_5^{-\theta_2/(p_0+m+2-\theta_2)} \|u\|_{p_0+2}^{\frac{\theta_1(p_0+m+2)}{p_0+m+2-\theta_2}} \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $C$  是嵌入定理的常数.  $\theta_1, \theta_2$  满足

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = p_0 + \alpha + 2 \\ \frac{\theta_1}{p_0+2} + \frac{\theta_2(n-2)}{n(p_0+m+2)} = 1 \end{cases}$$

解得

$$\theta_1 = (p_0+2) \left( 1 - \frac{(n-2)\alpha}{2(p_0+2) + nm} \right), \quad \theta_2 = \frac{n\alpha(p_0+m+2)}{2(p_0+2) + nm}$$

以式(16)代入式(15), 并取  $\varepsilon_5 = \frac{(m+1)(p_0+1)C^{\frac{2\theta_2}{p_0+m+2}}}{C_4 k_0 (p_0+m+2)^2}$ , 将含导数的项移到左边,

化简得

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \|u\|_{p_0+2}^{p_0+2} + (m+1) \|\nabla u\|_{p_0+m+2}^{(p_0+m+2)/2} \|u\|_2^2 \\ &\leq C_4(p_0+2) |g(t)| (C_5 \|u\|_{p_0+2}^{(p_0+2)(1+\lambda)} + y_0^{1+\lambda}) \end{aligned}$$

$$\leq C_4 C_5 (p_0 + 2) |g(t)| (\|u\|_{p_0+2}^{(p_0+2)(1+\lambda)} + C_5^{-1} y_0^{1+\lambda}) \quad (17)$$

其中

$$\frac{\theta_1(p_0+m+2)}{p_0+m+2-\theta_2} = (p_0+2) \left(1 + \frac{2\alpha}{2(p_0+2)-n(\alpha-m)}\right) = (p_0+2)(1+\lambda)$$

并计算得  $p_0 \rightarrow \infty$  时

$$C_5 = C \frac{\frac{2\theta_2}{p_0+m+2}}{\varepsilon_5} = C \frac{\frac{2\theta_2}{p_0+m+2}}{\frac{\theta_2}{p_0+m+2-\theta_2}} = C \frac{2\theta_2}{p_0+m+2} \left( \frac{C_4 k_0 (p_0+m+2)^2}{(m+1)(p_0+1)} \right)^{\frac{\theta_2}{p_0+m+2-\theta_2}} \rightarrow 1$$

记  $y(t) = \|u(t)\|_{p_0+2}^{p_0+2}$ ,  $z_0 = y_0 + C_5^{-1/(1+\lambda)} y_0$ ,  $z = y + C_5^{-1/(1+\lambda)} y_0$  那么由式 (17) 得

$$\frac{dy}{dt} \leq C_4 C_5 (p_0 + 2) |g(t)| (y + C_5^{-1/(1+\lambda)} y_0)^{1+\lambda}$$

所以

$$\frac{dz}{dt} \leq C_4 C_5 (p_0 + 2) |g(t)| z^{1+\lambda}$$

积分得

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^\lambda} &\geq \frac{1}{z_0^\lambda} (1 - C_4 C_5 (p_0 + 2) \lambda z_0^\lambda \int_0^t |g(\tau)| d\tau) \\ &\geq \frac{1}{z_0^\lambda} (1 - C_4 C_5 (p_0 + 2) \lambda k z_0^\lambda) \end{aligned}$$

因  $p_0 \rightarrow \infty$  时,  $C_4 C_5 (p_0 + 2) \lambda k z_0^\lambda \rightarrow C_1 \alpha k M^\alpha$ , 所以, 当不等式

$$C_1 \alpha k M^\alpha < 1$$

满足时, 存在适当大的  $p_0$ , 使

$$\frac{1}{z^\lambda} > \frac{1}{z_0^\lambda} (1 - C_4 C_5 (p_0 + 2) \lambda k z_0^\lambda) > 0$$

从而  $z$ , 因此也有  $\|u\|_{p_0+2}$  对  $t \geq 0$  一致有界. 结合到 1) 的证明, 便得  $\|u(t)\|_\infty$  一致有界.

3) 衰减估计

因为设  $\beta \geq m$ , 所以  $h = \frac{\beta(2-m)-m}{1-\beta} \geq m$ . 又对  $\|u\|_{p_0+h+2}^{p_0+h+2}$  也有相应于式 (16) 的结果,

与式 (16) 一起代入式 (14), 并对左边第二项用嵌入定理和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|_{p_0+2}^{p_0+2} + C_6 \|u\|_{p_0+2}^{(p_0+2)(1+\lambda_0)} \\ \leq C_7 |g(t)| (\|u\|_{p_0+2}^{(p_0+2)(1+\lambda)} + \|u\|_{p_0+2}^{(p_0+2)(1+\lambda_1)}) \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$\lambda_0 = \frac{m}{p_0+2} \leq \frac{2h}{2(p_0+2)-n(h-m)} = \lambda_1 < \lambda$$

$C_6, C_7$  与  $u$  无关.

又已证  $\|u\|_\infty$  一致有界, 所以由式 (18) 有

$$\frac{dy}{dt} \leq (-C_6 + C_8 |g(t)|) y^{1+\lambda_0}$$

$C_8$  与  $u$  无关, 积分得

$$\frac{1}{y^{\lambda_0}} \geq \frac{1}{y_0^{\lambda_0}} (C_6 \lambda_0 y_0^{\lambda_0} t + 1 - C_8 \lambda_0 k y_0^{\lambda_0}) \quad (19)$$

因此, 当  $k$  适当小, 使

$$1 - C_8 \lambda_0 k y_0^{\lambda_0} > 0$$

由式 (19) 便得

$$\|u\|_{p_0+2} \leq C(1+t)^{-1/m} \quad (20)$$

现设  $(1+t)^{1/m} u = w$ ,  $\tau = \ln(1+t)$ , 代入问题 (1) — (3) 得

$$\begin{cases} w_\tau - \Delta(|w|^m w) = \frac{w}{m} + g(e^\tau - 1) e^{(1+1/m)\tau} f(x, e^\tau - 1, w e^{-\tau/m}, w_x e^{-\tau/m}) \\ w(x, 0) = u_0(x) \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

及

$$\begin{aligned} & e^{(1+1/m)\tau} |f(x, e^\tau - 1, w e^{-\tau/m}, w_x e^{-\tau/m})| \\ & \leq e^{(1+1/m)\tau} (C_1 |w|^{\alpha+1} e^{-(\alpha+1)\tau/m} + C_2 |\nabla w|^{\beta+1} e^{-(\beta+1)\tau/m}) \\ & \leq C_1 |w|^{\alpha+1} + C_2 |\nabla w|^{\beta+1} \end{aligned}$$

如同定理 1 证明的第 1) 点, 可证  $w$  满足引理 2 的不等式 (4), 再由式 (20) 有

$$\|w\|_{p_0+2} = (1+t)^{1/m} \|u\|_{p_0+2} \leq C$$

因此, 对  $t \geq 0$ ,  $\|w(t)\|_\infty$  一致有界. 从而存在常数  $C > 0$ , 使

$$\|u(t)\|_\infty \leq C(1+t)^{-1/m}$$

定理证完.

对小初值的情况, 定理 1 的条件可放宽.

**定理 2** 设问题 (1) — (3) 满足下面条件:

(i)  $|f(x, t, u, u_x)| \leq C_1 |u|^{\alpha+1} + C_2 |\nabla u|^{\beta+1}$ ,  $\alpha > m > 0$ ,  $m < \beta < 1$ ,  $C_1, C_2 > 0$  是常数;

(ii)  $|g(t)| \leq k_0$ ,  $k_0 > 0$  是常数;

(iii)  $u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$ .

那么存在  $d_0$ , 使当  $\|u_0\|_\infty < d_0$  时, 存在常数  $C > 0$ , 使

$$\|u(t)\|_\infty \leq C(1+t)^{-1/m}.$$

**证** 类似于定理 1 的证明, 只需证存在  $d_0$ , 使当  $\|u_0\|_\infty < d_0$  时, 有  $\|u(t)\|_{p_0+2} \leq C(1+t)^{-1/m}$  即可.

由式 (18) 有

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{p_0+2}^{p_0+2} \leq \{-C_6 + C_7 k_0 (\|u\|_{p_0+2}^{(p_0+2)(\lambda-\lambda_0)} +$$

$$+ \|u\|_{p_0+2}^{(p_0+2)(\lambda_1-\lambda_0)} \} \|u\|_{p_0+2}^{(p_0+2)(1+\lambda_0)} \quad (21)$$

因  $\|u_0\|_{p_0+2} \leq C(p_0, \Omega) \|u_0\|_{\infty} < Cd_0$ , 由  $\|u(t)\|_{p_0+2}$  的连续性, 知存在  $t_1 > 0$ , 当  $t \in [0, t_1]$  时,  $\|u(t)\|_{p_0+2} < Cd_0$ , 又  $\beta > m$ , 有  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda$ , 因此, 当  $d_0$  充分小时,  $-\frac{d}{dt} \|u\|_{p_0+2}^{p_0+2} < 0$ , 从而

$$\|u\|_{p_0+2} \leq \|u_0\|_{p_0+2} < Cd_0, \quad t \in [0, t_1]$$

继续对  $t \geq t_1$  讨论, 便得对任何  $t \geq 0$ , 有

$$\|u\|_{p_0+2} \leq \|u_0\|_{p_0+2} < Cd_0$$

及由式 (21) 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|_{p_0+2}^{p_0+2} &\leq \{ -C_6 + C_7 k_0 [ (Cd_0)^{(p_0+2)(\lambda-\lambda_0)} \\ &+ (Cd_0)^{(p_0+2)(\lambda_1-\lambda_0)} ] \} \|u\|_{p_0+2}^{(p_0+2)(1+\lambda_0)} \end{aligned}$$

积分便知存在  $C > 0$ , 使

$$\|u\|_{p_0+2} \leq C(1+t)^{-1/m}$$

### 参 考 文 献

- [1] Levine, H.A., Sack, P.E., Some Existence and Nonexistence Theorems for Solutions of Degenerate Parabolic Equations, *J. Differential Equations*, 52(1984), 135—161.
- [2] 梁学信、吴在德, 退缩反应扩散方程解的 blow-up 与有界性, 华侨大学学报(自然科学版), 8, 3(1987).
- [3] Nakao, M., Global Solutions for Some Nonlinear Parabolic Equations with Nonmonotonic Perturbations, *Non. Analysis*, 10, 3(1986), 299—314.
- [4] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, (1977).

## The Boundedness and Decay Estimate of the Solutions for a Class Degenerate Reaction Diffusion Equations

Liang Xuexin Wu Zai-de

### Abstract

This paper discusses initial boundary value problem (1) — (3). Under somewhat more general condition, the uniform boundness of the solutions is demonstrated and the decay estimate is obtained.