第9卷 第4期　华侨大学学报自然科学版　Vol. 9 No.4
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1988年11月　(NATURAL SCIENCE)　Nov. 1988

有优先权可修系统的可靠性计算

吴道明
(应用数学系)

摘　要

本文介绍可修系统中，主部件在工作和维修上具有优先权的系统可靠性计算；求得某些常见系统可靠性指标计算公式、以便实际应用.

一、引　言

在可修系统中，常有主部件（或主机）和副部件（或备用机）之分，主部件对系统可靠性影响起着重要作用. 因此，考虑主部件在工作和维修上具有优先权（强占型）的地位，对提高系统可靠度是有意义的. 主部件具有工作优先权：如贮备系统，当主部件故障修理时，由副部件代替工作，一旦主部件修好转入工作状态，副部件则中止工作，转入备用状态；具有维修优先权是：若主部件发生故障时，在修副部件立即中断修理而转入待修状态，修理工即去修理主部件直到修好正常工作，再继续修理副部件. 此类可修系统在实际中是常见的，本文介绍它在稳态下的可靠性指标的计算方法.

我们的处理方法，是假定构成系统各部件的寿命分布和故障后的修理时间分布均为指数分布，仔细定义系统的状态. 这样，系统可以用马尔可夫（Марков）过程描述，从而求出稳态下系统的可靠性指标.

二、表决器维修有优先权的k/n（G）系统

系统由n个同型部件，一个表决器和一个修理工组成的k/n(G)系统（图1）. 假设：

（1）系统有（$n-k+1$）个以上部件发生故障，系统就故障. 当表决器发生故障时，系统立即故障. 仅当系统有k个以上部件正常和表决器正常时，系统才正常.

（2）部件寿命和维修时间分别遵循参数λ和μ的指数分布，表决器的寿命和维修时间分别遵循参数α和β的指数分布(λ, μ, α, $\beta>0$)，且它们都相互独立.

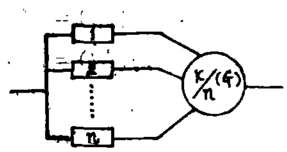

图1　表决系统

（3）一旦系统故障，好的部件和表决器暂停工作，不再发生故障，直到系统重新进入

本文1987年12月8日收到.

运行状态：

（4）表决器在修理上比部件有优先权（强占型）。试求系统的稳态可用度、稳态故障频度和平均指标。可这样定义系统状态。

状态0：n个部件及表决器都正常工作；

状态j：j个部件故障（$1\leqslant j\leqslant n-k+1$），表决器正常；

状态（$n-k+2+i$）：i个部件故障（$0\leqslant i\leqslant n-k$），表决器故障。

此时，系统的状态空间为$E=\{0, 1, \cdots, 2n-2k+2\}$；系统正常运行状态集合为$W=\{0, 1, \cdots, n-k\}$；系统故障状态集合为$F=\{n-k+1, n-k+2, \cdots, 2n-2k+2\}$。由于系统为$k/n$（G）系统，一个修理工，表决器维修为强占型的优先权，故系统状态只有（$2n-2k+3$）个状态，其它状态不存在。令 $X(t)=j$ 为时刻t系统处于状态$j(j=0, 1, \cdots, n-k, \cdots, 2n-2k+2)$，因部件及表决器的寿命和修理时间均服从指数分布，具有无记忆性，可以证明：随机过程$\{X(t), t\geqslant 0\}$是一个齐次马尔可夫过程。若已知 $X(t)=j(j=0, 1, \cdots, 2n-2k+2)$，部件及表决器寿命分布和修理时间分布是指数分布。因此，时刻 t 以后系统发展的概率规律完全由时刻t系统所处的状态$j(j=0, 1, \cdots, 2n-2k+2)$决定，而与系统在时刻 t 以前的历史无关，说明$\{X(t), t\geqslant 0\}$在状态空间E中具有齐次性。

对此马尔可夫过程，由全概率公式可求得在Δt时段内不同状态转移的概率（图2）。

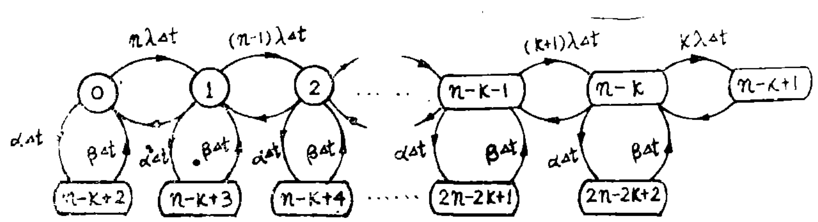

图2　状态转移图

$$p_{j,j+1}(\Delta t)=(n-j)\lambda\Delta t+0(\Delta t),\qquad j=0, 1, \cdots, n-k$$

$$p_{j,j-1}(\Delta t)=\mu\Delta t+0(\Delta t),\qquad j=1, 2, \cdots, n-k+1$$

$$p_{j,j}(\Delta t)=1-(n-j)\lambda\Delta t-\mu\Delta t-\alpha\Delta t+0(\Delta t),\qquad j=1, 2, \cdots, n-k$$

$$p_{j,n-k+2+j}(\Delta t)=\alpha\Delta t+0(\Delta t),\qquad j=0, 1, \cdots, n-k$$

$$p_{n-k+2+j,j}(\Delta t)=\beta\Delta t+0(\Delta t),\qquad j=0, 1, \cdots, n-k$$

$$p_{n-k+2+j,n-k+2+j}(\Delta t)=1-\beta\Delta t+0(\Delta t),\qquad j=0, 1, \cdots, n-k$$

$$p_{0,0}(\Delta t)=1-n\lambda\Delta t-\alpha\Delta t+0(\Delta t)$$

$$p_{n-k+1,n-k+1}(\Delta t)=1-\mu\Delta t+0(\Delta t)$$

$$p_{j,k}(\Delta t)=0(\Delta t),\qquad |j-k|>1$$

从而得转移概率矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}$$

其中

$$A_{11}=\begin{pmatrix} -n\lambda-\alpha & n\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(n-1)\lambda-\mu-\alpha & (n-1)\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(n-2)\lambda-\mu-\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu & -k\lambda-\mu-\alpha & k\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}_{(n-k+2)(n-k+2)}.$$

$$A_{12}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(n-k+2)(n-k+1)} \qquad A'_{12}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}_{(n-k+1)(n-k+1)}$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & 0 \end{pmatrix}_{(n-k+1)(n-k+2)} \qquad A'_{21}=\begin{pmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta \end{pmatrix}_{(n-k+1)(n-k+1)}$$

$$A_{22}=\begin{pmatrix} -\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta \end{pmatrix}_{(n-k+1)(n-k+1)}$$

则系统处于状态j的概率$p_j(t)$满足微分方程组：

$$(p'_0(t),\ p'_1(t),\ \cdots,\ p'_{2n-2k+2}(t))=(p_0(t),\ p_1(t),\ \cdots,\ p_{2n-2k+2}(t))A \tag{1}$$

当 $t\to\infty$时，系统将达到稳态平衡，使得系统处于每一状态都有一确定的稳态概率，用数学式表达[1]：

$$\lim_{t\to\infty}p_j(t)=\pi_j \qquad (0\leqslant j\leqslant 2n-2k+2)$$

且

$$\sum_{j=0}^{2n-2k+2}\pi_j=1$$

可以证明[1]：

$$\lim_{t\to\infty}p'_j(t)=0, \qquad j\in E$$

于是，由微分方程组（1），两边对 $t\to\infty$取极限得π_j（$j\in E$），满足线性方程组

$$\begin{cases} (\pi_0,\ \pi_1,\ \cdots,\ \pi_{2n-2k+2})A=0 \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{2n-2k+2}\pi_j=1 \end{cases}$$

方程组用分块矩阵方法求解，即得

$$(\Pi_1 A_{11} + \Pi_2 A_{21},\ \Pi A_{12} + \Pi_2 A_{22}) = 0$$

其中，$\Pi_1 = (\pi_0,\ \pi_1,\ \cdots,\ \pi_{n-k+1})$，$\Pi_2 = (\pi_{n-k+2},\ \cdots,\ \pi_{2n-2k+2}$。由$\Pi_1 A_{12} + \Pi_2 A_{22} = 0$ 得

$$(\pi_0,\ \cdots,\ \pi_{n-k})A'_{12} = (\pi_{n-k+2},\ \cdots,\ \pi_{2n-2k+2})(-A_{22})$$

$$(\pi_{n-k+2},\ \cdots,\ \pi_{2n-2k+2}) = (\pi_0,\ \cdots,\ \pi_{n-k})A'_{12}(-A_{22})^{-1}$$

$$(\pi_{n-k+2},\ \cdots,\ \pi_{2n-2k+2}) = \frac{\alpha}{\beta}(\pi_0,\ \cdots,\ \pi_{n-k}) \tag{2}$$

将式（2）代入方程$\Pi_1 A_{11} + \Pi_2 A_{21} = 0$ 得

$$\begin{cases} -n\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\ n\lambda\pi_0 - \mu\pi_1 - (n-1)\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \\ (n-j-1)\lambda\pi_{j-1} - \mu\pi_j - (n-j)\lambda\pi_j + \mu\pi_{j+1} = 0 \qquad (j \leqslant n-k) \\ k\lambda\pi_{n-k} - \mu\pi_{n-k+1} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

由式（3）、（2）解得

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{n\lambda}{\mu}\pi_0 \\ \pi_j = n(n-1)\cdots(n-j+1)\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0 \qquad (j \leqslant n-k+1) \\ \pi_{n-k+2} = \dfrac{\alpha}{\beta}\pi_0 \\ \pi_{n-k+2+i} = \dfrac{\alpha}{\beta} n(n-1)\cdots(n-i+1)\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-k) \end{cases}$$

又由 $\sum\limits_{j=0}^{2n-2k+2} \pi_j = 1$ 得

$$\pi_0 = \left[\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{n-k} n(n-1)\cdots(n-j+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + n(n-1)\cdots k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-k+1}\right)\right]^{-1}$$

故得系统的可用度

$$A = \sum_{j \in W} \pi_j = \left[1 + \sum_{j=1}^{n-k} n(n-1)\cdots(n-j+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right]\pi_0$$

系统的故障频度

$$M = (\pi_0,\ \pi_1,\ \cdots,\ \pi_{n-k}) \begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mu & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k\lambda & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\alpha\left(1 + \sum_{j=1}^{n-k} n(n-1)\cdots(n-j+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right) + \frac{n(n-1)\cdots k\lambda^{n-k+1}}{\mu^{n-k}}\right]\pi_0$$

系统平均开工时间 MUT $= A/M$；系统平均停工时间 MDT $= \bar{A}/M = (1-A)/M$； 系统平均周期 MCT $= 1/M$。

三、有优先权的两部件并联系统

系统由二个不同单元即主单元和副单元并行工作及一个修理工组成。主单元比副单元具有优先权。假定主单元寿命服从指数分布$1-e^{-\alpha t}(t\geqslant 0,\ \alpha>0)$，修理时间分布为$1-e^{-\beta t}(t\geqslant 0,\ \beta>0)$；副单元的寿命分布为$1-e^{-\lambda t}(t\geqslant 0,\ \lambda>0)$，修理时间分布为$1-e^{-\mu t}(t\geqslant 0,\ \mu>0)$单元之间工作是相互独立的。

求系统稳态下可靠性指标，这样定义系统状态：

状态 0：主单元及副单元都正常工作；

状态 1：主单元工作，副单元故障在修理；

状态 2：副单元工作，主单元故障在修理；

状态 3：主单元在修理，副单元待修。

此时，状态空间$E=\{0,1,2,3\}$，$W=\{0,1,2\}$，$F=\{3\}$。由系统并联，一个修理工，主单元维修有优先权（强占型），故系统只有上述四个状态，其它状态不存在。

定义$X(t)=j$，为时刻t系统处于状态$j(j=0,1,2,3)$，显然，$\{X(t),t\geqslant 0\}$是一个随机过程，由单元寿命及修理时间分布都为指数分布。具有无记忆性。可以证明：$\{X(t)\ t\geqslant 0\}$是有限状态空间E上的一个齐次马尔可夫过程，对此马尔可夫过程，考虑Δt时段内不同状态间的转移概率如图 3 所示。

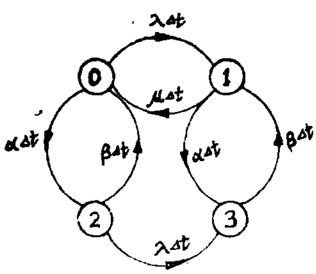

图 3　状态转移图

按前节的方法，由全概率公式可以算出各状态间转移概率，其转移概率矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} -\lambda-\alpha & \lambda & \alpha & 0 \\ \mu & -\alpha-\mu & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & -\lambda-\beta & \lambda \\ 0 & \beta & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

系统各状态的稳态概率分布$\{\pi_j\}$满足以下线性方程组

$$\begin{cases}(\pi_0,\ \pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3)A=0\\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}\pi_1=\dfrac{\lambda(\lambda+\alpha+\beta)}{\mu(\lambda+\beta)}\pi_0\\[2ex] \pi_2=\dfrac{\alpha}{\lambda+\beta}\pi_0\\[2ex] \pi_3=\dfrac{\lambda\alpha(\lambda+\alpha+\beta+\mu)}{\mu\beta(\lambda+\beta)}\pi_0\\[2ex] \pi_0=\dfrac{\mu\beta(\lambda+\beta)}{\lambda\alpha(\lambda+\alpha+\beta+\mu)+\beta(\lambda+\alpha+\beta)(\lambda+\mu)}\end{cases}$$

系统可用度

$$A=\pi_0+\pi_1+\pi_2=\frac{\beta(\lambda+\alpha+\beta)(\lambda+\mu)}{\lambda\alpha(\lambda+\alpha+\beta+\mu)+\beta(\lambda+\alpha+\beta)(\lambda+\mu)}$$

系统的故障频度

$$M=\lambda\pi_1+\lambda\pi_2=\frac{\lambda\alpha\beta(\lambda+\alpha+\beta+\mu)}{\lambda\alpha(\lambda+\alpha+\beta+\mu)+\beta(\lambda+\alpha+\beta)(\lambda+\mu)}$$

及

$$\mathrm{MUT}=\frac{A}{M}=\frac{(\lambda+\alpha+\beta)(\lambda+\mu)}{\lambda\alpha(\lambda+\alpha+\beta+\mu)}$$

$$\mathrm{MDT}=\bar{A}/M=1/\beta$$

$$\mathrm{MCT}=\frac{\lambda\alpha(\lambda+\alpha+\beta+\mu)+\beta(\lambda+\alpha+\beta)(\lambda+\mu)}{\lambda\alpha\beta(\lambda+\alpha+\beta+\mu)}$$

四、有优先权的两部件热备系统*

系统由两个不同型部件和一个修理工组成。主部件比副部件具有优先权，主部件工作时，副部件贮备；当主部件故障维修时，副部件代替工作，一旦修好转入工作状态，副部件则中断工作转入备用状态；当主部件故障需要维修时，在修副部件即中断维修转入待修，让修理工立即转修主部件，直到修好正常工作后再续修副部件．假设主部件寿命分布为$1-e^{-\alpha t}$（$t\geqslant 0$，$\alpha>0$），修理时间分布为$1-e^{-\beta t}$（$t\geqslant 0$，$\beta>0$），副部件贮备时寿命分布为$1-e^{-\lambda_2 t}$（$t\geqslant 0$，$\lambda_2>0$），工作时寿命分布为$1-e^{-\lambda_1 t}$（$t\geqslant 0$，$\lambda_1>0$）维修时间分布均为$1-e^{-\mu t}$（$t\geqslant 0$，$\mu>0$）．部件工作是相互独立的．

按第三节的处理方法，如下定义系统状态：

状态0：主部件工作，副部件贮备，均为正常；

状态1：主部件工作，副部件贮备失效在维修；

状态2：副部件工作，主部件失效在维修；

状态3：主部件在维修，副部件待修．

根据系统定义，其它状态不存在．此时，$E=\{0,1,2,3\}$，$W=\{0,1,2\}$，$F=\{3\}$，令$X(t)=j$，表示时刻t系统处于状态$j\{j=0,1,2,3\}$．可以证明：$\{X(t),t\geqslant 0\}$是齐次马尔可夫过程．按这个系统运行过程易求得在Δt时段内系统不同状态的转移概率（图4），转移矩阵为

$$A=\begin{vmatrix}-\lambda_2-\alpha & \lambda_2 & \alpha & 0\\ \mu & -\alpha-\mu & 0 & \alpha\\ \beta & 0 & -\lambda_1-\beta & \lambda_1\\ 0 & \beta & 0 & -\beta\end{vmatrix}$$

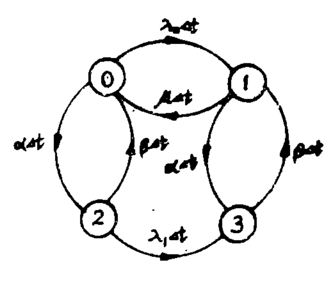

图4 状态转移图

系统各状态的稳态概率分布$\{\pi_j\}$满足如下线性方程组

$$\begin{cases}(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3)A=0\\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$$

解得

*有优先权的两部件冷备系统在文〔1〕中已求得计算公式．更复杂的情形类似可以分析计算，只是计算复杂而已．

$$
\begin{cases}
\pi_1 = \dfrac{\lambda_1(\lambda_2+\alpha)+\lambda_2\beta}{\mu(\lambda_1+\beta)}\pi_0 \\
\pi_2 = \dfrac{\alpha}{\lambda_1+\beta}\pi_0 \\
\pi_3 = \dfrac{\lambda_1\alpha(\alpha+\mu)+\lambda_2\alpha(\lambda_1+\beta)}{\mu\beta(\lambda_1+\beta)}\pi_0 \\
\pi_0 = \dfrac{\mu\beta(\lambda_1+\beta)}{(\alpha+\beta)[\lambda_1(\lambda_2+\alpha+\mu)+\beta(\lambda_2+\mu)]}
\end{cases}
$$

系统可用度

$$A=\pi_0+\pi_1+\pi_2=\frac{\beta(\lambda_1+\beta)(\lambda_2+\mu)+\alpha\beta(\lambda_1+\mu)}{(\alpha+\beta)[\lambda_1(\lambda_2+\alpha+\mu)+\beta(\lambda_2+\mu)]}$$

系统的故障频度

$$M=\alpha\pi_1+\lambda_2\pi_2=\frac{\alpha\beta[\lambda_1(\alpha+\beta)+\lambda_2(\lambda_1+\mu)]}{(\alpha+\beta)[\lambda_1(\lambda_2+\alpha+\mu)+\beta(\lambda_2+\mu)]}$$

及

$$\mathrm{MUT}=\frac{A}{M}=\frac{\beta(\lambda_1+\beta)(\lambda_2+\mu)+\alpha\beta(\lambda_1+\mu)}{\alpha\beta[\lambda_1(\alpha+\beta)+\lambda_2(\lambda_1+\mu)]}$$

$$\mathrm{MDT}=\frac{\bar{A}}{M}=\frac{\lambda_1(\lambda_2+\alpha+\beta+\mu)}{\beta[\lambda_1(\alpha+\beta)+\lambda_2(\lambda_1+\mu)]}$$

$$\mathrm{MCT}=\frac{1}{M}=\frac{(\alpha+\beta)[\lambda_1(\lambda_2+\alpha+\mu)+\beta(\lambda_2+\mu)]}{\alpha\beta[\lambda_1(\alpha+\beta)+\lambda_2(\lambda_1+\mu)]}$$

参　考　文　献

〔1〕曹晋华、程侃，可靠性数学引论，科学出版社，（1986）.
〔2〕胡迪鹤，应用随机过程引论，哈尔滨工业大学出版社，（1984）.

Reliability Computation of a Reparable System with Priority

Wu Daoming

Abstract

This paper deals with the reliability computation of a reparable system of which the main unit possesses priority both in operation and maintenance. It tries to achieve a formula for practical use in calculating the reliablity index of some common system.