

工件圆度误差的数学描述 及计算机数据处理

陈宝珊

(精密机械工程系)

摘 要

本文给出了工件圆度评定系统参数的严格数学定义,提出了圆度评定数学模型;讨论了数学模型解的存在性及唯一性;研究了一种新的计算机处理方法,结果表明,其处理精度令人满意。

一、问题的提出

主轴回转误差圆图象和圆度仪测量工件得到的形状误差曲线是在同一平面上的不规则圆图形。ISO标准规定了实际圆图形和理想几何图形以最小条件接近的圆度评定方法(GB1182-80),该评定方法的基本思想是设法找出参考圆,然后根据参考圆求出圆度值。目前通常使用下列四种参考圆:

(1) 最小二乘圆:与轮廓曲线采样点极坐标距离的平方和为最小的圆(图1a)。(2) 最小外接圆:包容轮廓曲线且直径为最小的圆(图1b)。(3) 最大内切圆:轮廓曲线所包容的最大直径的圆(图1c)。(4) 最小区域圆:包容轮廓曲线且半径差为最小的两个同心圆(图1d)。

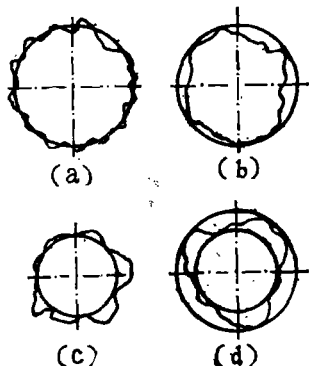


图1

对于这四种参考圆的评定,通常使用的方法是将误差曲线放大,然后用同心圆母板或圆规作图求得圆度误差值。由于在作放大的误差曲线时被测圆图并不是真正按等比例放大,因此放大的误差曲线与被测的真正圆图形既不相等也不相似。当选定的测量基准中心与实际评定中心不重合时,由它算出的圆度数值将不等于正确的圆度误差值,而是随着所选用的基础圆直径大小和放大倍数大小的变化而变化。

文献[1]提出一种提高评定精度的方法,该方法是将误差曲线放大通过不断试凑求出评定中心从而得到圆度值的。这种方法效率低,精度也受到不断试凑的限制。文献[2]提

出一种评定圆度误差的解析方法,作者发现,该法并不能给出满足最小条件的圆度误差值。文献[3]提出一种圆度误差评定的计算机方法,该方法仍然是程序化的试凑法。

为了提高测量精度和数据处理精度,其中必然涉及到复杂的数学问题。为此,本文首先研究了评定中心及各种参考圆的严格数学定义,给出圆度评定的数学模型,然后讨论了其解的存在性及唯一性,进而提出一种新的处理方法。

二、圆度评定系统的数学描述

设 E^2 (2维欧氏空间)中, $A(x, r)$ 表示以 x 为圆心、 r 为半径的参考圆, s 是边界为轮廓曲线 \bar{H} 的内部集合, $L(p)$ 表示集合 p 的欧氏测度,我们给出误差评定系统的几个严格数学定义。

定义 1 设 x_0 具有性质

$$L[A(x_0, r) \cap s] = \max_x \{ L[A(x, r) \cap s] \}$$

称 x_0 为轮廓曲线 \bar{H} 关于半径为 r 的参考圆的评定中心。

定义 2 若 x_0 为最小外接圆评定中心, r_0 为最小外接圆半径, Δ 满足

$$\Delta = r_0 - \max \{ r | A(x_0, r) \subset s \}$$

称 Δ 为以最小外接圆为参考圆的圆度误差。

定义 3 若 x_0 为最大内切圆评定中心, r_0 为最大内切圆半径, Δ 满足

$$\Delta = \min_{x_0} \{ \min [r | A(x_0, r) \supset s] - r_0 \}$$

称 Δ 为以最大内切圆为参考圆的圆度误差。

定义 4 若 r_{20} 、 r_{10} 和 x_0 满足

$$\begin{cases} r_{20} - r_0 = \min \{ (r_2 - r_1) | A(x, r_2) \supset s, A(x, r_1) \subset s \} \\ A(x_0, r_{10}) \subset s, A(x_0, r_{20}) \supset s \end{cases}$$

Δ 满足

$$\Delta = r_{20} - r_{10}$$

称 $A(x_0, r_{10})$ 为最小区域内圆, $A(x_0, r_{20})$ 为最小区域外圆, x_0 为最小区域圆评定中心, Δ 为以最小区域圆为参考圆的圆度误差。

根据定义1至定义4,可以给出圆度评定的数学模型。假设对于某一基准中心采样实际轮廓曲线得到一系列极坐标点 (θ_i, r_i) ,把它表示成直角坐标形式:

$$\begin{cases} x_i = r_i \cos \alpha_i \\ y_i = r_i \sin \alpha_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

存在一参考圆 $A(x_0, r)$ 与轮廓曲线包容的集合的交集不为空集 $\{A(x_0, r) \cap s \neq \emptyset\}$ 且 $x_0 \in s$,令

$$R = \| X - x_0 \| \quad (\text{其中 } \| X - x_0 \| \text{ 表示范数})$$

代入 $X = (x_i, y_i)^T$, $x_0 = (x, y)^T$ (右上角的 T 表示转置), 则

$$R_i = [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]^{\frac{1}{2}}, i = 1, 2, \dots, N$$

假设评定中心 $x_0 = (a, b)^T$ 满足定义 2, 此时

$$r_{MC}(a, b) = \min_{(x, y)} (\max_{1 \leq i \leq N} R_i) = \min_{(x, y)} [\max_{1 \leq i \leq N} \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}]$$

即为最小外接圆半径, 圆度误差为

$$\Delta_{MC}(a, b) = r_{MC}(a, b) - \min_{1 \leq i \leq N} \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2}$$

若评定中心 $x_0(a, b)^T$ 满足定义 3, 则

$$r_{MI}(a, b) = \max_{(x, y)} (\min_{1 \leq i \leq N} R_i) = \max_{(x, y)} [\min_{1 \leq i \leq N} \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}]$$

即为最大内切圆半径, 圆度误差为

$$\Delta_{MI}(a, b) = \min_{(a, b)} [\max_{1 \leq i \leq N} \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2} - r_{MI}(a, b)]$$

若评定中心 $x_0 = (a, b)^T$ 满足定义 4, 则圆度误差可表述为

$$\Delta_{MZ}(a, b) = \min_{(x, y)} [\max_{1 \leq i \leq N} \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} - \min_{1 \leq i \leq N} \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}]$$

对于最小二乘圆评定方法, 作者在文献[4]已证明其通用公式并给出一种提高精度的 Monte Carlo 方法, 本文对此不再赘述,

三、圆度评定数学模型解的存在性及唯一性

根据前述圆度评定有关参数的定义及数学模型的讨论得知: 评定中心 $x_0 = (x, y)^T \in S$, 假设轮廓曲线上任意两点之距的最大值为 t , 则对于任一采样点 $(x_i, y_i)^T$, 存在

$$\sup \{ \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} : (x, y)^T \in S \} = t$$

$$\inf \{ \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} : (x, y)^T \in S \} = 0$$

式中 \sup 和 \inf 表示上确界和下确界。

进而可推知, 对任意的 $(x, y)^T$, 下述式子成立。

$$0 \leq \max_{1 \leq i \leq N} \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \leq t$$

$$0 \leq \min_{1 \leq i \leq N} \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \leq t$$

$$0 \leq \max_{1 \leq i \leq N} \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} - \min_{1 \leq i \leq N} \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \leq t$$

由此, Δ_{MC} 、 Δ_{MI} 和 Δ_{MZ} 的存在性得证。

关于评定中心的唯一性, 我们给出一定理。

定理 E^2 中轮廓曲线的最小外接圆的评定中心是唯一的, 最大内切圆和最小区域圆的评定中心不都是唯一的。

证

(1) 最小外接圆评定中心具有唯一性: 若轮廓曲线的最小外接圆半径为 R_{\min} , 假设存在在评定中心 $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 满足最小外接圆定义。以 x_i 为圆心, R_{\min} 为半径作 m 个最小外接圆, 这 m 个最小外接圆必相交, 其交集包容轮廓曲线, 交集边界任意两点之距小于 $2 \times R_{\min}$ 。若交集边界任意两点之距的最大值为 $2R'$, 则以这两点连线中点为中心, R' 为半径

的圆包容轮廓曲线, 由于 $R' < R_{\min}$, 从而 R_{\min} 不为最小, 因此, 最小外接圆评定中心是唯一的。

(2) 最大内切圆的评定中心不都是唯一的: 若轮廓曲线的最大内切圆半径为 R_{\max} , 假设满足最大内切圆定义的评定中心都是唯一的。如图2(a)所示, 以 x_1 和 x_2 为圆心、 R 为半径作两个圆, 两圆的外切线交两圆于 A, B, C, D , 显然, 对于轮廓曲线 $\overline{ABFCDEA}$, x_1 和 x_2 为端点的连线上的点均是最大内切圆评定中心。由此可见“满足最大内切圆定义的评定中心是唯一的”这一命题不成立。图2(b)是以 mn 为界线左右对称的轮廓曲线, 该轮廓曲线具有两个评定中心, 按照这两个评定中心算出的圆度误差值是相等的。对于图2(a), 尽管存在无穷多评定中心, 但只有一个评定中心 $(x_1 + x_2)/2$ 算得的圆度误差值才是符合定义的。这个不同点对以后数学模型的求解将带来影响。

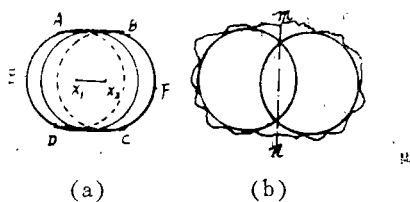


图2

(3) 最小区域圆的评定中心不都是唯一的: 假设评定中心是唯一的。如图3所示, 有一轮廓曲线被内实圆 x_1 和外实圆 x_2 所包容, 图中 δ 是基于最小区域圆的圆度误差, 以 x_2 为圆心作一个内虚圆 x_2 内切于内实圆 x_1 的 A 点, 此时 x_2 是满足最小区域圆定义的评定中心, 内虚圆 x_2 为最小区域内圆, 外实圆 x_2 为最小区域外圆; 若以 x_1 为圆心, 作外虚圆 x_1 , 内切于外实圆 x_2 的 B 点, 则 x_1 也是满足最小区域圆定义的评定中心, 此时内实圆 x_1 是最小区域内圆, 外虚圆 x_1 是最小区域外圆。由此即证照了命题“满足最小区域圆定义的评定中心是唯一的”不成立, 因此, 最小区域圆评定中心不都是唯一的。

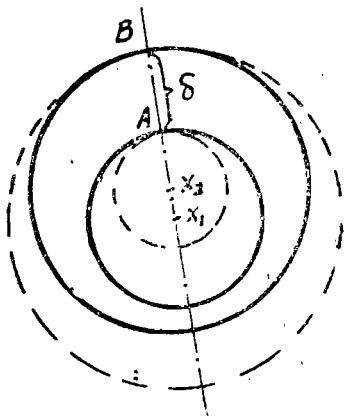


图3

四、解圆度误差数学模型的改进单纯形法

单纯形法是非线性规划无约束最优化方法中的直接搜索方法, 它由spendley^[5]于1962年最早提出, 以后经过Nelder和Mead^[6]的改进, 成为一种较为实用的优化方法。其基本思想是形成一初始单纯形, 对各顶点的目标函数值进行比较, 用一个最好的顶点代替原来最坏的顶点以逐步逼近最优值(如图4中, 以 $U^{(R)}$ 或 $U^{(S)}$ 或 $U^{(B)}$ 代替 $U^{(H)}$)。

考虑圆度误差评定数学模型, 假设目标函数为 $\Delta = F(u)$, 由于是一个二维问题, 所以单纯形是 E^2 中的三角形。给定单纯形初始点 $u^{(1)} = (a, b)^T$, 其中 $a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$, $b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$,

而 x_i 和 y_i 分别是误差采样值的直角坐标表示。再取 $U^{(2)} = (a+p, b+q)^T$, $U^{(3)} = (a+q, b+p)$, 其中 $p = \frac{t}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)$, $q = \frac{t}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)$ 。容易验证, $U^{(1)}$ 、 $U^{(2)}$ 和 $U^{(3)}$ 组成一个正规单纯形, 它的任意两顶点之距为 $t^{[5]}$ 。单纯形边长 t 一般可根据实际需要给定, 这个数值是单纯形法搜索的步长。 t 越小, 搜索的精度越高, 但搜索时间越长, 通常单纯形法的迭代过程包括下述几种运算。

(1) 去掉最坏点;

选定单纯形初始顶点后, 首先计算 $F(U^{(i)})(i=1, 2, 3)$, 然后比较它们的大小, 决定最差点 H 、最好点 L 以及中间点 G ; 去掉最差点 H , 计算 L 点与 G 点的重心 F

$$U^{(F)} = \frac{1}{2}(U^{(L)} + U^{(G)}).$$

(2) 求反射点 R

$$U^{(R)} = U^{(F)} + \alpha(U^{(F)} - U^{(H)}),$$

其中 $\alpha > 0$ 为给定的反射系数。

(3) 求扩张点 E ;

若 $F(U^{(R)}) < F(U^{(L)})$, 将向量 $U^{(R)} - U^{(F)}$ 扩张可得

$$U^{(E)} = U^{(F)} + \tau(U^{(R)} - U^{(F)})$$

其中 $\tau > 1$ 为给定的扩张系数。

若 $F(U^{(E)}) \leq F(U^{(R)})$, 则以 $U^{(E)}$ 代替 $U^{(H)}$ 得新的单纯形 $\{U^{(E)}, U^{(G)}, U^{(L)}\}$; 否则以 $U^{(R)}$ 代替 $U^{(H)}$ 得单纯形 $\{U^{(R)}, U^{(G)}, U^{(L)}\}$ 。

(4) 求收缩点 S ; 若 $F(U^{(R)}) > F(U^{(G)})$, 则将向量 $U^{(R)} - U^{(F)}$ 压缩, 得

$$U^{(S)} = U^{(F)} + \beta(U^{(R)} - U^{(F)})$$

若 $F(U^{(R)}) > F(U^{(H)})$, 则将向量 $U^{(H)} - U^{(F)}$ 压缩, 得

$$U^{(S)} = U^{(F)} + \beta(U^{(H)} - U^{(F)})$$

其中 $0 < \beta < 1$ 为给定的压缩系数。

(5) 缩短边长: 若 $F(U^{(S)}) > F(U^{(H)})$, 则说明不能沿 H 反射方向搜索, 这时应进行单纯形缩边, 即以最好的点 L 为基点将 GHL 缩小一半, 再以此新的单纯形用上述方法寻优。

对于上述 α 、 β 和 γ 的选取, Nelder和Mead指出它们的适宜值为 $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 2$ 。对于算法的终结条件Nelder和Mead建议取为

$$\left\{ \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 [F(U^{(i)}) - F(U^{(F)})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

其中 ε 为一个给定的任意小数。

图4给出 R^2 中单纯形的一个实例, 迭代过程的详细原理参见文献[7], 我们编制了相应的应用软件, 利用该软件可选择或同时求出最小二乘圆、最大内切圆、最小外接圆和最小区域圆的

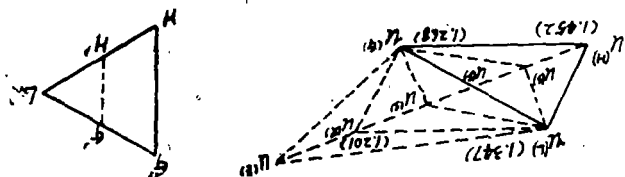


图4

圆度值。

五、适应性验证

1. 模拟验证

构造模拟工件如图5(a), 该工件轮廓被两个圆心分别在 O_1 和 O_2 的圆所包容, 以圆心 O_2 为极坐标原点, 令采样点的极坐标为 $(r_k, \theta_k)^T$, 假设圆心 O_1 在某一直角坐标系的坐标为 $(x_1, y_1)^T$, 圆心 O_2 在该直角坐标为 $(x_2, y_2)^T$, 若 r_k, θ_k 满足下式:

$$r_k = \begin{cases} r_{\min}, & k \text{ 为奇数} \\ \{ r_{\max}^2 - [(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2] \sin^2(\alpha - \theta_k) \}^{1/2}, & k \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$\theta_k = \frac{2\pi}{2p}(k-1)$$

式中, $k=1, 2, \dots, 2p$, $2p$ 为采样点数。则轮廓曲线采样点必然相间在圆 O_1 和 O_2 上, 对不同的 x_1, y_1 和 x_2, y_2 , 若 $\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\}^{1/2} \leq r_{\max} - r_{\min}$, 给定变化的 r_{\min} 和 r_{\max} , 考察软件的执行情况, 结果发现各种参考圆圆度误差值与真值 δ 相差甚小, 表1给出的实例说明了这一点。事实上, IBM-PC 微机实型数的有效位数为小数点后6位, 如果改实型数为双精度数, 则精度还将提高。

作为一个特例, 当图5(a)中圆心 O_1 和圆心 O_2 重合时, 则轮廓曲线位于两个半径差为 δ 的同心圆之间(图5b), 这时最小区域圆评定中心从多值转化为唯一。若以同心圆为极坐标原点, 则 r_k, θ_k 满足下式

$$r_k = \begin{cases} r_{\min} & k \text{ 为奇数} \\ r_{\max} & k \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$\theta_k = \frac{2\pi}{2p}(k-1)$$

式中, $k=1, 2, \dots, 2p$, $2p$ 为采样点数。

在直角坐标系的不同位置选取极坐标原点和不同的 r_{\min} 和 r_{\max} , 经软件运行, 结果表明其精度较高, 表2给出了一个实例。

表1 ($r_{\min} = 33.562\text{mm}$, $r_{\max} = 33.586\text{mm}$, 采样点数 $N = 360$)

考察项	真值	最小区域圆	最小外接圆	最大内切圆
圆度值 $\delta(\text{mm})$	0.046363	0.046364	0.046371	0.046364
评定中心 x	$x_1 = 0.41; x_2 = 0.442$	0.414111	0.420002	0.410003
评定中心 y	$y_1 = 0.28; y_2 = 0.26$	0.288161	0.299997	0.280004

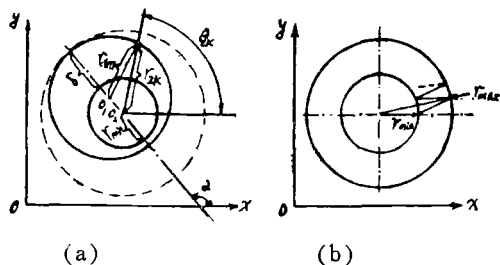


图5

表 2 ($r_{\text{min}} = 28.315\text{mm}$, $r_{\text{max}} = 28.317\text{mm}$, 采样点数 $N = 360$)

考察项	真值	最小区域圆	最小外接圆	最大内切圆
圆度值 $\delta(\text{mm})$	0.002000	0.002005	0.002005	0.002010
评定中心 x	0.52	0.520000	0.520000	0.519999
评定中心 y	0.75	0.750000	0.750000	0.750000

2. 与文献[2]方法的精度比较

文献[2]提出一种圆度误差最小区域圆线性处理的解析方法, 为了对照不同方法的计算结果, 引用该文献所列的数据(表3), 这些数据是用万能工具显微镜测量 $\phi 20\text{mm}$ 轴的圆度, 每隔 30° 采一点. 利用文献[2]解析方法得出的圆度误差为 $3.683\mu\text{m}$, 而用对板法测得的圆度误差为 $3.8\mu\text{m}$. 本文算法得出的圆度误差为 $3.500\mu\text{m}$. 显然, 解析法求出的圆度误差不能满足最小区域条件.

表 3 (单位为 μm)

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
角度($^\circ$)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
偏差	6	7	5	3.5	5	7.5	4.5	6.5	7	4.5	6.5	6.5

3. 与 TAYLOR-73 型圆度仪实测数据的比较

把 MGB135 磨床加工的某一零件用 TAYLOR-73 型圆度仪实测(由福建中检所测试)并绘制出圆度误差轮廓曲线, 然后利用万能工具显微镜对误差曲线进行采样, 采样数据输入 IBM-PC 微机由我们编制的软件执行(图4给出了最小区域圆评定的单纯形搜寻初始数值情况), 两者的圆度值结果如表4.

表 4 (单位 μm , 采样点数 $N = 72$, 采样间隔 5°)

被考察的参考圆	最小区域圆	最小外接圆	最大内切圆
TAYLOR-73 测量值	1.163	1.284	1.190
自编软件执行值	1.098	1.196	1.134

从表4可知, 自编的软件执行情况与 TAYLOR-73 型圆度仪求得的结果相差不多, 这说明所编制的软件是可行的. 表4中自编软件执行值小于 TAYLOR-73 测量值, 这可能是采样点数太少所致.

六、结 论

本文较为系统地研究了圆度评定中一系列数学问题,提出了新的处理方法,经过计算机仿真和实例验证,文中的方法具有较高的优越性。

本文承陈希达教授指导,作者在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] 魏仁琛, 正确评定圆度误差, 华东六省一市几何量测量学术讨论会论文集, (1984)。
- [2] 曹麟详等, 圆度、圆柱度和同轴度的测量原理及数据处理的解析方法, 机械工程学报, 19, 1 (1983)。
- [3] 余坚, 圆度仪测量中圆度误差评定的四种数据计算机处理方法, 磨床与磨削, 4 (1982)。
- [4] 陈宝珊、陈希达, 回转轴心与平均回转轴心的定义及求法, 振动与动态测试, 3 (1986)。
- [5] Spendley, W., Hext, G.R. and Himsworth, F.R., Sequential Application of Simplex Designs in Optimization and Evolutionary Operation, Technometrics, 4(1962)。
- [6] Nelder, J.A. and Mead, R., A Simplex Method for Function Minimization, Computer J. 7(1965)。
- [7] 邓乃扬著, 无约束最优化计算方法, 科学出版社, (1982)。

Mathematical Description and Data Processing of Workpiece Roundness Error

Chen Baoshan

Abstract

For improving the precision of workpiece roundness evaluation, complicate mathematics must be involved.

In this paper, a strict mathematical definition of evaluation system parameters of workpiece roundness is given at first; and then, a mathematical model for roundness evaluation is proposed and existence and uniqueness of its solution are discussed; and finally, a new method of data processing is investigated.

The examples given in this paper show a satisfactory precision of processing.