第9卷 第3期 华侨大学学报自然科学版 Vol.9 No.3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1988年 8月 (NATURAL SCIENCE) Aug. 1988

关于矩阵迹的不等式

林永发

(应用数学系)

摘要

本文给出了关于任意n阶复矩阵迹的几个不等式，作为它的推论，包括了文［1，2］中相应的内容，并拓广到反厄米特矩阵和Cauchy不等式。同时从另一个角度就两两可交换的正定厄米特矩阵的迹给出了算术平均-几何平均不等式的另一种推广，进一步回答了文〔1〕所提出的问题.最后把文［3］定理2的结果应用到反厄米特矩阵，得出了相应的不等式.

一、引言

R. Bellman在文〔1〕对n阶正定实矩阵建立了与Cauchy-Schwarz不等式相类似的结果，并提出这样的问题：对于算术平均-几何平均不等式，矩阵里是否有类似的结论？冯慈璜在文〔2，3〕把文〔1〕的结果拓广到厄米特矩阵的情形，并就算术平均-几何平均不等式在矩阵里的类似做了许多有意义的工作，本文把文〔2〕进一步拓广，建立了若干不等式．并就算术平均-几何平均不等式在矩阵里的类似得出另一个结果.

二、定理及其证明

设n阶矩阵$A=(a_{ij})$，i，$j=1$，2，$\cdots$，n，其中a_{ij}都是复数，称$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$为矩阵A的迹，记作$\mathrm{tr}A$．用$\bar{z}$表示复数z的共轭，$\mathrm{Re}z$表示z的实部，$\mathrm{Im}z$表示z的虚部，A^T表示A的转置，A^*表示A的转置共轭．如果$A^*=A$，称A为厄米特（Hermite）矩阵，如果$A^*=-A$，称A为反厄特米矩阵．

引理1 设$A=(a_{ij})$是n阶复矩阵，则

$$\mathrm{tr}(AA^*)\geqslant 0$$

本文1987年5月15日收到.

等号当且仅当$A=0$时成立。

证明　$\operatorname{tr}(AA^*)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\bar{a}_{ij}\geqslant 0$。证毕。

引理 2　若A是n阶厄米特矩阵，则

$$\operatorname{tr}A^2\geqslant 0$$

等号当且仅当$A=0$时成立；若A是n阶反厄米特矩阵，则

$$\operatorname{tr}A^2\leqslant 0$$

等号当且仅当$A=0$时成立。

证明　当$A^*=A$时，$\operatorname{tr}A^2=\operatorname{tr}(AA^*)\geqslant 0$，$A^*=-A$时，$\operatorname{tr}A^2=\operatorname{tr}(-AA^*)=-\operatorname{tr}(AA^*)\leqslant 0$。证毕。

引理 3　设A、B是两个n阶反厄米特矩阵，则$\operatorname{tr}(AB)$是实数。

证明　因为$\overline{\operatorname{tr}(AB)}=\operatorname{tr}(\overline{AB})=\operatorname{tr}(\overline{AB})^T=\operatorname{tr}(B^*A^*)=\operatorname{tr}(BA)=\operatorname{tr}(AB)$。所以$\operatorname{tr}(AB)$是实数。证毕。

定理 1　设A、B是两个n阶复矩阵，则

$$2|\operatorname{Re}[\operatorname{tr}(AB^*)]|\leqslant\operatorname{tr}(AA^*)+\operatorname{tr}(BB^*)\tag{1}$$

等号当且仅当$A=B$或$A=-B$时成立；

$$2|\operatorname{Im}[\operatorname{tr}(AB^*)]|\leqslant\operatorname{tr}(AA^*)+\operatorname{tr}(BB^*)\tag{2}$$

等号当且仅当$A=iB$或$A=-iB$时成立（i是虚数单位，下同）。

证明　由$(A-B)(A-B)^*=(A-B)(A^*-B^*)=AA^*+BB^*-AB^*-BA^*$，两边取迹，并利用引理1得

$$0\leqslant\operatorname{tr}[(A-B)(A-B)^*]=\operatorname{tr}(AA^*)+\operatorname{tr}(BB^*)-\operatorname{tr}(AB^*)-\operatorname{tr}(BA^*)$$

等号当且仅当$A=B$时成立。

由于$(BA^*)^*=AB^*$，所以$\operatorname{tr}(BA^*)=\overline{\operatorname{tr}(AB^*)}$，故

$$2\operatorname{Re}[\operatorname{tr}(AB^*)]\leqslant\operatorname{tr}(AA^*)+\operatorname{tr}(BB^*)\tag{3}$$

又由$(A+B)(A+B)^*=AA^*+BB^*+AB^*+BA^*$，两边取迹得

$$-2\cdot\operatorname{Re}[\operatorname{tr}(AB^*)]\leqslant\operatorname{tr}(AA^*)+\operatorname{tr}(BB^*)\tag{4}$$

等号当且仅当$A=-B$时成立。

由式(3)、(4)立得式（1）。

用iA、B分别代替式（1）中A、B得

$$2|\operatorname{Re}[\operatorname{tr}(iAB^*)]|\leqslant\operatorname{tr}[(iA)(iA)^*]+\operatorname{tr}(BB^*)$$

等号当且仅当$A=iB$或$A=-iB$时成立，即

$$2|\operatorname{Re}[i\operatorname{tr}(AB^*)]|\leqslant\operatorname{tr}(AA^*)+\operatorname{tr}(BB^*)$$

$$2|\operatorname{Im}[\operatorname{tr}(AB^*)]|\leqslant\operatorname{tr}(AA^*)+\operatorname{tr}(BB^*)$$

证毕。

定理 2　设A、B是两个n阶复矩阵，则

$$|\operatorname{Re}[\operatorname{tr}(AB^*)]|\leqslant[\operatorname{tr}(AA^*)]^{\frac{1}{2}}\cdot[\operatorname{tr}(BB^*)]^{\frac{1}{2}}$$

或

$$[\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB^*))]^2\leqslant[\mathrm{tr}(AA^*)]\cdot[\mathrm{tr}(BB^*)] \tag{5}$$

等号当且仅当A是B的实数倍或B是A的实数倍时成立；

$$[\mathrm{Im}(\mathrm{tr}(AB^*))]^2\leqslant[\mathrm{tr}(AA^*)]\cdot[\mathrm{tr}(BB^*)] \tag{6}$$

等号当且仅当A是B的纯虚数倍或B是A的纯虚数倍时成立。

证明　当A、B中有一个是零矩阵时。定理显然成立。

当A、B都不是零矩阵时，据引理1知，$\mathrm{tr}(AA^*)>0$，$\mathrm{tr}(BB^*)>0$，用$[\mathrm{tr}(AA^*)]^{-1/2}A$，$[\mathrm{tr}(BB^*)]^{-1/2}B$分别代替式（1）中$A$、$B$得

$$2\left|\mathrm{Re}\left[\mathrm{tr}\left(\frac{A}{[\mathrm{tr}(AA^*)]^{1/2}}\cdot\frac{B^*}{[\mathrm{tr}(BB^*)]^{1/2}}\right)\right]\right|\leqslant\mathrm{tr}\left(\frac{AA^*}{\mathrm{tr}(AA^*)}\right)+\mathrm{tr}\left(\frac{BB^*}{\mathrm{tr}(Bb^*)}\right)$$

等号当且仅当A是B的实数倍或B是A的实数倍时成立。即

$$2\left|\frac{\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB^*)]}{[\mathrm{tr}(AA^*)]^{1/2}\cdot[\mathrm{tr}(BB^*)]^{1/2}}\right|\leqslant 2$$

$$|\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB^*)]|\leqslant[\mathrm{tr}(AA^*)]^{1/2}[\mathrm{tr}(BB^*)]^{1/2}$$

$$[\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB^*))]^2\leqslant[\mathrm{tr}(AA^*)][\mathrm{tr}(BB^*)]$$

同理，用$[\mathrm{tr}(AA^*)]^{-(1/2)}A$，$[\mathrm{tr}(BB^*)]^{-(1/2)}B$分别代替式（2）中$A$、$B$得

$$2\left|\mathrm{Im}\left[\mathrm{tr}\left(\frac{A}{[\mathrm{tr}(AA^*)]^{1/2}}\cdot\frac{B^*}{[\mathrm{tr}(BB^*)]^{1/2}}\right)\right]\right|\leqslant 2$$

$$[\mathrm{Im}(\mathrm{tr}(AB^*))]^2\leqslant[\mathrm{tr}(AA^*)][\mathrm{tr}(BB^*)]$$

证毕。

定理3　设A、B是两个n阶复矩阵，则

$$|\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB^*)^2]|\leqslant\mathrm{tr}(A^*AB^*B) \tag{7}$$

等号当且仅当$AB^*=BA^*$或$AB^*=-BA^*$时成立。

证明　由于$(AB^*-BA^*)^2=(AB^*)^2+(BA^*)^2-AB^*BA^*-BA^*AB^*$。$AB^*-BA^*$是反厄米特矩阵，两边取迹

$$0\geqslant\mathrm{tr}(AB^*-BA^*)^2=\mathrm{tr}(AB^*)^2+\mathrm{tr}(BA^*)^2-\mathrm{tr}(AB^*BA^*)-\mathrm{tr}(BA^*AB^*)$$

等号当且仅当$AB^*=BA^*$时成立。即

$$\mathrm{tr}(AB^*)^2+\mathrm{tr}(BA^*)^2\leqslant 2\cdot\mathrm{tr}(A^*AB^*B)$$

由于$[(AB^*)^2]^*=(BA^*)^2$，所以$\mathrm{tr}(BA^*)^2=\overline{\mathrm{tr}(AB^*)}^2$，因此

$$\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB^*)^2]\leqslant\mathrm{tr}(A^*AB^*B) \tag{8}$$

同理，由于$(AB^*+BA^*)^2=(AB^*)^2+(BA^*)^2+AB^*BA^*+BA^*AB^*$，$AB^*+BA^*$是厄米特矩阵，两边取迹得

$$-\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB^*)^2]\leqslant\mathrm{tr}(A^*AB^*B) \tag{9}$$

等号当且仅当$AB^*=-BA^*$时成立。

由式（8）、（9）立得式（7）。证毕。

推论1　设A、B是两个n阶酉矩阵，则

$$|\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB)]|\leqslant n$$

等号当且仅当$A=B^{-1}$或$A=-B^{-1}$时成立；

$$|\mathrm{Im}[\mathrm{tr}(AB)]|\leqslant n$$

等号当且仅当$A=iB^{-1}$或$A=-iB^{-1}$时成立。

证明　因为B是酉矩阵，所以B^*也是酉矩阵。对A、B^*应用定理1得

$$2|\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A\cdot(B^*)^*)]|\leqslant \mathrm{tr}(AA^*)+\mathrm{tr}(B^*B)$$

等号当且仅当$A=\pm B^*=B^{-1}$时成立。由于$\mathrm{tr}(AA^*)=\mathrm{tr}(B^*B)=n$，则

$$|\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB)]|\leqslant n$$

同理，对A、B^*应用定理1之式（2）得

$$2|\mathrm{Im}[\mathrm{tr}(A\cdot(B^*)^*)]|\leqslant \mathrm{tr}(AA^*)+\mathrm{tr}(B^*B)$$

即

$$|\mathrm{Im}[\mathrm{tr}(AB)]|\leqslant n$$

等号当且仅当$A=\pm iB^*=\pm iB^{-1}$时成立。证毕。

推论 2　设A、B是两个n阶厄米特矩阵，则下列不等式成立：

$$|2\mathrm{tr}(AB)|\leqslant \mathrm{tr}A^2+\mathrm{tr}B^2 \tag{10}$$

等号当且仅当$A=B$或$A=-B$时成立；

$$[\mathrm{tr}(AB)]^2\leqslant(\mathrm{tr}A^2)(\mathrm{tr}B^2) \tag{11}$$

等号当且仅当A是B的实数倍或B是A的实数倍时成立；

$$|\mathrm{tr}(AB)^2|\leqslant \mathrm{tr}(A^2B^2) \tag{12}$$

等号当且仅当$AB=BA$或$AB=-BA$时成立。

证明　利用定理1之式（1），定理2之式（5），并注意两个厄米特矩阵乘积的迹是实数，易得式（10）、（11），下证式（12）。

利用定理3得

$$|\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB)^2]|\leqslant \mathrm{tr}(A^2B^2)$$

等号当且仅当$AB=BA$或$AB=-BA$时成立。

由于$\overline{\mathrm{tr}(AB)^2}=\mathrm{tr}\overline{(AB)^2}=\mathrm{tr}(A^TB^T)^2=\mathrm{tr}[(BA)^T]^2=\mathrm{tr}[(BA)^2]^T=\mathrm{tr}(BA)^2=\mathrm{tr}(BABA)$ $=\mathrm{tr}(ABAB)=\mathrm{tr}(AB)^2$，所以，$|\mathrm{tr}(AB)^2|\leqslant(\mathrm{tr}(A^2B^2)$。证毕。

由于实对称矩阵也是厄米特矩阵，本推论对n阶实对称矩阵成立。

推论 3　（Cauchy-Bunyakoisky不等式）对任意实数序列$a_1, a_2, \cdots, a_n$；$b_1, b_2, \cdots, b_n$都有

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$$

等号当且仅当$a_k=cb_k$或$b_k=ca_k(k=1, 2, \cdots, n)$时成立。其中$c$是实常数。

证明　令实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_n & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}a_kb_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ 0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

所以，

$$\mathrm{tr}(AB)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+a_1b_1+\cdots+a_nb_n=2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

同理，$\mathrm{tr}A^2=2\cdot\sum_{k=1}^{u}a_k^2$，$\mathrm{tr}B^2=2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2$。根据推论2之式（11）得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

等号当且仅当$a_k=cb_k$或$b_k=ca_k(k=1,2,\cdots,n)$时成立。

推论 4　设A、B是两个n阶反厄米特矩阵，则

$$\mathrm{tr}A^2+\mathrm{tr}B^2\leqslant-2\left|\mathrm{tr}(AB)\right| \tag{13}$$

等号当且仅当$A=B$或$A=-B$时成立；

$$[\mathrm{tr}(AB)]^2\leqslant(\mathrm{tr}A^2)\cdot(\mathrm{tr}B^2) \tag{14}$$

等号当且仅当A是B的实数倍或B是A的实数倍时成立；

$$\mathrm{tr}(AB)^2\leqslant\mathrm{tr}(A^2B^2) \tag{15}$$

等号当且仅当$AB=BA$或$AB=-BA$时成立。

证明　对A、B^*应用定理1之式（1）得

$$2\left|\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB)]\right|\leqslant\mathrm{tr}(-A^2)+\mathrm{tr}(-B^2)$$

等号当且仅当$A=B$或$A=-B$时成立。

据引理3知式（13）成立。

同理，对A、B^*应用定理2之式（5），易得式（14）。

由于$\mathrm{tr}(AB^*)^2=\mathrm{tr}(-AB)^2=\mathrm{tr}(AB)^2$，并且$\overline{\mathrm{tr}(AB)^2}=\mathrm{tr}(\overline{AB})^2=\mathrm{tr}[(-A^T)(-B^T)]^2=\mathrm{tr}[(BA)^T]^2=\mathrm{tr}[(BA)^2]^T=\mathrm{tr}(BA)^2=\mathrm{tr}(AB)^2$。

所以$\mathrm{tr}(AB^*)^2=\mathrm{tr}(AB)^2$是实数．应用定理3得

$$\left|\mathrm{tr}(AB)^2\right|\leqslant\mathrm{tr}[(-A)\cdot A\cdot(-B)\cdot B]$$

即

$$\left|\mathrm{tr}(AB)^2\right|\leqslant\mathrm{tr}(A^2B^2)$$

证毕。

下面就n阶正定厄米特矩阵来推导类似于算术平均-几何平均不等式的不等式，为此先证

引理 4　设A、B是两个n阶正定厄米特矩阵，$AB=BA$，则AB是正定厄米特矩阵。

证明　设λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n是A的特征值，则$\lambda_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$。且存在酉矩阵U，

获得

$$U^*AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n)$$

令 $U^*AU=A_1$，$U^*BU=B_1$，$C=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ \sqrt{\lambda_2},\ \cdots,\ \sqrt{\lambda_n})$，于是$B_1$是正定厄米特矩阵，且

$$A_1B_1=U^*AUU^*BU=U^*ABU=U^*BAU=B_1A_1$$

由于 $A_1B_1=B_1A_1$，直接计算易知 $CB_1=B_1C$，从而$AB=UA_1U^*UB_1U^*=UA_1B_1U^*=UC^2B_1U^*=U(CB_1C)U^*$，由于$B_1$正定，则$CB_1C$正定[4]，故$AB$正定。证毕。

引理 5 设A是n阶正定厄米特矩阵，则

$$\mathrm{tr}(A^2)\leqslant(\mathrm{tr}A)^2$$

等号当且仅当$n=1$时成立。

证明 设λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n为A的特征值，则$\lambda_i>0$，$i=1$，2，$\cdots$，n，且λ_1^2，λ_2^2，$\cdots$，λ_n^2是A^2的特征值，因此

$$\mathrm{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$$
$$\mathrm{tr}A^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2$$

由于$\lambda_i>0$，显然有

$$\mathrm{tr}A^2\leqslant(\mathrm{tr}A)^2$$

等号当且仅当$n=1$时成立。证毕。

引理 6 设A、B是两个n阶正定厄米特矩阵，则

$$\mathrm{tr}(AB)\leqslant(\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}B)$$

等号当且仅当$n=1$时成立。

证明 由推论 2 及引理 5 得

$$[\mathrm{tr}(AB)]^2\leqslant(\mathrm{tr}A^2)(\mathrm{tr}B^2)\leqslant(\mathrm{tr}A)^2(\mathrm{tr}B)^2$$

等号当且仅当$n=1$时成立。把两边开平方后得

$$\mathrm{tr}(AB)\leqslant(\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}B)$$

证毕。

定理 4 设A_1，A_2，$\cdots$，$A_m(m\geqslant2)$是两两可交换的n阶正定厄米特矩阵，则

$$[\mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_m)]^{\frac{1}{m}}\leqslant\frac{\mathrm{tr}(A_1+A_2+\cdots+A_m)}{m} \tag{16}$$

等号当且仅当$n=1$ 且$A_1=A_2=\cdots=A_m$时成立。

证明 据引理 4 知，$A_1A_2\cdots A_k(1\leqslant k\leqslant m)$是正定的。据引理 6 得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_m)&\leqslant[\mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_{m-1})](\mathrm{tr}A_m)\\&\leqslant[\mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_{m-2})](\mathrm{tr}A_{m-1})(\mathrm{tr}A_m)\\&\leqslant\cdots\\&\leqslant(\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_2)\cdots(\mathrm{tr}A_m)\end{aligned}$$

等号当且仅当$n=1$时成立。

对正实数$\mathrm{tr}A_1$，$\mathrm{tr}A_2$，$\cdots$，$\mathrm{tr}A_m$应用算术平均-几何平均不等式，得

$$[(\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_2)\cdots(\mathrm{tr}A_m)]^{\frac{1}{m}}\leqslant\frac{\mathrm{tr}A_1+\mathrm{tr}A_2+\cdots+\mathrm{tr}A_m}{m}$$

等号当且仅当$\mathrm{tr}A_1=\mathrm{tr}A_2=\cdots=\mathrm{tr}A_m$时成立。故有

$$[\mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_m)]^{\frac{1}{m}}\leqslant\frac{\mathrm{tr}(A_1+A_2+\cdots+A_m)}{m}$$

等号当且仅当$n=1$且$A_1=A_2=\cdots=A_m$时成立。证毕。

显然，当$n=1$时，A_1，A_2，$\cdots$，A_m都是正实数，式(16)就是通常的算术平均-几何平均不等式。

推论 5　设A_1，A_2，$\cdots$，$A_m(m\geqslant2)$是两两可交换的n阶正定实对称矩阵，则

$$[\mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_m)]^{\frac{1}{m}}\leqslant\frac{\mathrm{tr}(A_1+A_2+\cdots+A_m)}{m}$$

等号当且仅当$n=1$且$A_1=A_2=\cdots=A_m$时成立。

定理 4 和推论 5 给出了文[1]中所提问题的一个肯定回答。

作为本文的结束，可把文[3]定理 2 的结果拓广到反厄米特矩阵。为此，先把文[3]定理 2 抄录于下：

设A_1，A_2，$\cdots$，A_m为n阶两两可交换的正定厄米特矩阵，则

$$\mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_m)\leqslant\frac{\mathrm{tr}(A_1^m)+\mathrm{tr}(A_2^m)+\cdots+\mathrm{tr}(A_m^m)}{m}$$

等号成立当且仅当$A_1=A_2=\cdots=A_m$。

我们知道，如果A与iA中有一个是厄米特矩阵，则另一个必为反厄米特矩阵[4]，另外还有

引理 7　设A_1，$A_2,\cdots,A_m(m\geqslant2)$是两两可交换的$n$阶反厄米特矩阵，则当$m$为偶数时，$A_1A_2\cdots A_m$是厄米特矩阵，当$m$为奇数时，$A_1A_2\cdots A_m$为反厄米特矩阵。

证明　由$(A_1A_2\cdots A_m)^*=A_m^*A_{m-1}^*\cdots A_2^*A_1^*=(-1)^mA_1A_2\cdots A_m$，即得到结果。

定理 5　设iA_1，iA_2，$\cdots$，$iA_m(m\geqslant2)$是两两可交换的n阶正定厄米特矩阵，那么反厄米特矩阵A_1，A_2，$\cdots$，A_m满足

$$i^m\mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_m)\leqslant i^m\frac{\mathrm{tr}(A_1^m)+\mathrm{tr}(A_2^m)+\cdots+\mathrm{tr}(A_m^m)}{m}$$

等号当且仅当$A_1=A_2=\cdots=A_m$时成立。

特别地，当$m=4k$时(k为正整数)

$$\mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_m)\leqslant\frac{\mathrm{tr}(A_1^m)+\mathrm{tr}(A_2^m)+\cdots+\mathrm{tr}(A_m^m)}{m}$$

当$m=4k+2$时

$$\mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_m)\geqslant\frac{\mathrm{tr}(A_1^m)+\mathrm{tr}(A_2^m)+\cdots+\mathrm{tr}(A_m^m)}{m}$$

证明　对iA_1，iA_2，$\cdots$，iA_m应用文[3]定理 2 得

$$\mathrm{tr}[(iA_1)(iA_2)\cdots(iA_m)]\leqslant\frac{\mathrm{tr}[(iA_1)^m]+\mathrm{tr}[(iA_2)^m]+\cdots+\mathrm{tr}[(iA_m)^m]}{m}$$

则

$$i^m\cdot\mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_m)\leqslant i^m\cdot\frac{\mathrm{tr}(A_1^m)+\mathrm{tr}(A_2^m)+\cdots+\mathrm{tr}(A_m^m)}{m}$$

注意到$i^{4k}=1$，$i^{4k+2}=-1$，定理中的另两个结论就是显然的。证毕。

参 考 文 献

〔1〕Bellman, R., Some Inequalities for Positive Define Matrices, General Inequalities 2 (Backenbach, E.F., Ed), Birkhäuser Verlag, (1980), 89—90.

〔2〕冯慈璜，关于某些不等式的注记，杭州大学学报(自然科学版)，11，(1984)，25—27.

〔3〕冯慈璜，关于矩阵迹的不等式，杭州大学学报(自然科学版)，13，(1986)，416—420.

〔4〕张远达，线性代数原理，上海教育出版社，(1980)，285—310.

On the Inequalities of Matrix Trace

Lin Yongfa

Abstract

This paper puts forward some inequalities in relation to the trace of arbitrary infinite complex matrices, which extend to anti-Hermitian matrices and Cauchy inequality and embody the results in paper [1], [2] and [3] as corollaries.

For the trace of positive definite matrices which pairwise interchangeable, it puts forward, from another angle, another kind of extension to arithmetic mean-geometric mean inequality, and thus poses a further answer to the problem raised in paper [1].

And finally, it applies the results of Theorem 2 in paper [3] to anti-Hermitian matrices and obtains the corresponding inequalities.