第9卷 第2期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol. 9 No. 2
1988年5月　　JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE)　　May 1988

汇编语言 AND 指令之数学意义

侯 济 恭

〔计算机科学（电脑）系〕

摘　　要

本文讨论汇编语言程序设计AND指令的数学意义，同时证明了两个定理：用AND指令截取计算机内操作数D之左边n位操作等价于该操作数作E（$D/2^{L-n}$）$\times 2^{L-n}$运算（L为宿主计算机字长）；而截取D之右边n位操作则等价于该操作数作模2^n运算，即D（MOD 2^n）。

一、前　　言

用汇编语言进行程序设计时，经常要用到逻辑与运算指令，以截取操作数某几位信息。例如（以Z-80汇编语言为例）：

```
AND  03H  ；截取累加器A右边2位.
```

以及

```
ANA  0C0H  ；截取累加器A左边2位.
```

在计算机中，操作数（本文讨论的操作数均为无符号整数）左移一位操作相当于该数作乘2运算，而右移一位操作相当于该数作除2取整运算。现在的问题是：截取操作数右边n位操作（如AND 03H）相当于什么运算？截取左边n位操作（如AND 0C0H）又相当于什么运算？

为了方便讨论，在Z-80机的基础上，建立一台假想机，假想机的通用寄存器结构如下：

b_L	b_{L-1}		b_{i+1}	b_i	b_{i-1}		b_1	b_0

其中L为假想机的字长，例如对8位机，$L=7$。b_i为假想机第i位，相应的权为2^i，例如$i=6$则为第6位，其权为2^6。以Z-80机为例，如果数据D在累加器A中表示为

b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0
0	1	0	0	1	0	1	0

本文1987年4月17日收到。

则

$$D=b_6\times2^6+b_3\times2^3+b_1\times2^1+b_0\times2^0$$
$$=2^6+2^3+2^1+2^0=75$$

以下讨论，若为8位机，则为Z－80机，否则为假想机。

二、 截取操作数左边n位

先看下例。

例 1 LD A，53H ；操作数53H送累加器A。

AND 0F0H ；取A左边4位。

计算机运行结果如下：

	b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0
累加器A：	0	1	0	1	0	0	1	1
立即数FO：	1	1	1	1	0	0	0	0
AND结果：	0	1	0	1	0	0	0	0

逻辑结果为50H，相应的十进制数为

$$50H=2^6+2^4 \tag{1}$$

53H为十进制之83，亦即

$$53H=2^6+2^4+2^1+2^0$$

将83作如下除2^4然后取整数运算

$$E(83/2^4)=E((2^6+2^4+2^1+2^0)/2^4)=2^2+2^0$$

再乘以2^4，得

$$E(83/2^4)\times2^4=2^6+2^4 \tag{2}$$

式(1)和式(2)恰好相等。

命题 1 设计算机字长8位，则截取操作数D左边n位的操作等价于如下取整运算

$$E(D/2^{8-n})\times2^{8-n} \qquad (p-1)$$

证 用完全归纳法，很容易证明本命题。由$(p-1)$可得

$(p-1-1)$ $n=1$，$E(D/2^7)\times2^7$ $(p-1-2)$ $n=2$，$E(D/2^6)\times2^6$

$(p-1-3)$ $n=3$，$E(D/2^5)\times2^5$ $(p-1-4)$ $n=4$，$E(D/2^4)\times2^4$

$(p-1-5)$ $n=5$，$E(D/2^3)\times2^3$ $(p-1-6)$ $n=6$，$E(D/2^2)\times2^2$

$(p-1-7)$ $n=7$，$E(D/2^1)\times2^1$ $(p-1-8)$ $n=8$，$E(D/2^0)\times2^0$

当$n=1$时，亦即取左边一位。令

$$D=2^7\times b^7+x$$

其中

$$x=2^6\times b_6+2^5\times b_5+\cdots+2^1\times b_1+2^0\times b_0$$

因为$2^7\mid(2^7\times b_7)$即$E(2^7\times b_7/2^7)=b_7$，又因为$x<2^7$，所以

$$E(D/2^7)\times 2^7=b_7\times 2^7$$

可知，保留了操作数的最高有效位。$n=1$时$(p-1)$成立。

再证$n=3$情况。当$n=3$时，即截取D之b_7，b_6和b_5三位。令

$$D=2^7\times b_7+2^6\times b_6+2^5\times b_5+x$$

其中

$$x=2^4\times b^1+2^3\times b_3+2^2\times b_2+2^1\times b_1+2^0\times b_0$$

因为 $2^5\mid(2^7\times b_7+2^6\times b_6+2^5\times b_5)$，即

$$E((2^7\times b_7+2^6\times b_6+2^5\times b_5)/2^5)=2^2\times b_7+2^1\times b_6+2^0\times b_5$$

又因为$x<2^5$，所以

$$E(D/2^5)\times 2^5=E((2^2\times b_7+2^6\times b_6+2^5\times b_5)/2^5+x/2^5)\times 2^5$$
$$=2^7\times b_7+2^6\times b_6+2^5\times b_5$$

亦即保留了操作数左边三位。$n=3$时$(p-1)$成立。

$n=i$时证法同上，故略。

本结论可推广到字长为L位的机器。

命题 2　设计算机字长为L位。则截取操作数D左边n位操作等价于

$$E(D/2^{L-n})\times 2^{L-n}\qquad (p-2)$$

证　设截取D左边K位。令

$$D=2^{L-1}\times b_{L-1}+\cdots+2^{L-K}\times b_{L-K}+2^{L-(K+1)}\times b_{L-(K+1)}+\cdots+2^0\times b_0$$
$$x=2^{L-(K+1)}\times b_{L-(K+1)}+\cdots+2^{L-K}\times b_{L-K}$$

因为 $x<2^{L-k}$，又因为

$$2^{L-K}\mid(2^{L-1}\times b_{L-1}+\cdots+2^{L-K}\times b_{L-K})$$

所以

$$E(D/2^{L-K})\times 2^{L-K}=2^{L-1}\times b_{L-1}+\cdots+2^{L-K}\times b_{L-K}$$

亦即截取操作数左边K位。$n=k$时$(p-2)$式成立。证毕。

例　假想机字长16位。设$D=15277$，试求截取其左边6位之数据D'。

解　由命题 2 得

$$D'=E(15277/2^{16-6})\times 2^{16-6}=14\times 2^{10}$$

模拟计算机运行结果如下：

	b_{15}	b_{14}	b_{13}	b_{12}	b_{11}	b_{10}	b_9	b_8	b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0
$D=$	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1
	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AND结果：	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

逻辑与的结果

$$D'' = 2^{13} + 2^{12} + 2^{11} = 14\times 2^{10} = D'$$

三、截取操作数右边n位

现在，讨论问题2。仍先研究一示例。

```
LD A, 56H   ；取56H至累加器A。
AND 7H      ；截取A之右边3位。
```

模拟计算机运行结果如下：

	b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0
累加器A：	0	1	0	1	0	1	1	0
立即数7：	0	0	0	0	0	1	1	1
AND结果：	0	0	0	0	0	1	1	0

即逻辑与结果为十进制数6.

操作数56H为十进制数的86，亦即

$$56\mathrm{H} = 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0$$

将86作如下运算：

$$86(\mathrm{MOD}2^3) \equiv 6$$

两种运算结果又恰好相同。于是，又可得如下命题：

命题 3　截取计算机内操作数D右边m位运算等价于D作模2^m运算，亦即

$$D(MOD2^m) \qquad (p-3)$$

证　设计算机字长为L位，$D = 2^{L-1}\times b_{L-1} + \cdots + 2^m\times b_m + 2^{m-1}\times b_{m-1} + \cdots + 2^0\times b_0$，则

$$\begin{aligned} D(\mathrm{MOD}2^m) &= [(2^{L-1}\times b_{L-1} + \cdots + 2^m\times b_m) + (2^{m-1}\times b_{m-1} + \cdots + 2^0\times b_0)](\mathrm{MOD}2^m) \\ &= [(2^{L-1}\times b_{L-1} + \cdots + 2^m\times b_m)(\mathrm{MOD}2^m) \\ &\quad + (2^{m-1}\times b_{m-1} + \cdots + 2^0\times b_0)(\mathrm{MOD}2^m)](\mathrm{MOD}2^m) \end{aligned}$$

因为

$$2^m | (2^i\times b_i) \qquad i \geqslant 2^m$$

所以

$$(2^{L-1}\times b_{L-1} + \cdots + 2^m\times b_m)(\mathrm{MOD}2^m) \equiv 0$$

又

$$2^{m-1}\times b_{m-1} + \cdots + 2^0\times b_0 < 2^m$$

得

$$(2^{m-1}\times b_{m-1} + \cdots + 2^0\times b_0)(\mathrm{MOD}2^m) \equiv 2^{m-1}\times b_{m-1} + \cdots + 2^0\times b_0$$

故

$$\begin{aligned} D(\mathrm{MOD}2^m) &\equiv (2^{m-1}\times b_{m-1} + \cdots + 2_0\times b_0)(\mathrm{MOD}2^m) \\ &\equiv 2^{m-1}\times b_{m-1} + \cdots + 2^0\times b_0 \end{aligned}$$

亦即保留了操数D右边m位。命题得证。

例　设假想机字长16位，$D=15277$。试求截取其右边 5 位之数据D'。

解　由命题 3 得

$$D'=15277(\mathrm{MOD}2^5)=13$$

模拟计算机运行结果如下：

	b_{15}	b_{14}	b_{13}	b_{12}	b_{11}	b_{10}	b_9	b_8	b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0
D：	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
AND结果：	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1

逻辑与结果为

$$D''=2^3+2^2+2^0=13=D'$$

推广以上结论，可得命题 4 。

命题 4　截取计算机操作数D之b_m，b_{m-1}，…，b_n连续K位的操作等价于该数作

$$D(MOD2^{m+1})-D(\mathrm{MOD}2^n)\qquad(p-4)$$

运算，其中$K=m-n+1$。

证　设计算机字长为L位。令

$$D=2^{L-1}\times b_{L-1}+\cdots+2^{m+1}\times b_{m+1}+\underbrace{2^m\times b_m+\cdots+2^n\times b_n}_{K=m-n+1}+2^{n-1}\times b_{n-1}+\cdots+2^0\times b_0$$

因为

$$D(\mathrm{MOD}2^{m+1})\equiv2^m\times b_m+\cdots+2^n\times b_n+2^{n-1}\times b_{n-1}+\cdots+2^0\times b_0$$
$$D(\mathrm{MOD}2^n)\equiv2^{n-1}\times b_{n-1}+\cdots+2_0\times b_0$$

所以

$$D(\mathrm{MOD}2^{m+1})-D(\mathrm{MOD}2^n)\equiv2^m\times b_m+\cdots+2^n\times b_n$$

即保留了D之b_m，…，b_n连续K位。命题 4 得证。

例　设操作数$D=93$，计算机字长 8 位。试求截取D之b_5、b_4和b_3位之数据D'。

解　由命题4可得

$$D(\mathrm{MOD}2^6)=93(\mathrm{MOD}2^6)\equiv29$$
$$D(\mathrm{MOD}2^3)=93(\mathrm{MOD}2^3)\equiv5$$

所以

$$D'=D(\mathrm{MOD}2^6)-D(\mathrm{MOD}2^3)\equiv29-5=24$$

模拟计算机运行结果如下。

D：	0	1	0	1	1	1	0	1
截取位：	0	0	1	1	1	0	0	0
D''：	0	0	0	1	1	0	0	0

亦即执行Z-80汇编程序

```
LD   A, 5DH    ；取93至累加器A。
AND  38H       ；截取A之b5，b4和b3位。
```

结果为

$$D'' = 2^4 + 2^3 = 24 = D'$$

四、 结 束 语

本文证明了汇编语言AND指令的数字意义。运用公式($p-2$)、($p-3$)和($p-4$)，很容易在高级语言中实现截取操作数某n位2进制位的操作。例如，在BASIC语言中，可利用取整函用INT(x)和模运算MOD；在PASCAL语言中，则可利用整除运算DIV和模运算MOD达到。利用本文提出的三个公式，第一可免除在高级语言中截取操作数2进制位时数据基转换之劳，第二可以在高级语言中方便地实现进2制位的逻辑操作，这就是本文的意义之所在。

参 考 文 献

[1] 王湘浩，离散数学，高等教育出版社，(1983)，93—112.
[2] 王遇科，离散数学基础，国防工业出版社，(1982)，192—200.
[3] 许茂元等译，Z-80汇编语言程序设计，科学文献出版社重庆分社，(1983).

Mathematical Implication of AND Instruction in Assembly Language Programming

Hou Jigong

Abstract

This paper discusses the mathematical implication of AND instruction in assembly language programming.

Two theorems are demonstrated:

Use AND instruction to truncate the left n bits of a operand D, which is equivalent to mathematical operation $E(D/2^{l-n})\times 2^{l-n}$, here i is the word length in a computer;

Use AND instruction to truncate the right n bits of a operand D, which is equivalent to mothematical operation $D(MOD2^n)$.